LXXXVI Московская математическая олимпиада

25 марта 2023 года ♦ 11 класс, второй день

Задача 1. Дана строго возрастающая функция $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ (где $\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел), которая удовлетворяет соотношению $f\big(n+f(m)\big) = f(n)+m+1$ для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$. Найдите все значения, которые может принимать $f(2023)$.

Задача 2. Какое наименьшее количество различных целых чисел нужно взять, чтобы среди них можно было выбрать как геометрическую, так и арифметическую прогрессию длины 5?

Задача 3. В треугольнике ABC высоты BE и CF пересекаются в точке H, точка M — середина стороны BC, а X — точка пересечения внутренних касательных к окружностям, вписанным в треугольники BMF и CME. Докажите, что точки X, M и H лежат на одной прямой.

Задача 4. Имеются абсолютно точные двухчашечные весы и набор из 50 гирь, веса которых равны $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\ldots$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{50}$. Докажите, что можно выбрать 10 из них и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие.

Задача 5. В выпуклом многограннике обозначим через В, Р и Т соответственно число вершин, рёбер и максимальное число треугольных граней, которые имеют общую вершину. Докажите, что $\text{В}\sqrt{\text{Р}+\text{Т}} \geqslant 2\text{Р}$.

Например, для тетраэдра (В $=4$, Р $=6$, Т $=3$) выполняется равенство, а для треугольной призмы (В $=6$, Р $=9$, Т $=1$) или куба (В $=8$, Р $=12$, Т $=0$) имеет место строгое неравенство.

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVI Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXVI Московская математическая олимпиада

25 марта 2023 года ♦ 11 класс, второй день

Задача 1. Дана строго возрастающая функция $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ (где $\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел), которая удовлетворяет соотношению $f\big(n+f(m)\big) = f(n)+m+1$ для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$. Найдите все значения, которые может принимать $f(2023)$.

Задача 2. Какое наименьшее количество различных целых чисел нужно взять, чтобы среди них можно было выбрать как геометрическую, так и арифметическую прогрессию длины 5?

Задача 3. В треугольнике ABC высоты BE и CF пересекаются в точке H, точка M — середина стороны BC, а X — точка пересечения внутренних касательных к окружностям, вписанным в треугольники BMF и CME. Докажите, что точки X, M и H лежат на одной прямой.

Задача 4. Имеются абсолютно точные двухчашечные весы и набор из 50 гирь, веса которых равны $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\ldots$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{50}$. Докажите, что можно выбрать 10 из них и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие.

Задача 5. В выпуклом многограннике обозначим через В, Р и Т соответственно число вершин, рёбер и максимальное число треугольных граней, которые имеют общую вершину. Докажите, что $\text{В}\sqrt{\text{Р}+\text{Т}} \geqslant 2\text{Р}$.

Например, для тетраэдра (В $=4$, Р $=6$, Т $=3$) выполняется равенство, а для треугольной призмы (В $=6$, Р $=9$, Т $=1$) или куба (В $=8$, Р $=12$, Т $=0$) имеет место строгое неравенство.

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVI Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`