ММО-2024, 11 класс (первый день)

Задача 1. У математика есть 19 различных гирь, массы которых в килограммах равны $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$, …, $\ln 20$, и абсолютно точные двухчашечные весы. Он положил несколько гирь на весы так, что установилось равновесие. Какое наибольшее число гирь могло оказаться на весах? *(М. Евдокимов)*

Ответ: 15.

Решение. Сумма логарифмов положительных чисел равна логарифму их произведения, поэтому будем уравнивать произведения двух непересекающихся наборов чисел из множества $\{2, 3, \dots, 20\}$. Разложим натуральные числа от 2 до 20 на простые множители:

$$2, 3, 2^2, 5, 2\cdot 3, 7, 2^3, 3^2, 2\cdot 5, 11, 2^2\cdot 3, 13, 2\cdot 7, 3\cdot 5, 2^4, 17, 2\cdot 3^2, 19, 2^2\cdot 5.$$

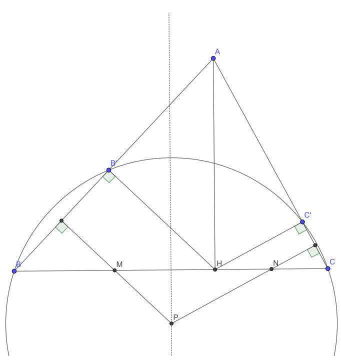
Числа 11, 13, 17, 19 встречаются в этих разложениях ровно по одному разу, поэтому их следует исключить. Таким образом, более 15 гирь оказаться на весах не может.

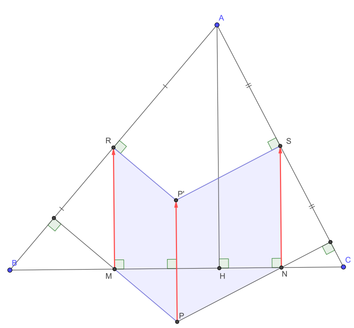
Покажем, что можно уравновесить 15 гирь. Заметим, что простые множители 2, 3, 5 и 7 встречаются в выписанных разложениях чётное число раз (18, 8, 4 и 2 соответственно). Приведём один из возможных примеров равенства произведений:

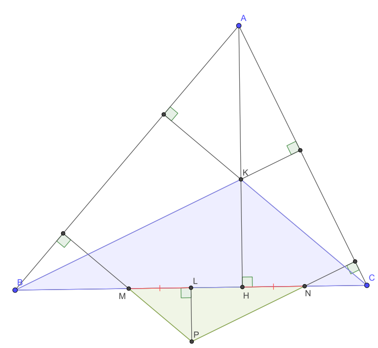
$$2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 10\cdot 15\cdot 18 = 2^9\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7 = 3\cdot 5\cdot 9\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 20.$$

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH. Точки M и N — середины отрезков BH и CH. Докажите, что точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, равноудалена от точек B и C. *(И. Михайлов)*

Решение. *Первый способ.* Обозначим точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, через P, а точки, симметричные B и C относительно прямых MP и NP, через B' и C'. Тогда прямые MP и NP — серединные перпендикуляры к отрезкам BB' и CC', поэтому достаточно доказать, что четырёхугольник $BB'C'C$ — вписанный. Заметим, что MP и NP содержат средние линии треугольников $BB'H$ и $CC'H$, параллельные сторонам $B'H$ и $C'H$ соответственно. Значит, $HB' \perp AB$, $HC' \perp AC$. Четырёхугольник $HB'AC'$ вписан в окружность, построенную на AH как на диаметре, поэтому $\angle B'C'A = \angle B'HA$ по свойству вписанных углов. При этом $\angle B'HA = 90^\circ - \angle HAB' = \angle ABC$. Значит, четырёхугольник $BB'C'C$ вписанный, что и требовалось доказать.







Второй способ. Обозначим точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, через P, а середины сторон AB и AC треугольника ABC через R и S. Отрезки RM и SN являются средними линиями треугольников BAH и CAH, параллельными общей стороне AH этих треугольников. Поэтому отрезки RM и SN равны, параллельны и оба перпендикулярны прямой BC. Параллельно перенесём точку P на вектор $\overrightarrow{MR}$ и обозначим полученную точку P'. Тогда четырёхугольники $MRP'P$ и $NSP'P$ являются параллелограммами. Поэтому прямая

$P'R$ параллельна прямой PM, а значит, перпендикулярна AB. Аналогично прямая $P'S$ перпендикулярна AC. Тогда P' является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AB и AC треугольника ABC, т. е. совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC. В частности, точка P' лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Следовательно, точка P также лежит на серединном перпендикуляре к BC, так как $P'P \perp BC$ по построению.

Третий способ. Обозначим точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, через P, а точку пересечения высот треугольника ABC — через K. Тогда заметим, что треугольники BKC и NPM подобны по двум углам. Действительно, $\angle MNP = 90^\circ - \angle BCA = \angle CBK$. Аналогично, выполнено равенство $\angle NMP = \angle BCK$. Также заметим, что коэффициент подобия этих треугольников равен 2, поскольку $\frac{BC}{MN} = 2$. Опустим из P перпендикуляр PL на BC. Тогда из доказанного подобия следует, что $\frac{HC}{LM} = 2$, т. е. $LM = NH$. Следовательно, $BL = BM + ML = BM + NH = \frac{1}{2}BC$, а значит, P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, откуда следует требуемое.

Задача 3. Имеется кучка из 100 камней. Двое играют в следующую игру. Первый игрок забирает 1 камень, потом второй может забрать 1 или 2 камня, потом первый может забрать 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня, и так далее. Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? *(Л. Смирнова)*

Ответ: первый игрок.

Решение. Докажем, что для любого натурального $n \leqslant 10$ первый игрок на своём n-ом ходе может добиться, чтобы количество забранных из кучки камней равнялось n^2, и второй игрок не сможет ему помешать. Доказательство проведём индуктивно. В свой первый ход первый игрок забирает один камень, т. е. число забранных камней равно 1^2. Пусть в свой n-й ход первому игроку удалось сделать так, чтобы количество забранных камней равнялось n^2. В свой n-й ход второй игрок может взять от 1 до $2n$ камней. Поскольку $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, после его хода общее количество забранных камней будет больше n^2 и меньше $(n+1)^2$. Первый игрок в свой следующий ход может взять от 1 до $2n + 1$ камня и точно сможет получить $(n+1)^2$ забранных камней независимо от предыдущего хода второго игрока. Таким образом, поскольку $100 = 10^2$, побеждает первый игрок: ему достаточно каждый раз забирать такое число камней, чтобы общее число забранных камней было точным квадратом, и на своём 10-м ходе он возьмёт последний камень.

Комментарий. Если исходная кучка содержит от n^2 до $n^2 + n - 1$ камней, то выигрышная стратегия есть у первого игрока, а если от $n^2 + n$ до $n^2 + 2n$, то у второго.

Задача 4. Дан многочлен степени $n \geqslant 1$ с целыми ненулевыми коэффициентами, каждый из которых является его корнем. Докажите, что модули коэффициентов этого многочлена не превосходят 2. *(Л. Шатунов)*

Решение. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — данный в условии многочлен. По условию числа a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, являются его корнями:

$$P(a_k) = a_n a_k^n + a_{n-1} a_k^{n-1} + \ldots + a_1 a_k + a_0 = 0.$$

Тогда a_0 делится на a_k при любом $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому достаточно доказать, что $|a_0| \leqslant 2$.

Имеем

$$0 = P(a_0) = a_n a_0^n + a_{n-1} a_0^{n-1} + \ldots + a_1 a_0 + a_0 = a_0(a_n a_0^{n-1} + a_{n-1} a_0^{n-2} + \ldots + a_2 a_0 + a_1 + 1),$$

значит, $a_1 + 1$ делится на a_0. Как показано выше, a_0 делится на a_1. Значит, $a_1 + 1$ делится на a_1. Поскольку эти числа взаимно просты, это возможно только в случае, если $a_1 = \pm 1$.

Если $a_1 = 1$, то $a_1 + 1 = 2$ делится на a_0, и утверждение доказано.

Пусть теперь $a_1 = -1$. Докажем индукцией по m, что $a_0 a_{2m-1} + a_{2m-2} = 0$ и $a_{2m-1} = \pm 1$ при всех $m = 1, 2, \ldots, [\frac{n+1}{2}]$.

База ($m = 1$) уже доказана: $a_0a_1 + a_0 = a_0(a_1 + 1) = 0$, $a_1 = -1$.

Пусть равенство $a_0a_{2m-1} + a_{2m-2} = 0$ выполнено при всех $m = 1, 2, \ldots, k$. Тогда многочлен $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} \pm (x^{2k-1} - a_0x^{2k-2}) \pm (x^{2k-3} - a_0x^{2k-4}) \pm \ldots \pm (x - a_0).$$

При $x = a_0$ получаем

$$0 = P(a_0) = a_na_0^n + a_{n-1}a_0^{n-1} + \ldots + a_{2k+1}a_0^{2k+1} + a_{2k}a_0^{2k} =$$

$$= a_0^{2k}(a_na_0^{n-2k} + a_{n-1}a_0^{n-2k-1} + \ldots + a_{2k+1}a_0 + a_{2k}).$$

Следовательно, a_{2k} делится на a_0. Как показано выше, a_0 делится на a_{2k}, поэтому $a_{2k} = \varepsilon a_0$, где $\varepsilon = \pm 1$. Тогда

$$0 = a_na_0^{n-2k} + a_{n-1}a_0^{n-2k-1} + \ldots + a_{2k+1}a_0 + a_{2k} = a_0(a_na_0^{n-2k-1} + a_{n-1}a_0^{n-2k-2} + \ldots + a_{2k+1} + \varepsilon).$$

Значит, $a_{2k+1} + \varepsilon$ делится на a_0. Как показано выше, a_0 делится на a_{2k+1}. Значит, $a_{2k+1} + \varepsilon$ делится на a_{2k+1}. Поскольку эти числа взаимно просты, это возможно только в случае, если $a_{2k+1} = \pm 1$.

Если $a_{2k+1} = \varepsilon$, то $a_{2k+1} + \varepsilon = 2\varepsilon = \pm 2$ делится на a_0, и утверждение доказано.

Если $a_{2k+1} = -\varepsilon$, то $a_0a_{2k+1} + a_{2k} = a_0(-\varepsilon + \varepsilon) = 0$ и $a_{2k+1} = -\varepsilon = \pm 1$ — переход доказан.

Если $n = 2s$ чётно, то из доказанного утверждения следует, что многочлен $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = a_{2s}x^{2s} \pm (x^{2s-1} - a_0x^{2s-2}) \pm (x^{2s-3} - a_0x^{2s-4}) \pm \ldots \pm (x - a_0).$$

При $x = a_0$ получаем $0 = P(a_0) = a_{2s}a_0^{2s}$, что по условию невозможно.

Если $n = 2s + 1$ нечётно, то из доказанного утверждения следует, что многочлен $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = \varepsilon_{s+1}(x^{2s+1} - a_0x^{2s}) + \varepsilon_s(x^{2s-1} - a_0x^{2s-2}) + \ldots + \varepsilon_1(x - a_0),$$

где ε_k — целые числа, по модулю равные 1, при всех $k = 1, 2, \ldots, s + 1$.

Как было показано выше, $\varepsilon_1 = -1$, поэтому из условия следует, что число -1 является корнем многочлена $P(x)$. Тогда

$$0 = P(-1) = \varepsilon_{s+1}((-1)^{2s+1} - a_0(-1)^{2s}) + \varepsilon_s((-1)^{2s-1} - a_0(-1)^{2s-2}) + \ldots + \varepsilon_1(-1 - a_0) =$$

$$= (\varepsilon_{s+1} + \varepsilon_s + \ldots + \varepsilon_1)(-1 - a_0) = 0.$$

Если значение первой скобки отлично от нуля, то из этого равенства следует, что $a_0 = -1$, и утверждение доказано.

Предположим, что $\varepsilon_{s+1} + \ldots + \varepsilon_1 = 0$. Тогда поскольку $\varepsilon_1 = -1$, то найдётся такое k от 2 до $s + 1$, что $\varepsilon_k = 1$. Значит, $a_{2k-2} = -a_0$, т. е. число $-a_0$ является коэффициентом многочлена $P(x)$. Тогда по условию

$$0 = P(-a_0) = \varepsilon_{s+1}((-a_0)^{2s+1} - a_0(-a_0)^{2s}) + \varepsilon_s((-a_0)^{2s-1} - a_0(-a_0)^{2s-2}) + \ldots + \varepsilon_1(-a_0 - a_0) =$$

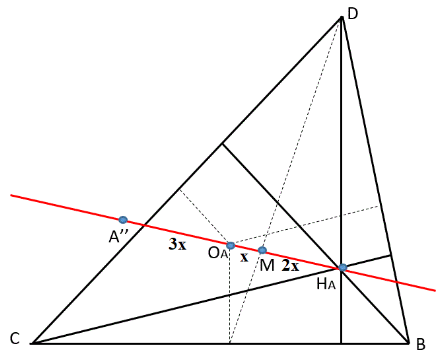
$$= -2\varepsilon_{s+1}a_0^{2s+1} - 2\varepsilon_sa_0^{2s-1} - \ldots - 2\varepsilon_2a_0^3 - 2\varepsilon_1a_0 = -2a_0(\varepsilon_{s+1}a_0^{2s} + \varepsilon_sa_0^{2s-2} + \ldots + \varepsilon_2a_0^2 + \varepsilon_1).$$

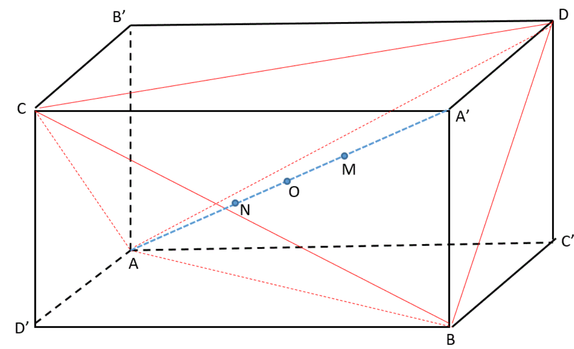
Отсюда следует, что $\varepsilon_1 = -1$ делится на a_0, поэтому $|a_0| \leqslant 1$, что завершает доказательство.

Комментарий. Можно показать, что коэффициенты многочлена $P(x)$ не могут быть равны 2, то есть они могут принимать только значения ± 1, -2.

Задача 5. В тетраэдре $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны. Через середину отрезка AH_A, где H_A — точка пересечения высот грани BCD, провели прямую h_A перпендикулярно плоскости BCD. Аналогичным образом определили точки H_B, H_C, H_D и построили прямые h_B, h_C, h_D соответственно для трёх других граней тетраэдра. Докажите, что прямые h_A, h_B, h_C, h_D пересекаются в одной точке. *(М. Евдокимов)*

Решение. Проведём через пару скрещивающихся рёбер тетраэдра $ABCD$ две параллельные плоскости. Так же поступим для двух других пар скрещивающихся рёбер и получим параллелепипед. Диагонали его граней равны между собой, поэтому все грани — прямоугольники, и параллелепипед прямоугольный. Пусть O — его центр, являющийся также центром описанной сферы тетраэдра $ABCD$. Пусть также A', B', C', D' — точки, симметричные A, B, C, D соответственно относительно точки O (см. рисунок). Докажем, что все построенные прямые проходят через точку O.





Пусть M — центр масс треугольника BCD. Тогда $\overrightarrow{A'M} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D}\right) = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{A'A}$, то есть точка M лежит на диагонали AA' и делит её в отношении $2:1$, считая от вершины A. Аналогично центр масс N треугольника $B'C'D'$ лежит на этой диагонали и делит её в отношении $1:2$, считая от вершины A. Точка O — середина отрезка NM, поэтому $AO : OM = 3 : 1$.

Рассмотрим проекцию на плоскость BCD: A'' — проекция точки A, O_A — проекция центра O. Точка O совпадает с центром описанной сферы тетраэдра $ABCD$, поэтому O_A — центр описанной окружности треугольника BCD.

Тогда прямая AA' проецируется в прямую Эйлера O_AM треугольника BCD. Пусть $O_AM = x$. Тогда $O_AA'' = 3x$ (O делит отрезок AM в отношении $3:1$, это отношение сохраняется при проецировании). Кроме того, O_A, M, H_A лежат на одной прямой и $O_AM : MH_A = 1 : 2$ (прямая Эйлера), отсюда $MH_A = 2x$. Следовательно, $O_AA'' = O_AH_A$, а прямая OO_A, перпендикулярная плоскости BCD, делит отрезок AH_A пополам, а значит, совпадает с прямой h_A. Итак, все построенные прямые проходят через точку O.

Задача 6. Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — до и си. Для прохождения испытания Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнёт играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестаёт звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными? *(В. Клепцын)*

Решение. *Первый способ.* Пусть L_n — число мелодий длины n, не содержащих запретных последовательностей нот. Будем считать, что $L_0 = 1$. По индукции докажем, что $L_{n+1} \geqslant L_n + L_{n-1}$ для всех натуральных n.

База индукции ($n = 1$): $L_2 = 4 \geqslant 2 + 1 = L_1 + L_0$.

Предположим, что неравенство $L_{k+1} \geqslant L_k + L_{k-1}$ верно для всех k, меньших n. Покажем, что тогда $L_{n+1} \geqslant L_n + L_{n-1}$. Заметим, что

$$L_{n+1} \geqslant 2L_n - L_{n-4} - L_{n-5} - \ldots - L_0. \tag{1}$$

Действительно, мы можем добавить одну из двух нот к уже имеющейся мелодии из n нот, при этом добавленная нота могла завершить запретную мелодию из 5 нот и испортить разрешённую мелодию из $n-4$ нот, завершить запретную мелодию из 6 нот и испортить разрешённую мелодию из $n-5$ нот и т. д. (Здесь мы можем вычесть лишнее, если $n > 30$, и часть вычитаемых мелодий могут быть одинаковыми, но поскольку мы пишем оценку снизу, всё правильно.)

Из неравенства $L_{k+1} \geqslant L_k + L_{k-1}$ следуют неравенства

$$L_{k+1} - L_k \geqslant L_{k-1}, \tag{2}$$

$$L_{k+1} - L_{k-1} \geqslant L_k. \tag{3}$$

Применяя неравенства (1), (2) и (3), получим

$$L_{n+1} - L_n - L_{n-1} \geqslant (L_n - L_{n-1}) - L_{n-4} - L_{n-5} - \ldots - L_0 \geqslant L_{n-2} - L_{n-4} - L_{n-5} - \ldots - L_0 =$$

$$= (L_{n-2} - L_{n-4}) - L_{n-5} - \ldots - L_0 \geqslant L_{n-3} - L_{n-5} - L_{n-6} - \ldots - L_0 \geqslant$$

$$\geqslant L_{n-4} - L_{n-6} - L_{n-7} - \ldots - L_0 \geqslant \ldots \geqslant L_3 - L_1 - L_0 = 8 - 2 - 1 = 5 > 0.$$

Следовательно, $L_{n+1} \geqslant L_n + L_{n-1}$, и шаг индукции доказан.

Поскольку L_0 и L_1 положительны, то из доказанного неравенства следует, что L_n — возрастающая последовательность положительных чисел. Следовательно, $L_{300} > 0$, и Иван справится с испытанием Кощея.

Второй способ (предложен участником олимпиады). Рассмотрим всевозможные мелодии из нот до и си длины 13 (их 2^{13} штук). Каждую такую мелодию периодически продолжим в обе стороны, получив бесконечную в обе сторону мелодию. Назовём две получившиеся бесконечные мелодии эквивалентными, если одна получается из другой сдвигом.

Наименьший период всех бесконечных мелодий, кроме двух, состоящих только из нот до и только из нот си, равен 13.

Количество не эквивалентных друг другу бесконечных мелодий равно $\frac{2^{13}-2}{13} + 2 = 632$. Из них мелодий, содержащих запрещённые Кощеем мелодии, не больше

$$\left(2^8 + 2^7 + \ldots + 2^1\right) + 18 = 528.$$

(в скобках учтены запретные мелодии длины $\leqslant 12$, за скобками — все остальные).

Таким образом, найдётся бесконечная мелодия, которая не содержит запретных мелодий, и для прохождения испытания Ивану достаточно сыграть её кусок длины 300.