ММО-2024, 9 класс, критерии проверки

Задача 1. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{c}{d}+\frac{d}{c}.$$

Докажите, что произведение каких-то двух чисел из a, b, c, d равно произведению двух других.

Критерии

± Получено равенство $\frac{ac-bd}{bc}=\frac{ac-bd}{ad}$ или аналогичное, сокращено на $ac-bd$ без упоминания случая, что оно может быть равно нулю. В итоге получено только одно из возможных равенств попарных произведений.

Задача 2. На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Учитель 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться так, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?

Критерии

− Только верный ответ.

− Приведён неверный пример (например, разбиения повторяются или хотя бы одно из разбиений неверное), при этом нет идеи разбиения детей на пары.

∓ Есть идея разбиения детей на 6 пар с одинаковой суммой, но количество разбиений посчитано с существенной ошибкой (например, забыто, что если пары внутри команд переставлять, то команды остаются такими же, и получен ответ 120 или 60).

± То же, но ошибка менее существенная — например, забыто, что перемена команд местами даёт то же разбиение, и получено, что разбиений 20.

± Построенный пример неверный, но легко исправляется; в примере есть идея разбиения детей на 6 пар с одинаковой суммой.

Задача 3. Петя загадал положительную несократимую дробь $x=\frac{m}{n}$. За один ход Вася называет положительную несократимую дробь y, не превосходящую 1, и Петя в ответ сообщает Васе числитель несократимой дроби, равной сумме $x+y$. Как Васе за два хода гарантированно узнать x?

Критерии

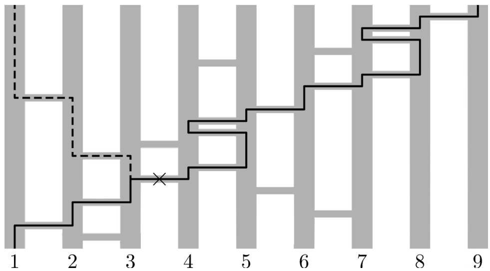
− Приведёны верные дроби, по которым можно восстановить x, но обоснование, что это можно сделать, отсутствует или неверное.

∓ При обосновании, что приведённые дроби подходят, не разобрана или не упомянута хотя бы одна возможность сокращения дробей.

± Есть верный алгоритм восстановления x, верно указаны все возможности сокращения дробей (в частности, правильно понимается, что такое несократимая дробь), но разбор случаев неполный (например, не доказана несократимость).

Задача 5. В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две из которых не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; когда он встречает палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого столбика, то он закончит свой путь на девятом столбике. Всегда ли можно убрать одну из палочек так, чтобы жук, начав внизу первого столбика, в конце пути оказался наверху пятого столбика?

Например, если палочки расположены как на рисунке, то жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, то он поползёт по пунктирной линии.



Критерии

∓ Есть идея пустить жука с верха пятого столбика, но дальнейшие рассуждения некорректны или неясны (например, убирается неверная палочка или разбираются несуществующие случаи).

Задача 6. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого натурального k от 1 до 99 сумма чисел на верхних k карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?

Критерии

− Приведен только ответ.

−. Приведен верный пример.

− Приведен пример с одним иррациональным числом, но утверждается, что ответ равен 1.

∓ Есть идея рассмотреть циклические сдвиги карточек.