LXXXVII Московская математическая олимпиада

10 марта 2024 года • 9 класс

Задача 1. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{c}{d}+\frac{d}{c}.$$

Докажите, что произведение каких-то двух чисел из a, b, c, d равно произведению двух других.

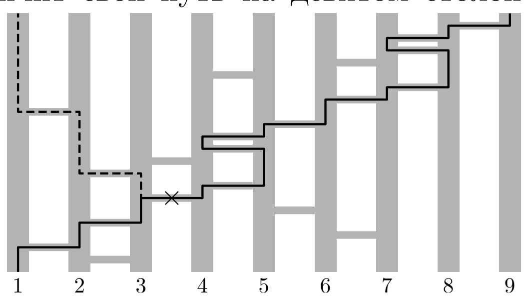
Задача 2. На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Учитель 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться так, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?

Задача 3. Петя загадал положительную несократимую дробь $x=\frac{m}{n}$. За один ход Вася называет положительную несократимую дробь y, не превосходящую 1, и Петя в ответ сообщает Васе числитель несократимой дроби, равной сумме $x+y$. Как Васе за два хода гарантированно узнать x?

Задача 4. На описанной окружности треугольника ABC отметили середины дуг BAC и CBA — точки M и N соответственно, и середины дуг BC и AC — точки P и Q соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB. Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC. Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP. Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ.

Задача 5. В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две из которых не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; когда он встречает палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого столбика, то он закончит свой путь на девятом столбике. Всегда ли можно убрать одну из палочек так, чтобы жук, начав внизу первого столбика, в конце пути оказался наверху пятого столбика?

Например, если палочки расположены как на рисунке, то жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, то он поползёт по пунктирной линии.



Задача 6. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого натурального k от 1 до 99 сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?

XXI устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 14 апреля.
Подробности — на странице olympiads.mccme.ru/ustn/

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVII Московской математической олимпиады —
на сайте mmo.mccme.ru