LXXXVII Московская математическая олимпиада

30 марта 2024 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. Существует ли на координатной плоскости точка, относительно которой симметричен график функции $f(x) = \dfrac{1}{2^x+1}$?

Задача 2. Чемпионат по футболу проходил в два круга. В каждом круге каждая команда сыграла с каждой один матч (за победу даётся три очка, за ничью одно, за поражение ноль). Оказалось, что все команды вместе набрали в первом круге 60% от общей суммы всех очков за два круга. Известно также, что победитель чемпионата набрал во втором круге в 30 раз меньше очков, чем все команды вместе в первом круге. Сколько команд участвовало в турнире?

Задача 3. Докажите, что если при $n \in \mathbb{N}$ число $2 + 2\sqrt{12n^2+1}$ целое, то оно — точный квадрат.

Задача 4. В остроугольном треугольнике ABC высоты AH_A, BH_B и CH_C пересекаются в точке H. Через точки, в которых окружность радиуса HH_A с центром H пересекает отрезки BH и CH, проведена прямая ℓ_A. Аналогично проведены прямые ℓ_B и ℓ_C. Докажите, что точка пересечения высот треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задача 5. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают белую клетчатую доску 100×100 на произвольные группы клеток, каждая из чётного (но не обязательно все из одинакового) числа клеток, каждый — на свой набор групп. Верно ли, что после этого всегда можно покрасить по половине клеток в каждой группе из разбиения Пети в чёрный цвет так, чтобы в каждой группе из разбиения Васи было поровну чёрных и белых клеток?

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVII Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXVII Московская математическая олимпиада

30 марта 2024 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. Существует ли на координатной плоскости точка, относительно которой симметричен график функции $f(x) = \dfrac{1}{2^x+1}$?

Задача 2. Чемпионат по футболу проходил в два круга. В каждом круге каждая команда сыграла с каждой один матч (за победу даётся три очка, за ничью одно, за поражение ноль). Оказалось, что все команды вместе набрали в первом круге 60% от общей суммы всех очков за два круга. Известно также, что победитель чемпионата набрал во втором круге в 30 раз меньше очков, чем все команды вместе в первом круге. Сколько команд участвовало в турнире?

Задача 3. Докажите, что если при $n \in \mathbb{N}$ число $2 + 2\sqrt{12n^2+1}$ целое, то оно — точный квадрат.

Задача 4. В остроугольном треугольнике ABC высоты AH_A, BH_B и CH_C пересекаются в точке H. Через точки, в которых окружность радиуса HH_A с центром H пересекает отрезки BH и CH, проведена прямая ℓ_A. Аналогично проведены прямые ℓ_B и ℓ_C. Докажите, что точка пересечения высот треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задача 5. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают белую клетчатую доску 100×100 на произвольные группы клеток, каждая из чётного (но не обязательно все из одинакового) числа клеток, каждый — на свой набор групп. Верно ли, что после этого всегда можно покрасить по половине клеток в каждой группе из разбиения Пети в чёрный цвет так, чтобы в каждой группе из разбиения Васи было поровну чёрных и белых клеток?

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVII Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`