Объединенная межвузовская математическая олимпиада **01.02.2015**

I вариант (9–10 классы)

Задача 1. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх относится к сумме всех членов без последних трёх как $4:3$. Найти количество членов этой прогрессии.

Задача 2. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди — среднего, а лжецы — низшего. A, B и C — жители этого острова. Один из них — рыцарь, другой — лжец, а третий — обычный человек. A и B сказали следующее. A: «B по рангу выше, чем C.» B: «C по рангу выше, чем A.» Что ответил C на вопрос: «Кто выше по рангу — A или B?»

Задача 3. Четырехзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равна N. Оказалось, что число N делится на 100. Найдите N.

Задача 4. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 + 42xy + 17y^2 = 10; \\ 10x^2 + 18xy + \ \ 8y^2 = 6. \end{cases}$$

Задача 6. Будем обозначать $f^{(n)}(x)$ последовательное применение n раз функции f (например, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ и т. д.). Даны функции $g(x) = \frac{1}{x+1}$ и $h(x) = \frac{x+1}{x}$. Найдите значение выражения $g^{(2015)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$.

Задача 7. Прямая c задается уравнением $y = x + 1$. Точки A и B имеют координаты $A(1;0)$ и $B(3;0)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{a}(x^2 + y^2) + \sqrt{13-a}(x+y) - \sqrt{13a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

Задача 9. В турнире по минифутболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении $1:5$ (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс пятикратную сумму, т. е. получает в шесть раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении $1:1$, на третью — $1:8$, на четвертую — $1:7$. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Задача 10. Прямоугольник П разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 9 маленьких прямоугольников. Про какое наименьшее количество маленьких прямоугольников достаточно узнать площади, чтобы можно было однозначно определить площадь прямоугольника П.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **01.02.2015**

II вариант (9–10 классы)

Задача 1. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как $5:4$. Найдите количество членов этой прогрессии.

Задача 2. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может и говорить правду, и лгать). Жители этого острова, А и В, сказали следующее. А: «В — рыцарь.» В: «А — лжец.» Докажите, что либо один из них говорит правду, но это не рыцарь, либо один из них лжет, но это не лжец.

Задача 3. Четырехзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, полученного из X перестановкой его второй и третьей цифр, делится на 900. Найдите остаток от деления числа X на 90.

Задача 4. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 155 и 13 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 - 42xy + 17y^2 = 10; \\ 10x^2 - 18xy + \ \ 8y^2 = 6. \end{cases}$$

Задача 6. Будем обозначать $f^{(n)}(x)$ последовательное применение n раз функции f (например, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ и т. д.). Даны функции $g(x) = \frac{1}{x+1}$ и $h(x) = \frac{x+1}{x}$. Найдите значение выражения $g^{(2015)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$.

Задача 7. Прямая c задается уравнением $y = 2x$. Точки A и B имеют координаты $A(2;2)$ и $B(6;2)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{10-a}(x^2+y^2) + \sqrt{a}(x+y) - \sqrt{10a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

Задача 9. В турнире по минифутболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении $1:2$ (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс двукратную сумму, т. е. получает в три раза больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении $1:3$, на третью — $1:4$, на четвертую — $1:7$. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Задача 10. Прямоугольник П разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 9 маленьких прямоугольников. Про какое наименьшее количество маленьких прямоугольников достаточно узнать площади, чтобы можно было однозначно определить площадь прямоугольника П.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **01.02.2015**

III вариант (9–10 классы)

Задача 1. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 3 : 2. Найдите количество членов этой прогрессии.

Задача 2. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Два жителя называются *однотипными*, если они либо оба рыцари, либо оба лжецы. A, B и C — жители этого острова. A говорит: «B и C однотипны». Что ответит C на вопрос «A и B однотипны?»

Задача 3. Если из четырехзначного числа X вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N = K^2$, причем K — натуральное число, дающее остаток 2 при делении на 10 и остаток 6 при делении на 11. Найдите число N.

Задача 4. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а ее боковые стороны взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 + 14xy + 10y^2 = 17; \\ 4x^2 + 10xy + \ \ 6y^2 = 8. \end{cases}$$

Задача 6. Будем обозначать $f^{(n)}(x)$ последовательное применение n раз функции f (например, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ и т. д.). Даны функции $g(x) = \frac{1}{x+1}$ и $h(x) = \frac{x+1}{x}$. Найдите значение выражения $g^{(2015)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$.

Задача 7. Прямая c задается уравнением $y = x + 1$. Точки A и B имеют координаты $A(1; 0)$ и $B(3; 0)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{a}(x^2 + y^2) + \sqrt{13 - a}(x + y) - \sqrt{13a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

Задача 9. В турнире по волейболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 5 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс пятикратную сумму, т. е. получает в шесть раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 1, на третью — 1 : 5, на четвертую — 1 : 6. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Задача 10. Прямоугольник П разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 9 маленьких прямоугольников. Про какое наименьшее количество маленьких прямоугольников достаточно узнать площади, чтобы можно было однозначно определить площадь прямоугольника П.

IV вариант (9–10 классы)

Задача 1. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как $6:5$. Найдите количество членов этой прогрессии.

Задача 2. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может и говорить правду, и лгать). Жители этого острова A и B сказали следующее. A: «B — рыцарь.» B: «A — не рыцарь.» Докажите, что по крайней мере один из них говорит правду, но это не рыцарь.

Задача 3. Если из четырехзначного числа X вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N = K^2$, причем K — натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Найдите число N.

Задача 4. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 155 и 13 соответственно, а ее боковые стороны взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 - 14xy + 10y^2 = 17; \\ 4x^2 - 10xy + \ \ 6y^2 = 8. \end{cases}$$

Задача 6. Будем обозначать $f^{(n)}(x)$ последовательное применение n раз функции f (например, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ и т. д.). Даны функции $g(x) = \frac{1}{x+1}$ и $h(x) = \frac{x+1}{x}$. Найдите значение выражения $g^{(2015)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$.

Задача 7. Прямая c задается уравнением $y = 2x$. Точки A и B имеют координаты $A(2;2)$ и $B(6;2)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{10-a}(x^2+y^2) + \sqrt{a}(x+y) - \sqrt{10a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

Задача 9. В турнире по волейболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении $1:2$ (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс двукратную сумму, т. е. получает в три раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении $1:4$, на третью — $1:5$, на четвертую — $1:6$. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Задача 10. Прямоугольник П разбит прямыми, параллельными его сторонам, на 9 маленьких прямоугольников. Про какое наименьшее количество маленьких прямоугольников достаточно узнать площади, чтобы можно было однозначно определить площадь прямоугольника П.