Общие критерии оценивания

По результатам проверки каждого задания выставляется одна из следующих оценок:
«$+$», «$\pm$» — задача скорее решена;
«$\mp$», «$-$» — задача скорее не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставится оценка «0».

При подведении итогов учитывается только количество в целом решенных задач — задач, за которые поставлена оценка «$+$» или «$\pm$».

Оценки по задачам имеются в таблице в личном кабинете участника. Оценки внутри работы и на титульном листе работы выставлены в процессе предварительной проверки и не являются основанием для апелляции.

Приведённые далее критерии описывают оценки продвижений и ошибок, встречающихся во многих работах. Поэтому они не подлежат изменению и могут быть использованы для апелляции только в случае, если вы укажете, что какое-то место в вашей работе, подходящее под один из этих критериев, оценено не в соответствии с ним.

Комментарии по отдельным задачам

Задача 1. Получен ответ, отличающийся от верного, в том числе сократимая дробь — не выше «$\mp$».

Задача 2. Приведён только пример без доказательства, что другие случаи невозможны — не выше «$\mp$».

В ходе изложения решения неверно построено логическое отрицание к утверждению (например, «Андрей солгал, что не был ни первым, ни последним — значит, он был и первым, и последним») — не выше «$\mp$».

Задача 3. Приведены только примеры без доказательства, что других нет — не выше «$\mp$».

При рассмотрении случая $x = 1$ в решении отсутствует доказательство того, что при достаточно больших значениях y число z будет чётным — не выше «$\mp$».

В ответе есть лишние тройки — не выше «$\mp$».

Рассмотрено конечное число частных случаев — не выше «$\mp$».

Полностью рассмотрен только случай $x = 1$, случай $y = 1$ утерян — «$\pm$».

При рассмотрении случая $x = 1$ найдены не все возможные случаи y — не выше «$\mp$».

В найденных тройках из-за арифметических ошибок неверно посчитан z — при отсутствии других ошибок «$\pm$».

Задача решена в предположении $z \geqslant 0$ — не выше «$\mp$».

Задача 4. При решении в координатах получен неверный ответ — не выше «$\mp$».

Задача 5. Потерян случай $x = \pm\frac{1}{4}$ (в зависимости от варианта) — при отсутствии других ошибок «$\pm$».

Задача 6. Неравенство умножается на величину, про знак которой не доказано, что он положителен — не выше «$\mp$».

В решении используются неверные тригонометрические тождества — «$-$».

В решении используется неверное рассуждение, что $\sin 36°$, $\sin 37°$, $\sin 38°$, $\sin 39°$ (или $\sin 34°$, $\sin 35°$, $\sin 36°$, $\sin 37°$ в зависимости от варианта) можно заменить на числа $a < b < c < d$ и сравнить $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — не выше «$\mp$».

Задача 7. В решении доказано, что $AD = \frac{AM}{\cos 75°}$, однако $\cos 75°$ не вычислен или вычислен неверно — не ниже «$\pm$».

Задача 8. Без доказательства утверждается, что из $f(a) = f(b)$ следует $a = b$ — не выше «$\mp$».

Без доказательства утверждается, что из $g(a,b) = g(b,a)$ следует $a = b$ — не выше «$\mp$».

Задача 9. Приведён пример схемы турнира, при которой достигается верный ответ, но доказательство того, что меньше игр быть не могло, отсутствует или неполно — «$\mp$».

Получен неверный ответ (за исключением арифметических ошибок) — «$-$».

Вариант I

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{12+15}{18}+\frac{21+24}{27}+\ldots+\frac{48+51}{54}.$$

Ответ: $\frac{171}{20}$.

Решение.

$$\frac{12+15}{18}+\frac{21+24}{27}+\ldots+\frac{48+51}{54}=\frac{4+5}{6}+\frac{7+8}{9}+\ldots+\frac{16+17}{18}=$$
$$=\frac{(6-2)+(6-1)}{6}+\frac{(9-2)+(9-1)}{9}+\ldots+\frac{(18-2)+(18-1)}{18}=2+\frac{-3}{6}+2+\frac{-3}{9}+\ldots+2+\frac{-3}{18}=$$
$$=2\times 5-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{6}\right)=10-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=$$
$$=10-1-\frac{9}{20}=\frac{171}{20}\left(=8\frac{11}{20}\right).$$

Задача 2. Андрей, Максим, Игорь и Коля соревновались в велогонке. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:
Андрей: — Я не был ни первым, ни последним.
Максим: — Я не был последним.
Игорь: — Я был первым.
Коля: — Я был последним.

Известно, что три мальчика ответили честно и только один соврал. Кто из мальчиков соврал?

Ответ: Игорь соврал.

Решение. Если Игорь и Коля сказали правду, то они заняли первое и последнее место, поэтому Андрей и Максим не могут занять эти места, значит они тоже сказали правду и никто не соврал, что невозможно. Значит, соврал либо Игорь, либо Коля. Если соврал Коля, то последним не был ни Коля, ни Игорь, ни Максим, ни Андрей, что невозможно. Значит, соврал Игорь.

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x!+y!=24z+2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x,y,z). (Напомним, что $1!=1$, $2!=1\cdot 2$, $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$)

Ответ: $(1;4;-83),(4;1;-83),(1;5;-79),(5;1;-79)$.

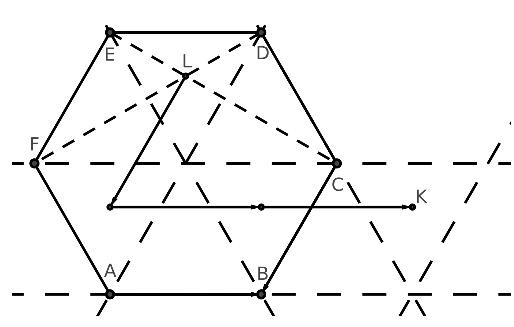
Решение. Выражение $x!+y!$ должно быть нечетным числом, поэтому $x=1$ или $y=1$.

Пусть $x=1$, тогда $1+y!=24z+2017$ или $y!=24z+2016$. Так как $2016=24\cdot 84$, то $y!$ делится на 24, отсюда $y\geqslant 4$. Если же $y\geqslant 6$, то $y!$ делится на 48 и $2016=48\cdot 42$. В этом случае z будет четным, что противоречит условию задачи. Значит, $y=4$ или 5.

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC.

Ответ: $\sqrt{3}$, точка лежит вне шестиугольника.

Решение. Пусть O — центр шестиугольника. Известно, что тогда $FEDO$ — ромб, откуда $FD\perp EO$. Аналогично, $EC\perp DO$. Следовательно, точка L является центром правильного треугольника DEO.
Далее, поскольку $3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AB}$, точка K также является центром правильного треугольника, положение которого смотри на рисунке. Значит, точка K лежит вне шестиугольника и KC равняется радиусу описанной окружности правильного треугольника со стороной 3, откуда и следует ответ.



Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+2-4xy &= 0 \\ y+z+2-4yz &= 0 \\ z+x+2-4zx &= 0 \end{cases}.$$

Ответ: $(1,1,1)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Заметим, что $x \neq \frac{1}{4}$: иначе, подставляя в первое уравнение, получаем $\frac{1}{4}+2=0$, что неверно. Поэтому, из первого и третьего уравнения получаем $y=-\frac{x+2}{1-4x}$, $z=-\frac{x+2}{1-4x}$, откуда $y=z$. Аналогично, $x=y$. Следовательно, $x=y=z$.

Подставляя полученное равенство в первое уравнение, получаем $2x+2-4x^2=0$, или $2x^2-x-1=0$, откуда $x=1$ или $x=-\frac{1}{2}$, откуда и следует ответ.

Задача 6. Сравните числа $\dfrac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$ и $\dfrac{\sin 2018^\circ}{\sin 2019^\circ}$.

Ответ: Второе выражение больше.

Решение. Заметим, что $1800^\circ = 5\cdot 360^\circ$, поэтому нам достаточно сравнить числа $\frac{\sin 216^\circ}{\sin 217^\circ}$ и $\frac{\sin 218^\circ}{\sin 219^\circ}$. Заметим, что числа $\sin 217^\circ$ и $\sin 219^\circ$ одного знака, поэтому мы можем умножить оба числа на положительное число $\sin 217^\circ \cdot \sin 219^\circ$.

Осталось сравнить числа

$$\sin 216^\circ \cdot \sin 219^\circ = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos(219^\circ-216^\circ)-\cos(219^\circ+216^\circ)\right) = \frac{1}{2}(\cos 3^\circ - \cos 435^\circ)$$

и $\sin 218^\circ \cdot \sin 217^\circ = \frac{1}{2}(\cos 1^\circ - \cos 435^\circ)$. Или, после преобразований, $\cos 3^\circ$ и $\cos 1^\circ$. Поскольку на промежутке $[0, 90^\circ]$ косинус убывает, получаем, $\cos 3^\circ < \cos 1^\circ$, т.е. второе выражение исходно было больше.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен 45°. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

Ответ: $10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ см.

Решение. Поскольку O — центр описанной окружности — лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, то точка D также лежит на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, $AD = BD$, откуда $\angle DAB = \angle DBA = \alpha$.

В силу симметричности равнобедренной трапеции, $\angle BDC = \angle BAC = 45^\circ$, а также $\angle CDA = \angle BAD = \alpha$. Значит, $\angle ADB = \angle CDA - \angle BDC = \alpha - 45^\circ$. Из суммы углов треугольника BAD имеем: $\alpha+\alpha+(\alpha-45^\circ)=180^\circ$, т.е $\alpha = 75^\circ$.

Наконец, если обозначить середину отрезка AB через M, то из прямоугольного треугольника AMD имеем $AD = \frac{AM}{\cos 75^\circ} = \frac{AB}{2\cos 75^\circ}$. Далее,

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

т.е. $AD = \frac{AB(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$, откуда и следует ответ.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|}\log_{1/3}(x^2-2x+4) + 2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}(2|x-a|+3) = 0$$

имеет ровно три решения?

Ответ: При $a = \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Решение. Приведём выражение к более удобному виду:

$$4^{|x-a|}\log_{1/3}(x^2-2x+4) + 2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}(2|x-a|+3) = 0$$

$$2^{2|x-a|}\left(-\log_3(x^2-2x+4)\right)+2^{x^2-2x}2\log_3(2|x-a|+3)=0$$
$$2^{2|x-a|+3}\left(-\log_3(x^2-2x+4)\right)+2^{x^2-2x+4}\log_3(2|x-a|+3)=0$$
$$\frac{2^{2|x-a|+3}}{\log_3(2|x-a|+3)}+\frac{2^{x^2-2x+4}}{(-\log_3(x^2-2x+4))}=0$$

Обозначим $2|x-a|+3$ через u, x^2-2x+4 через v. Заметим, что $u\geqslant 3, v\geqslant 3$. Исследуем поведение функции $f(z)=\frac{2^z}{\log_3 z}$ при $z\geqslant 3$, а именно, покажем, что она монотонна на этом луче. Для этого достаточно показать, что её производная знакопостоянна на нём.

$$f'(z)=\frac{(\ln 2)\,2^z\log_3 z-2^z\frac{1}{\ln 3}\frac{1}{z}}{(\log_3 z)^2}=\frac{2^z}{(\log_3 z)^2}\cdot\left((\ln 2)\log_3 z-\frac{1}{(\ln 3)\,z}\right)$$

Покажем, что $\left((\ln 2)\log_3 z-\frac{1}{(\ln 3)z}\right)>0$ при $z\geqslant 3$. Действительно, $(\ln 2)\log_3 z\geqslant \ln 2\log_3 3=\ln 2>\frac{\ln 2}{\ln 4}=\log_4 2=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{(\ln 3)z}$. Значит, $f'(z)>0$ при $z\geqslant 3$.

Функция f монотонна и $f(u)=f(v)$, следовательно $u=v$, то есть $2|x-a|+3=x^2-2x+4$, то есть $2|x-a|=(x-1)^2$. Нарисовав графики функций $g(x)=2|x-a|$ и $h(x)=(x-1)^2$, легко понять, что чтобы было ровно три решения, необходимо либо, чтобы у них совпадали вершины, либо происходило касание. Первое происходит при $a=1$, второе при $a=1\pm\frac{1}{2}$.

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 20 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Ответ: 90 игр.

Решение. Будем рассматривать несыгранные игры. Условие означает, что несыгранные игры не образуют треугольников. Докажем индукцией по k, что для $2k$ команд наибольшее число несыгранных игр не больше k^2.

База индукции: $k=1$ (оценка очевидна).

Шаг индукции: Пусть доказано для k, докажем для $k+1$. Если несыгранных игр нет, то всё доказано. Иначе выделим произвольные команды A и B, не игравшие между собой. Заметим, что несыгранных игр с участием команд A или B не более $2k$ (не считая игры между A и B), так как для любой команды C сыграна хотя бы одна из игр AC и BC. Теперь рассмотрим все команды, кроме A и B и применим предположение индукции — среди них не сыграно не более k^2 игр. Отсюда общее количество несыгранных игр не более $k^2+(2k+1)=(k+1)^2$, что и требовалось доказать.

Подставляя $k=10$ получаем, что число несыгранных игр не более 100, а число всех возможных игр $\frac{20\cdot 19}{2}=190$, откуда число сыгранных игр не менее $190-100=90$.

Оценка достигается, если разбить команды на две равные группы, в каждой из которых провести все матчи, а между группами не проводить ни одного.

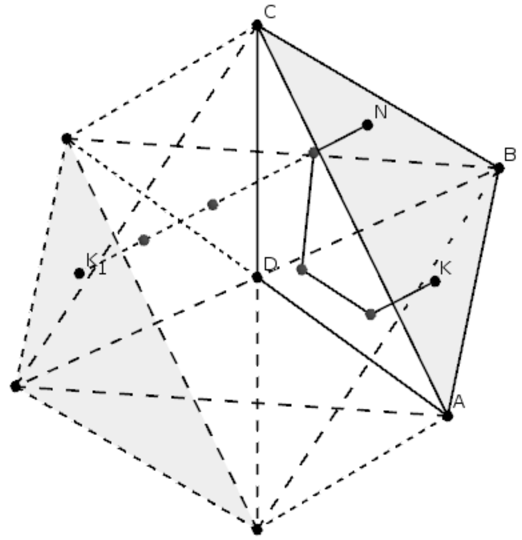
Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA=DB=2$, $DC=5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

Ответ: $\frac{10\sqrt{6}}{9}$.

Решение. Обозначим через N точку, из которой испускается луч, через K — точку на основании пирамиды, в которую попадёт луч в конце.

Будем последовательно «выпрямлять» путь луча следующим образом: если в какой-то момент луч должен отразиться от некоторой плоскости, будем считать, что он продолжает свой путь, но в «зеркальной» копии пирамиды. Заметим также, что в силу перпендикулярности рёбер DA, DB и DC плоскости (ABD), (BCD) и (CAD) при симметрии относительно друг друга остаются на месте. Поэтому, результатом нашего «выпрямления» будет отрезок NK_1, где K_1 — точка, полученная из K после последовательных отражений относительно плоскостей (ABD), (BCD) и (CAD) в некотором порядке. Длина отрезка NK_1 при этом как раз равняется суммарной длине, пройденной лучом.

Введём координаты: D — центр координат, DA, DB и DC — направления осей. Тогда симметрия относительно каждой из указанных плоскостей меняет знак ровно одной из координат точки. Следовательно, точка K_1 получается из точки K изменением знаков всех координат, т.е. симметрией относительно точки D. Следовательно, точка K_1 лежит на образе плоскости ABC при симметрии относительно точки D.



Длина любого такого отрезка не превосходит расстояния между этими плоскостями. Несложно видеть, что это расстояние равняется удвоенному расстоянию от точки D до плоскости ABC. Дальше рассуждать можно разными способами, приведём только один из них.

Расстояние от точки D до плоскости ABC равняется высоте пирамиды h, опущенной из точки D. Объём пирамиды $ABCD$ тогда равен, с одной стороны, $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}h$, а с другой — $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot DA \cdot DB \cdot DC = \frac{10}{3}$. Осталось найти S_{ABC}. Это также можно сделать несколькими способами.

Например: по теореме Пифагора $CA = CB = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$, $AB = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, в равнобедренном треугольнике ACB легко вычисляется $\cos\angle CAB = \frac{AB/2}{AC} = \sqrt{\frac{2}{29}}$, откуда $\sin\angle CAB = \sqrt{\frac{27}{29}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$, и

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin\angle CAB = 3\sqrt{6}.$$

Следовательно, $h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{10}{3\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{9}$, откуда и следует, что длина пути любого луча не меньше $\frac{10\sqrt{6}}{9}$.

Осталось привести пример, при котором найденная нами длина достигается. Для этого достаточно предъявить точку на плоскости ABC, перпендикуляр из которой попадает внутрь треугольника, симметричного ABC относительно точки D.

Действительно, тогда координаты точки K_1 будут отрицательны, поэтому перпендикуляр пересечёт все координатные плоскости. В качестве точки N подойдёт, например, почти любая точка из окрестности основания перпендикуляра из точки D на плоскость (ABC). Почти любая, т.к. нам необходимо, чтобы перпендикуляр NK_1 не проходил через координатные оси.

Комментарий. Любознательный читатель может обратить внимание, что ситуация, описанная в задаче, взята из жизни — речь идёт про уголковый отражатель, он же катафот.

Вариант II

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{8+10}{12}+\frac{14+16}{18}+\ldots+\frac{32+34}{36}.$$

Ответ: $\frac{171}{20}$.

Решение.

$$\frac{8+10}{12}+\frac{14+16}{18}+\ldots+\frac{32+34}{36}=\frac{4+5}{6}+\frac{7+8}{9}+\ldots+\frac{16+17}{18}=$$

$$=\frac{(6-2)+(6-1)}{6}+\frac{(9-2)+(9-1)}{9}+\ldots+\frac{(18-2)+(18-1)}{18}=2+\frac{-3}{6}+2+\frac{-3}{9}+\ldots+2+\frac{-3}{18}=$$

$$=2\times 5-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{6}\right)=10-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=$$

$$=10-1-\frac{9}{20}=\frac{171}{20}\left(=8\frac{11}{20}\right).$$

Задача 2. Миша, Антон, Катя и Наташа устроили турнир по настольному теннису. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

Миша: — Я не был ни первым, ни последним.

Антон: — Я не был последним.

Катя: — Я была первой.

Наташа: — Я была последней.

Известно, что кто-то один из ребят соврал, а трое сказали правду. Кто занял третье место, если известно, что это был мальчик?

Ответ: Третье место занял Миша.

Решение. Выясним сначала, кто из ребят соврал. Если Катя и Наташа сказали правду, то они заняли первое и последнее место, поэтому Миша и Антон не могут занять эти места, значит они тоже сказали правду и никто не соврал, что невозможно. Значит, соврала либо Катя, либо Наташа. Если соврала Наташа, то последним не был никто из ребят, что невозможно. Значит, соврала Катя. Отсюда видно, что первое место занял Антон, последнее Наташа, а второе и третье Миша с Катей. Вспоминая, что третье место занял мальчик, получаем, что это был Миша.

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x!+y!=48z+2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x,y,z). (Напомним, что $1!=1$, $2!=1\cdot 2$, $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$)

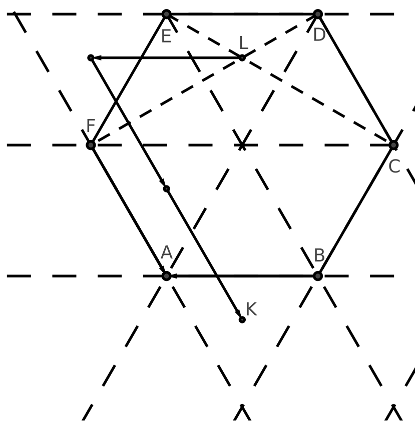
Ответ: $(1;6;-27),(6;1;-27),(1;7;63),(7;1;63)$.

Решение. Выражение $x!+y!$ должно быть нечетным числом, поэтому $x=1$ или $y=1$.

Пусть $x=1$, тогда $1+y!=48z+2017$ или $y!=48z+2016$. Так как $2016=48\cdot 42$, то $y!$ делится на 48, отсюда $y\geqslant 6$. Если же $y\geqslant 8$, то $y!$ делится на 96 и $2016=96\cdot 21$. В этом случае z будет четным, что противоречит условию задачи. Значит, $y=6$ или 7.

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 4. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK}=3\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FB}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KA.

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.



Решение. Пусть O — центр шестиугольника. Известно, что тогда $FEDO$ — ромб, откуда $FD \perp EO$. Аналогично, $EC \perp DO$. Следовательно, точка L является центром правильного треугольника DEO.
Далее, поскольку $3\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{FA}$, точка K также является центром правильного треугольника, положение которого смотри на рисунке. Значит, точка K лежит вне шестиугольника и KA равняется радиусу описанной окружности правильного треугольника со стороной 4, откуда и следует ответ.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2+4xy &=& 0 \\ y+z+2+4yz &=& 0 \\ z+x+2+4zx &=& 0 \end{array}\right. .$$

Ответ: Решений нет.

Решение. Заметим, что $x \neq -\frac{1}{4}$: иначе, подставляя в первое уравнение, получаем $-\frac{1}{4}+2=0$, что неверно. Поэтому, из первого и третьего уравнения получаем $y = -\frac{x+2}{1+4x}$, $z = -\frac{x+2}{1+4x}$, откуда $y = z$. Аналогично, $x = y$. Следовательно, $x = y = z$.

Подставляя полученное равенство в первое уравнение, получаем $2x+2+4x^2=0$, или $2x^2+x+1=0$. Дискиминант этого уравнения равен $1-8<0$, т.е. система не имеет решений.

Задача 6. Сравните числа $\dfrac{\cos 2014^\circ}{\cos 2015^\circ}$ и $\dfrac{\cos 2016^\circ}{\cos 2017^\circ}$.

Ответ: Второе выражение больше.

Решение. Заметим, что $1800^\circ = 5 \cdot 360^\circ$, поэтому нам достаточно сравнить числа $\frac{\cos 214^\circ}{\cos 215^\circ}$ и $\frac{\cos 216^\circ}{\cos 217^\circ}$. Заметим, что числа $\cos 215^\circ$ и $\cos 217^\circ$ одного знака, поэтому мы можем умножить оба числа на положительное число $\cos 215^\circ \cdot \cos 217^\circ$.

Осталось сравнить числа

$$\cos 214^\circ \cdot \cos 217^\circ = \frac{1}{2} \cdot \big(\cos(217^\circ - 214^\circ) + \cos(217^\circ + 214^\circ)\big) = \frac{1}{2}(\cos 3^\circ + \cos 431^\circ)$$

и $\cos 216^\circ \cdot \cos 215^\circ = \frac{1}{2}(\cos 1^\circ + \cos 431^\circ)$. Или, после преобразований, $\cos 3^\circ$ и $\cos 1^\circ$. Поскольку на промежутке $[0, 90^\circ]$ косинус убывает, получаем, $\cos 3^\circ < \cos 1^\circ$, т.е. второе выражение исходно было больше.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен 45°. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

Ответ: $10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ см.

Решение. Поскольку O — центр описанной окружности — лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, то точка D также лежит на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, $AD = BD$, откуда $\angle DAB = \angle DBA = \alpha$.

В силу симметричности равнобедренной трапеции, $\angle BDC = \angle BAC = 45^\circ$, а также $\angle CDA = \angle BAD = \alpha$. Значит, $\angle ADB = \angle CDA - \angle BDC = \alpha - 45^\circ$. Из суммы углов треугольника BAD имеем: $\alpha + \alpha + (\alpha - 45^\circ) = 180^\circ$, т.е $\alpha = 75^\circ$.

Наконец, если обозначить середину отрезка AB через M, то из прямоугольного треугольника AMD имеем $AD = \frac{AM}{\cos 75^\circ} = \frac{AB}{2\cos 75^\circ}$. Далее,

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

т.е. $AD = \frac{AB(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$, откуда и следует ответ.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$8^{|x-a|}\log_{1/5}(x^2+2x+5)+2^{x^2+2x}\log_{\sqrt{5}}(3\,|x-a|+4)=0$$

имеет ровно три решения?

Ответ: При $a=-\frac{7}{4},-1,-\frac{1}{4}$.

Решение. Приведём выражение к более удобному виду:

$$8^{|x-a|}\log_{1/5}(x^2+2x+5)+2^{x^2+2x}\log_{\sqrt{5}}(3\,|x-a|+4)=0$$

$$2^{3|x-a|}\left(-\log_5(x^2+2x+5)\right)+2^{x^2+2x}2\log_5(3\,|x-a|+4)=0$$

$$2^{3|x-a|+4}\left(-\log_5(x^2+2x+5)\right)+2^{x^2+2x+5}\log_5(3\,|x-a|+4)=0$$

$$\frac{2^{3|x-a|+4}}{\log_5(3\,|x-a|+4)}+\frac{2^{x^2+2x+5}}{(-\log_5(x^2+2x+5))}=0$$

Обозначим $3\,|x-a|+4$ через u, x^2+2x+5 через v. Заметим, что $u\geqslant 4, v\geqslant 4$. Исследуем поведение функции $f(z)=\frac{2^z}{\log_5 z}$ при $z\geqslant 4$, а именно, покажем, что она монотонна на этом луче. Для этого достаточно показать, что её производная знакопостоянна на нём.

$$f'(z)=\frac{(\ln 2)\,2^z\log_5 z-2^z\frac{1}{\ln 5}\frac{1}{z}}{(\log_5 z)^2}=\frac{2^z}{(\log_5 z)^2}\cdot\left((\ln 2)\log_5 z-\frac{1}{(\ln 5)\,z}\right)$$

Покажем, что $\left((\ln 2)\log_5 z-\frac{1}{(\ln 5)z}\right)>0$ при $z\geqslant 4$. Действительно, $(\ln 2)\log_5 z\geqslant \ln 2\log_5 4=\frac{\ln 2\cdot\ln 4}{\ln 5}>\frac{\ln 2}{\ln 8}=\log_8 2=\frac{1}{3}>\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{(\ln 5)z}$. Значит, $f'(z)>0$ при $z\geqslant 4$.

Функция f монотонна и $f(u)=f(v)$, следовательно $u=v$, то есть $3\,|x-a|+4=x^2+2x+5$, то есть $3\,|x-a|=(x+1)^2$. Нарисовав графики функций $g(x)=3\,|x-a|$ и $h(x)=(x+1)^2$, легко понять, что чтобы было ровно три решения, необходимо либо, чтобы у них совпадали вершины, либо происходило касание. Первое происходит при $a=-1$, второе при $a=-1\pm\frac{3}{4}$.

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 16 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Ответ: 56 игр.

Решение. Будем рассматривать несыгранные игры. Условие означает, что не найдётся трёх команд, которые вообще не играли друг с другом. Докажем индукцией по k, что для $2k$ команд наибольшее число несыгранных игр не больше k^2.

База индукции: $k=1$ (оценка очевидна).

Шаг индукции: Пусть доказано для k, докажем для $k+1$. Если несыгранных игр нет, то всё доказано. Иначе выделим произвольные команды A и B, не игравшие между собой. Заметим, что несыгранных игр с участием команд A или B не более $2k$ (не считая игры между A и B), так как для любой команды C сыграна хотя бы одна из игр AC и BC. Теперь рассмотрим все команды, кроме A и B и применим предположение индукции — среди них не сыграно не более k^2 игр. Отсюда общее количество несыгранных игр не более $k^2+(2k+1)=(k+1)^2$, что и требовалось доказать.

Подставляя $k=8$ получаем, что число несыгранных игр не более 64, а число всех возможных игр $\frac{16\cdot 15}{2}=120$, откуда число сыгранных игр не менее $120-64=56$.

Оценка достигается, если разбить команды на две равные группы, в каждой из которых провести все матчи, а между группами не проводить ни одного.

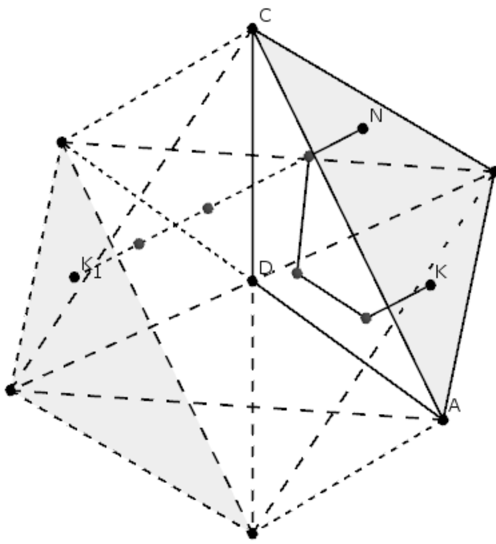
Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA=DB=2$, $DC=5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

Ответ: $\frac{10\sqrt{6}}{9}$.

Решение. Обозначим через N точку, из которой испускается луч, через K — точку на основании пирамиды, в которую попадёт луч в конце.

Будем последовательно «выпрямлять» путь луча следующим образом: если в какой-то момент луч должен отразиться от некоторой плоскости, будем считать, что он продолжает свой путь, но в «зеркальной» копии пирамиды. Заметим также, что в силу перпендикулярности рёбер DA, DB и DC плоскости (ABD), (BCD) и (CAD) при симметрии относительно друг друга остаются на месте. Поэтому, результатом нашего «выпрямления» будет отрезок NK_1, где K_1 — точка, полученная из K после последовательных отражений относительно плоскостей (ABD), (BCD) и (CAD) в некотором порядке. Длина отрезка NK_1 при этом как раз равняется суммарной длине, пройденной лучом.

Введём координаты: D — центр координат, DA, DB и DC — направления осей. Тогда симметрия относительно каждой из указанных плоскостей меняет знак ровно одной из координат точки. Следовательно, точка K_1 получается из точки K изменением знаков всех координат, т.е. симметрией относительно точки D. Следовательно, точка K_1 лежит на образе плоскости ABC при симметрии относительно точки D.



Длина любого такого отрезка не превосходит расстояния между этими плоскостями. Несложно видеть, что это расстояние равняется удвоенному расстоянию от точки D до плоскости ABC. Дальше рассуждать можно разными способами, приведём только один из них.

Расстояние от точки D до плоскости ABC равняется высоте пирамиды h, опущенной из точки D. Объём пирамиды $ABCD$ тогда равен, с одной стороны, $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}h$, а с другой — $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot DA \cdot DB \cdot DC = \frac{10}{3}$. Осталось найти S_{ABC}. Это также можно сделать несколькими способами.

Например: по теореме Пифагора $CA = CB = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$, $AB = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, в равнобедренном треугольнике ACB легко вычисляется $\cos\angle CAB = \frac{AB/2}{AC} = \sqrt{\frac{2}{29}}$, откуда $\sin\angle CAB = \sqrt{\frac{27}{29}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$, и

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin\angle CAB = 3\sqrt{6}.$$

Следовательно, $h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{10}{3\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{9}$, откуда и следует, что длина пути любого луча не меньше $\frac{10\sqrt{6}}{9}$.

Осталось привести пример, при котором найденная нами длина достигается. Для этого достаточно предъявить точку на плоскости ABC, перпендикуляр из которой попадает внутрь треугольника, симметричного ABC относительно точки D.

Действительно, тогда координаты точки K_1 будут отрицательны, поэтому перпендикуляр пересечёт все координатные плоскости. В качестве точки N подойдёт, например, почти любая точка из окрестности основания перпендикуляра из точки D на плоскость (ABC). Почти любая, т.к. нам необходимо, чтобы перпендикуляр NK_1 не проходил через координатные оси.

Комментарий. Любознательный читатель может обратить внимание, что ситуация, описанная в задаче, взята из жизни — речь идёт про уголковый отражатель, он же катафот.

Вариант III

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{4+8}{12}+\frac{16+20}{24}+\ldots+\frac{64+68}{72}.$$

Ответ: $\frac{191}{20}$.

Решение.

$$\frac{4+8}{12}+\frac{16+20}{24}+\ldots+\frac{64+68}{72}=\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\ldots+\frac{16+17}{18}=$$
$$=\frac{(3-2)+(3-1)}{3}+\frac{(6-2)+(6-1)}{6}+\ldots+\frac{(18-2)+(18-1)}{18}=$$
$$=2+\frac{-3}{3}+2+\frac{-3}{6}+2+\frac{-3}{9}+\ldots+2+\frac{-3}{18}=2\times 6-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{6}\right)=$$
$$=11-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=11-1-\frac{9}{20}=\frac{191}{20}\left(=9\frac{11}{20}\right).$$

Задача 2. Анна, Вера, Катя и Наташа соревновались в прыжках в длину. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:
Анна: — Я не была ни первой, ни последней.
Вера: — Я не была последней.
Катя: — Я была первой.
Наташа: — Я была последней.

Известно, что одна из девочек соврала, а трое сказали правду. Кто из девочек занял первое место?

Ответ: Первое место заняла Вера.

Решение. Если Катя и Наташа сказали правду, то они заняли первое и последнее место, поэтому Анна и Вера не могут занять эти места, значит они тоже сказали правду и никто не соврал, что невозможно. Значит, соврала либо Катя, либо Наташа. Если соврала Наташа, то последним не мог быть никто, что невозможно. Значит, соврала Катя. Тогда первое место заняла не Анна, не Катя и не Наташа, то есть Вера.

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x!+y!=8z+2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x,y,z). (Напомним, что $1!=1$, $2!=1\cdot 2$, $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$)

Ответ: $(1;4;-249),(4;1;-249),(1;5;-237),(5;1;-237)$.

Решение. Выражение $x!+y!$ должно быть нечетным числом, поэтому $x=1$ или $y=1$.

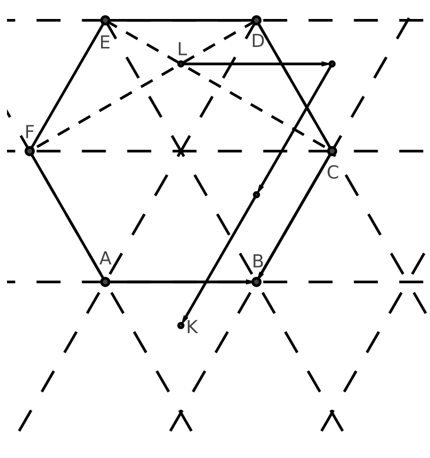
Пусть $x=1$, тогда $1+y!=8z+2017$ или $y!=8z+2016$. Так как $2016=8\cdot 252$, то $y!$ делится на 8, отсюда $y\geqslant 4$. Если же $y\geqslant 6$, то $y!$ делится на 16 и $2016=16\cdot 126$. В этом случае z будет четным, что противоречит условию задачи. Значит, $y=4$ или 5.

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 2. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KB.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Пусть O — центр шестиугольника. Известно, что тогда $FEDO$ — ромб, откуда $FD\perp EO$. Аналогично, $EC\perp DO$. Следовательно, точка L является центром правильного треугольника DEO.

Далее, поскольку $\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}$, точка K также является центром правильного треугольника, положение которого смотри на рисунке. Значит, точка K лежит вне шестиугольника и KB равняется радиусу описанной окружности правильного треугольника со стороной 2, откуда и следует ответ.



Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-2-4xy &= 0 \\ y+z-2-4yz &= 0 \\ z+x-2-4zx &= 0 \end{cases}.$$

Ответ: Решений нет.

Решение. Заметим, что $x \neq \frac{1}{4}$: иначе, подставляя в первое уравнение, получаем $\frac{1}{4}-2=0$, что неверно. Поэтому, из первого и третьего уравнения получаем $y=-\frac{x-2}{1-4x}$, $z=-\frac{x-2}{1-4x}$, откуда $y=z$. Аналогично, $x=y$. Следовательно, $x=y=z$.

Подставляя полученное равенство в первое уравнение, получаем $2x-2-4x^2=0$, или $2x^2-x+1=0$. Дискиминант этого уравнения равен $1-8<0$, т.е. система не имеет решений.

Задача 6. Сравните числа $\dfrac{\sin 2014^\circ}{\sin 2015^\circ}$ и $\dfrac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$.

Ответ: Второе выражение больше.

Решение. Заметим, что $1800^\circ = 5\cdot 360^\circ$, поэтому нам достаточно сравнить числа $\frac{\sin 214^\circ}{\sin 215^\circ}$ и $\frac{\sin 216^\circ}{\sin 217^\circ}$. Заметим, что числа $\sin 215^\circ$ и $\sin 217^\circ$ одного знака, поэтому мы можем умножить оба числа на положительное число $\sin 215^\circ \cdot \sin 217^\circ$.

Осталось сравнить числа

$$\sin 214^\circ \cdot \sin 217^\circ = \frac{1}{2}\cdot\big(\cos(217^\circ-214^\circ)-\cos(217^\circ+214^\circ)\big) = \frac{1}{2}(\cos 3^\circ - \cos 431^\circ)$$

и $\sin 216^\circ \cdot \sin 215^\circ = \frac{1}{2}(\cos 1^\circ - \cos 431^\circ)$. Или, после преобразований, $\cos 3^\circ$ и $\cos 1^\circ$. Поскольку на промежутке $[0, 90^\circ]$ косинус убывает, получаем, $\cos 3^\circ < \cos 1^\circ$, т.е. второе выражение исходно было больше.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ боковая сторона равна 40 см, угол BAC равен 45°. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что точка O лежит на прямой, соединяющей точку D и середину стороны AB. Найдите длину основания AD трапеции.

Ответ: $20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ см.

Решение. Поскольку O — центр описанной окружности — лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, то точка D также лежит на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, $AD = BD$, откуда $\angle DAB = \angle DBA = \alpha$.

В силу симметричности равнобедренной трапеции, $\angle BDC = \angle BAC = 45^\circ$, а также $\angle CDA = \angle BAD = \alpha$. Значит, $\angle ADB = \angle CDA - \angle BDC = \alpha - 45^\circ$. Из суммы углов треугольника BAD имеем: $\alpha+\alpha+(\alpha-45^\circ)=180^\circ$, т.е $\alpha = 75^\circ$.

Наконец, если обозначить середину отрезка AB через M, то из прямоугольного треугольника AMD имеем $AD = \frac{AM}{\cos 75^\circ} = \frac{AB}{2\cos 75^\circ}$. Далее,

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

т.е. $AD = \frac{AB(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$, откуда и следует ответ.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|}\log_{1/3}(x^2-2x+4) + 2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}(2\,|x-a|+3) = 0$$

имеет ровно три решения?

Ответ: При $a = \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Решение. Приведём выражение к более удобному виду:

$$4^{|x-a|}\log_{1/3}(x^2-2x+4) + 2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}(2\,|x-a|+3) = 0$$

$$2^{2|x-a|}\left(-\log_3(x^2-2x+4)\right)+2^{x^2-2x}2\log_3(2\,|x-a|+3)=0$$
$$2^{2|x-a|+3}\left(-\log_3(x^2-2x+4)\right)+2^{x^2-2x+4}\log_3(2\,|x-a|+3)=0$$
$$\frac{2^{2|x-a|+3}}{\log_3(2\,|x-a|+3)}+\frac{2^{x^2-2x+4}}{(-\log_3(x^2-2x+4))}=0$$

Обозначим $2\,|x-a|+3$ через u, x^2-2x+4 через v. Заметим, что $u\geqslant 3, v\geqslant 3$. Исследуем поведение функции $f(z)=\frac{2^z}{\log_3 z}$ при $z\geqslant 3$, а именно, покажем, что она монотонна на этом луче. Для этого достаточно показать, что её производная знакопостоянна на нём.

$$f'(z)=\frac{(\ln 2)\,2^z\log_3 z-2^z\frac{1}{\ln 3}\frac{1}{z}}{(\log_3 z)^2}=\frac{2^z}{(\log_3 z)^2}\cdot\left((\ln 2)\log_3 z-\frac{1}{(\ln 3)\,z}\right)$$

Покажем, что $\left((\ln 2)\log_3 z-\frac{1}{(\ln 3)z}\right)>0$ при $z\geqslant 3$. Действительно, $(\ln 2)\log_3 z\geqslant \ln 2\log_3 3=\ln 2>\frac{\ln 2}{\ln 4}=\log_4 2=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{(\ln 3)z}$. Значит, $f'(z)>0$ при $z\geqslant 3$.

Функция f монотонна и $f(u)=f(v)$, следовательно $u=v$, то есть $2\,|x-a|+3=x^2-2x+4$, то есть $2\,|x-a|=(x-1)^2$. Нарисовав графики функций $g(x)=2\,|x-a|$ и $h(x)=(x-1)^2$, легко понять, что чтобы было ровно три решения, необходимо либо, чтобы у них совпадали вершины, либо происходило касание. Первое происходит при $a=1$, второе при $a=1\pm\frac{1}{2}$.

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 16 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Ответ: 56 игр.

Решение. Будем рассматривать несыгранные игры. Условие означает, что не найдётся трёх команд, которые вообще не играли друг с другом. Докажем индукцией по k, что для $2k$ команд наибольшее число несыгранных игр не больше k^2.

База индукции: $k=1$ (оценка очевидна).

Шаг индукции: Пусть доказано для k, докажем для $k+1$. Если несыгранных игр нет, то всё доказано. Иначе выделим произвольные команды A и B, не игравшие между собой. Заметим, что несыгранных игр с участием команд A или B не более $2k$ (не считая игры между A и B), так как для любой команды C сыграна хотя бы одна из игр AC и BC. Теперь рассмотрим все команды, кроме A и B и применим предположение индукции — среди них не сыграно не более k^2 игр. Отсюда общее количество несыгранных игр не более $k^2+(2k+1)=(k+1)^2$, что и требовалось доказать.

Подставляя $k=8$ получаем, что число несыгранных игр не более 64, а число всех возможных игр $\frac{16\cdot 15}{2}=120$, откуда число сыгранных игр не менее $120-64=56$.

Оценка достигается, если разбить команды на две равные группы, в каждой из которых провести все матчи, а между группами не проводить ни одного.

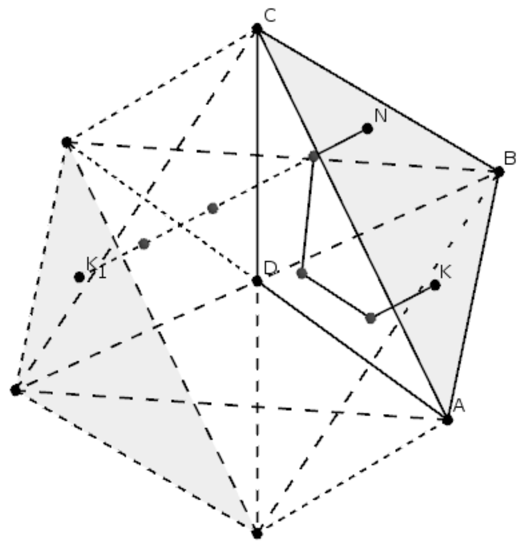
Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA=DB=5$, $DC=1$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{9}$.

Решение. Обозначим через N точку, из которой испускается луч, через K — точку на основании пирамиды, в которую попадёт луч в конце.

Будем последовательно «выпрямлять» путь луча следующим образом: если в какой-то момент луч должен отразиться от некоторой плоскости, будем считать, что он продолжает свой путь, но в «зеркальной» копии пирамиды. Заметим также, что в силу перпендикулярности рёбер DA, DB и DC плоскости (ABD), (BCD) и (CAD) при симметрии относительно друг друга остаются на месте. Поэтому, результатом нашего «выпрямления» будет отрезок NK_1, где K_1 — точка, полученная из K после последовательных отражений относительно плоскостей (ABD), (BCD) и (CAD) в некотором порядке. Длина отрезка NK_1 при этом как раз равняется суммарной длине, пройденной лучом.

Введём координаты: D — центр координат, DA, DB и DC — направления осей. Тогда симметрия относительно каждой из указанных плоскостей меняет знак ровно одной из координат точки. Следовательно, точка K_1 получается из точки K изменением знаков всех координат, т.е. симметрией относительно точки D. Следовательно, точка K_1 лежит на образе плоскости ABC при симметрии относительно точки D.



Длина любого такого отрезка не превосходит расстояния между этими плоскостями. Несложно видеть, что это расстояние равняется удвоенному расстоянию от точки D до плоскости ABC. Дальше рассуждать можно разными способами, приведём только один из них.

Расстояние от точки D до плоскости ABC равняется высоте пирамиды h, опущенной из точки D. Объём пирамиды $ABCD$ тогда равен, с одной стороны, $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}h$, а с другой — $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot DA \cdot DB \cdot DC = \frac{25}{6}$. Осталось найти S_{ABC}. Это также можно сделать несколькими способами.

Например: по теореме Пифагора $CA = CB = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$, $AB = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$, в равнобедренном треугольнике ACB легко вычисляется $\cos\angle CAB = \frac{AB/2}{AC} = \sqrt{\frac{25}{52}}$, откуда $\sin\angle CAB = \sqrt{\frac{27}{52}}$, и

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin\angle CAB = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{25}{15\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$, откуда и следует, что длина пути любого луча не меньше $\frac{10\sqrt{3}}{9}$.

Осталось привести пример, при котором найденная нами длина достигается. Для этого достаточно предъявить точку на плоскости ABC, перпендикуляр из которой попадает внутрь треугольника, симметричного ABC относительно точки D.

Действительно, тогда координаты точки K_1 будут отрицательны, поэтому перпендикуляр пересечёт все координатные плоскости. В качестве точки N подойдёт, например, почти любая точка из окрестности основания перпендикуляра из точки D на плоскость (ABC). Почти любая, т.к. нам необходимо, чтобы перпендикуляр NK_1 не проходил через координатные оси.

Комментарий. Любознательный читатель может обратить внимание, что ситуация, описанная в задаче, взята из жизни — речь идёт про уголковый отражатель, он же катафот.

Вариант IV

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{5+10}{15}+\frac{20+25}{30}+\ldots+\frac{80+85}{90}.$$

Ответ: $\frac{191}{20}$.

Решение.

$$\frac{5+10}{15}+\frac{20+25}{30}+\ldots+\frac{80+85}{90}=\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\ldots+\frac{16+17}{18}=$$
$$=\frac{(3-2)+(3-1)}{3}+\frac{(6-2)+(6-1)}{6}+\ldots+\frac{(18-2)+(18-1)}{18}=$$
$$=2+\frac{-3}{3}+2+\frac{-3}{6}+2+\frac{-3}{9}+\ldots+2+\frac{-3}{18}=2\times 6-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{6}\right)=$$
$$=11-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=11-1-\frac{9}{20}=\frac{191}{20}\left(=9\frac{11}{20}\right).$$

Задача 2. Миша, Антон, Петя и Федя соревновались в упражнениях на брусьях. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:
Миша: — Я не был ни первым, ни последним.
Антон: — Я не был последним.
Петя: — Я был первым.
Федя: — Я был последним.

Известно, что один из мальчиков соврал, а трое сказали правду. Кто из мальчиков занял последнее место?

Ответ: Последнее место занял Федя.

Решение. Предположим, что Федя соврал. Тогда последнее место не может занять никто из ребят, что невозможно. Значит, Федя сказал правду и был последним.

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x!+y!=16z+2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x,y,z). (Напомним, что $1!=1$, $2!=1\cdot 2$, $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$)

Ответ: $(1;6;-81),(6;1;-81),(1;7;189),(7;1;189)$.

Решение. Выражение $x!+y!$ должно быть нечетным числом, поэтому $x=1$ или $y=1$.

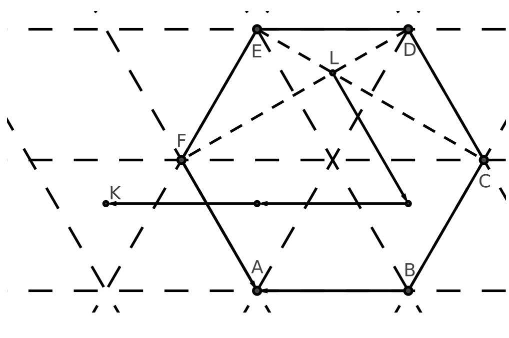
Пусть $x=1$, тогда $1+y!=16z+2017$ или $y!=16z+2016$. Так как $2016=16\cdot 126$, то $y!$ делится на 16, отсюда $y\geqslant 6$. Если же $y\geqslant 8$, то $y!$ делится на 32 и $2016=32\cdot 63$. В этом случае z будет четным, что противоречит условию задачи. Значит, $y=6$ или 7.

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 5. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{FB}-3\overrightarrow{AB}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KF.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Пусть O — центр шестиугольника. Известно, что тогда $FEDO$ — ромб, откуда $FD\perp EO$. Аналогично, $EC\perp DO$. Следовательно, точка L является центром правильного треугольника DEO.

Далее, поскольку $\overrightarrow{FB}-3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{BA}$, точка K также является центром правильного треугольника, положение которого смотри на рисунке. Значит, точка K лежит вне шестиугольника и KF равняется радиусу описанной окружности правильного треугольника со стороной 5, откуда и следует ответ.



Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 2 + 4xy &= 0 \\ y + z - 2 + 4yz &= 0 \\ z + x - 2 + 4zx &= 0 \end{cases}.$$

Ответ: $(-1, -1, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Решение. Заметим, что $x \neq -\frac{1}{4}$: иначе, подставляя в первое уравнение, получаем $-\frac{1}{4} - 2 = 0$, что неверно. Поэтому, из первого и третьего уравнения получаем $y = -\frac{x-2}{1+4x}$, $z = -\frac{x-2}{1+4x}$, откуда $y = z$. Аналогично, $x = y$. Следовательно, $x = y = z$.

Подставляя полученное равенство в первое уравнение, получаем $2x-2+4x^2 = 0$, или $2x^2+x-1 = 0$, откуда $x = -1$ или $x = \frac{1}{2}$, откуда и следует ответ.

Задача 6. Сравните числа $\dfrac{\cos 2016°}{\cos 2017°}$ и $\dfrac{\cos 2018°}{\cos 2019°}$.

Ответ: Второе выражение больше.

Решение. Заметим, что $1800° = 5 \cdot 360°$, поэтому нам достаточно сравнить числа $\frac{\cos 216°}{\cos 217°}$ и $\frac{\cos 218°}{\cos 219°}$. Заметим, что числа $\cos 217°$ и $\cos 219°$ одного знака, поэтому мы можем умножить оба числа на положительное число $\cos 217° \cdot \cos 219°$.

Осталось сравнить числа

$$\cos 216° \cdot \cos 219° = \frac{1}{2} \cdot \big(\cos(219° - 216°) + \cos(219° + 216°)\big) = \frac{1}{2}(\cos 3° + \cos 435°)$$

и $\cos 218° \cdot \cos 217° = \frac{1}{2}(\cos 1° + \cos 435°)$. Или, после преобразований, $\cos 3°$ и $\cos 1°$. Поскольку на промежутке $[0, 90°]$ косинус убывает, получаем, $\cos 3° < \cos 1°$, т.е. второе выражение исходно было больше.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 40 см, угол BAC равен $45°$. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что точка O лежит на прямой, соединяющей точку D и середину стороны AB. Найдите длину основания AD трапеции.

Ответ: $20(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ см.

Решение. Поскольку O — центр описанной окружности — лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, то точка D также лежит на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, $AD = BD$, откуда $\angle DAB = \angle DBA = \alpha$.

В силу симметричности равнобедренной трапеции, $\angle BDC = \angle BAC = 45°$, а также $\angle CDA = \angle BAD = \alpha$. Значит, $\angle ADB = \angle CDA - \angle BDC = \alpha - 45°$. Из суммы углов треугольника BAD имеем: $\alpha + \alpha + (\alpha - 45°) = 180°$, т.е $\alpha = 75°$.

Наконец, если обозначить середину отрезка AB через M, то из прямоугольного треугольника AMD имеем $AD = \frac{AM}{\cos 75°} = \frac{AB}{2\cos 75°}$. Далее,

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}},$$

т.е. $AD = \frac{AB(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$, откуда и следует ответ.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$8^{|x-a|} \log_{1/5}(x^2 + 2x + 5) + 2^{x^2+2x} \log_{\sqrt{5}}(3\,|x - a| + 4) = 0$$

имеет ровно три решения?

Ответ: При $a = -\frac{7}{4}, -1, -\frac{1}{4}$.

Решение. Приведём выражение к более удобному виду:

$$8^{|x-a|} \log_{1/5}(x^2 + 2x + 5) + 2^{x^2+2x} \log_{\sqrt{5}}(3\,|x - a| + 4) = 0$$

$$2^{3|x-a|}\left(-\log_5(x^2+2x+5)\right)+2^{x^2+2x}2\log_5(3|x-a|+4)=0$$

$$2^{3|x-a|+4}\left(-\log_5(x^2+2x+5)\right)+2^{x^2+2x+5}\log_5(3|x-a|+4)=0$$

$$\frac{2^{3|x-a|+4}}{\log_5(3|x-a|+4)}+\frac{2^{x^2+2x+5}}{(-\log_5(x^2+2x+5))}=0$$

Обозначим $3|x-a|+4$ через u, x^2+2x+5 через v. Заметим, что $u\geqslant 4, v\geqslant 4$. Исследуем поведение функции $f(z)=\frac{2^z}{\log_5 z}$ при $z\geqslant 4$, а именно, покажем, что она монотонна на этом луче. Для этого достаточно показать, что её производная знакопостоянна на нём.

$$f'(z)=\frac{(\ln 2)\,2^z\log_5 z-2^z\frac{1}{\ln 5}\frac{1}{z}}{(\log_5 z)^2}=\frac{2^z}{(\log_5 z)^2}\cdot\left((\ln 2)\log_5 z-\frac{1}{(\ln 5)\,z}\right)$$

Покажем, что $\left((\ln 2)\log_5 z-\frac{1}{(\ln 5)z}\right)>0$ при $z\geqslant 4$. Действительно, $(\ln 2)\log_5 z\geqslant \ln 2\log_5 4=\frac{\ln 2\cdot\ln 4}{\ln 5}>\frac{\ln 2}{\ln 8}=\log_8 2=\frac{1}{3}>\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{(\ln 5)z}$. Значит, $f'(z)>0$ при $z\geqslant 4$.

Функция f монотонна и $f(u)=f(v)$, следовательно $u=v$, то есть $3|x-a|+4=x^2+2x+5$, то есть $3|x-a|=(x+1)^2$. Нарисовав графики функций $g(x)=3|x-a|$ и $h(x)=(x+1)^2$, легко понять, что чтобы было ровно три решения, необходимо либо, чтобы у них совпадали вершины, либо происходило касание. Первое происходит при $a=-1$, второе при $a=-1\pm\frac{3}{4}$.

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 20 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Ответ: 90 игр.

Решение. Будем рассматривать несыгранные игры. Условие означает, что не найдётся трёх команд, которые вообще не играли друг с другом. Докажем индукцией по k, что для $2k$ команд наибольшее число несыгранных игр не больше k^2.

База индукции: $k=1$ (оценка очевидна).

Шаг индукции: Пусть доказано для k, докажем для $k+1$. Если несыгранных игр нет, то всё доказано. Иначе выделим произвольные команды A и B, не игравшие между собой. Заметим, что несыгранных игр с участием команд A или B не более $2k$ (не считая игры между A и B), так как для любой команды C сыграна хотя бы одна из игр AC и BC. Теперь рассмотрим все команды, кроме A и B и применим предположение индукции — среди них не сыграно не более k^2 игр. Отсюда общее количество несыгранных игр не более $k^2+(2k+1)=(k+1)^2$, что и требовалось доказать.

Подставляя $k=10$ получаем, что число несыгранных игр не более 100, а число всех возможных игр $\frac{20\cdot 19}{2}=190$, откуда число сыгранных игр не менее $190-100=90$.

Оценка достигается, если разбить команды на две равные группы, в каждой из которых провести все матчи, а между группами не проводить ни одного.

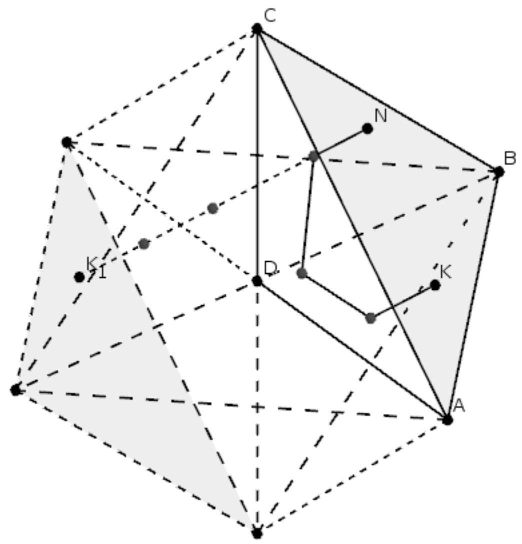
Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA=DB=5$, $DC=1$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{9}$.

Решение. Обозначим через N точку, из которой испускается луч, через K — точку на основании пирамиды, в которую попадёт луч в конце.

Будем последовательно «выпрямлять» путь луча следующим образом: если в какой-то момент луч должен отразиться от некоторой плоскости, будем считать, что он продолжает свой путь, но в «зеркальной» копии пирамиды. Заметим также, что в силу перпендикулярности рёбер DA, DB и DC плоскости (ABD), (BCD) и (CAD) при симметрии относительно друг друга остаются на месте. Поэтому, результатом нашего «выпрямления» будет отрезок NK_1, где K_1 — точка, полученная из K после последовательных отражений относительно плоскостей (ABD), (BCD) и (CAD) в некотором порядке. Длина отрезка NK_1 при этом как раз равняется суммарной длине, пройденной лучом.

Введём координаты: D — центр координат, DA, DB и DC — направления осей. Тогда симметрия относительно каждой из указанных плоскостей меняет знак ровно одной из координат точки. Следовательно, точка K_1 получается из точки K изменением знаков всех координат, т.е. симметрией относительно точки D. Следовательно, точка K_1 лежит на образе плоскости ABC при симметрии относительно точки D.



Длина любого такого отрезка не превосходит расстояния между этими плоскостями. Несложно видеть, что это расстояние равняется удвоенному расстоянию от точки D до плоскости ABC. Дальше рассуждать можно разными способами, приведём только один из них.

Расстояние от точки D до плоскости ABC равняется высоте пирамиды h, опущенной из точки D. Объём пирамиды $ABCD$ тогда равен, с одной стороны, $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}h$, а с другой — $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot DA \cdot DB \cdot DC = \frac{25}{6}$. Осталось найти S_{ABC}. Это также можно сделать несколькими способами.

Например: по теореме Пифагора $CA = CB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$, $AB = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$, в равнобедренном треугольнике ACB легко вычисляется $\cos\angle CAB = \frac{AB/2}{AC} = \sqrt{\frac{25}{52}}$, откуда $\sin\angle CAB = \sqrt{\frac{27}{52}}$, и

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin\angle CAB = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{25}{15\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$, откуда и следует, что длина пути любого луча не меньше $\frac{10\sqrt{3}}{9}$.

Осталось привести пример, при котором найденная нами длина достигается. Для этого достаточно предъявить точку на плоскости ABC, перпендикуляр из которой попадает внутрь треугольника, симметричного ABC относительно точки D.

Действительно, тогда координаты точки K_1 будут отрицательны, поэтому перпендикуляр пересечёт все координатные плоскости. В качестве точки N подойдёт, например, почти любая точка из окрестности основания перпендикуляра из точки D на плоскость (ABC). Почти любая, т.к. нам необходимо, чтобы перпендикуляр NK_1 не проходил через координатные оси.

Комментарий. Любознательный читатель может обратить внимание, что ситуация, описанная в задаче, взята из жизни — речь идёт про уголковый отражатель, он же катафот.