Объединенная межвузовская математическая олимпиада **05.02.2017**

I вариант

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{12+15}{18}+\frac{21+24}{27}+\ldots+\frac{48+51}{54}.$$

Задача 2. Андрей, Максим, Игорь и Коля соревновались в велогонке. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:
Андрей: — Я не был ни первым, ни последним.
Максим: — Я не был последним.
Игорь: — Я был первым.
Коля: — Я был последним.

Известно, что три мальчика ответили честно и только один соврал. Кто из мальчиков соврал?

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x!+y! = 24z+2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z). (Напомним, что $1! = 1$, $2! = 1\cdot 2$, $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$)

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2-4xy & = & 0 \\ y+z+2-4yz & = & 0 \\ z+x+2-4zx & = & 0 \end{array}\right. .$$

Задача 6. Сравните числа $\dfrac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$ и $\dfrac{\sin 2018^\circ}{\sin 2019^\circ}$.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен 45°. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|}\log_{1/3}(x^2-2x+4)+2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}(2\,|x-a|+3)=0$$

имеет ровно три решения?

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 20 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **05.02.2017**

II вариант

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{8+10}{12}+\frac{14+16}{18}+\ldots+\frac{32+34}{36}.$$

Задача 2. Миша, Антон, Катя и Наташа устроили турнир по настольному теннису. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:
Миша: — Я не был ни первым, ни последним.
Антон: — Я не был последним.
Катя: — Я была первой.
Наташа: — Я была последней.

Известно, что кто-то один из ребят соврал, а трое сказали правду. Кто занял третье место, если известно, что это был мальчик?

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x!+y! = 48z+2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z). (Напомним, что $1! = 1$, $2! = 1\cdot 2$, $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$)

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 4. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FB}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KA.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+2+4xy &= 0\\ y+z+2+4yz &= 0\\ z+x+2+4zx &= 0\end{cases}.$$

Задача 6. Сравните числа $\dfrac{\cos 2014^\circ}{\cos 2015^\circ}$ и $\dfrac{\cos 2016^\circ}{\cos 2017^\circ}$.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен 45°. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$8^{|x-a|}\log_{1/5}(x^2+2x+5)+2^{x^2+2x}\log_{\sqrt{5}}(3\,|x-a|+4)=0$$

имеет ровно три решения?

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 16 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **05.02.2017**

III вариант

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{4+8}{12}+\frac{16+20}{24}+\ldots+\frac{64+68}{72}.$$

Задача 2. Анна, Вера, Катя и Наташа соревновались в прыжках в длину. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:
Анна: — Я не была ни первой, ни последней.
Вера: — Я не была последней.
Катя: — Я была первой.
Наташа: — Я была последней.

Известно, что одна из девочек соврала, а трое сказали правду. Кто из девочек занял первое место?

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x!+y! = 8z+2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z). (Напомним, что $1! = 1$, $2! = 1\cdot 2$, $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$)

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 2. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KB.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y-2-4xy & = & 0\\ y+z-2-4yz & = & 0\\ z+x-2-4zx & = & 0\end{array}\right. .$$

Задача 6. Сравните числа $\dfrac{\sin 2014^\circ}{\sin 2015^\circ}$ и $\dfrac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 40 см, угол BAC равен 45°. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что точка O лежит на прямой, соединяющей точку D и середину стороны AB. Найдите длину основания AD трапеции.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|}\log_{1/3}(x^2-2x+4)+2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}(2\,|x-a|+3)=0$$

имеет ровно три решения?

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 16 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 5$, $DC = 1$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **05.02.2017**

IV вариант

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{5+10}{15}+\frac{20+25}{30}+\ldots+\frac{80+85}{90}.$$

Задача 2. Миша, Антон, Петя и Федя соревновались в упражнениях на брусьях. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:
Миша: — Я не был ни первым, ни последним.
Антон: — Я не был последним.
Петя: — Я был первым.
Федя: — Я был последним.

Известно, что один из мальчиков соврал, а трое сказали правду. Кто из мальчиков занял последнее место?

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x!+y! = 16z+2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z). (Напомним, что $1! = 1$, $2! = 1\cdot 2$, $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$)

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 5. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{FB}-3\overrightarrow{AB}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KF.

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-2+4xy &= 0\\ y+z-2+4yz &= 0\\ z+x-2+4zx &= 0\end{cases}.$$

Задача 6. Сравните числа $\dfrac{\cos 2016^\circ}{\cos 2017^\circ}$ и $\dfrac{\cos 2018^\circ}{\cos 2019^\circ}$.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 40 см, угол BAC равен 45°. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что точка O лежит на прямой, соединяющей точку D и середину стороны AB. Найдите длину основания AD трапеции.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$8^{|x-a|}\log_{1/5}(x^2+2x+5)+2^{x^2+2x}\log_{\sqrt{5}}(3\,|x-a|+4)=0$$

имеет ровно три решения?

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 20 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 5$, $DC = 1$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?