

I вариант

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{12 + 15}{18} + \frac{21 + 24}{27} + \dots + \frac{48 + 51}{54}.$$

Задача 2. Андрей, Максим, Игорь и Коля соревновались в велогонке. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

Андрей: — Я не был ни первым, ни последним.

Максим: — Я не был последним.

Игорь: — Я был первым.

Коля: — Я был последним.

Известно, что три мальчика ответили честно и только один соврал. Кто из мальчиков соврал?

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x! + y! = 24z + 2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z) . (Напомним, что $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC .

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2 - 4xy = 0 \\ y + z + 2 - 4yz = 0 \\ z + x + 2 - 4zx = 0 \end{cases}.$$

Задача 6. Сравните числа $\frac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$ и $\frac{\sin 2018^\circ}{\sin 2019^\circ}$.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен 45° . Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|} \log_{1/3}(x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x} \log_{\sqrt{3}}(2|x-a| + 3) = 0$$

имеет ровно три решения?

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 20 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

II вариант

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{8+10}{12} + \frac{14+16}{18} + \dots + \frac{32+34}{36}.$$

Задача 2. Миша, Антон, Катя и Наташа устроили турнир по настольному теннису. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

Миша: — Я не был ни первым, ни последним.

Антон: — Я не был последним.

Катя: — Я была первой.

Наташа: — Я была последней.

Известно, что кто-то один из ребят соврал, а трое сказали правду. Кто занял третье место, если известно, что это был мальчик?

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x! + y! = 48z + 2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z) . (Напомним, что $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 4. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FB}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KA .

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2 + 4xy = 0 \\ y + z + 2 + 4yz = 0 \\ z + x + 2 + 4zx = 0 \end{cases}.$$

Задача 6. Сравните числа $\frac{\cos 2014^\circ}{\cos 2015^\circ}$ и $\frac{\cos 2016^\circ}{\cos 2017^\circ}$.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен 45° . Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$8^{|x-a|} \log_{1/5}(x^2 + 2x + 5) + 2^{x^2+2x} \log_{\sqrt{5}}(3|x-a| + 4) = 0$$

имеет ровно три решения?

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 16 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

III вариант

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{4+8}{12} + \frac{16+20}{24} + \dots + \frac{64+68}{72}.$$

Задача 2. Анна, Вера, Катя и Наташа соревновались в прыжках в длину. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

Анна: — Я не была ни первой, ни последней.

Вера: — Я не была последней.

Катя: — Я была первой.

Наташа: — Я была последней.

Известно, что одна из девочек соврала, а трое сказали правду. Кто из девочек занял первое место?

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x! + y! = 8z + 2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z) . (Напомним, что $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 2. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KB .

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 2 - 4xy = 0 \\ y + z - 2 - 4yz = 0 \\ z + x - 2 - 4zx = 0 \end{cases}.$$

Задача 6. Сравните числа $\frac{\sin 2014^\circ}{\sin 2015^\circ}$ и $\frac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 40 см, угол BAC равен 45° . Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что точка O лежит на прямой, соединяющей точку D и середину стороны AB . Найдите длину основания AD трапеции.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|} \log_{1/3}(x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x} \log_{\sqrt{3}}(2|x-a| + 3) = 0$$

имеет ровно три решения?

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 16 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 5$, $DC = 1$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

IV вариант

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{5+10}{15} + \frac{20+25}{30} + \dots + \frac{80+85}{90}.$$

Задача 2. Миша, Антон, Петя и Федя соревновались в упражнениях на брусках. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

Миша: — Я не был ни первым, ни последним.

Антон: — Я не был последним.

Петя: — Я был первым.

Федя: — Я был последним.

Известно, что один из мальчиков соврал, а трое сказали правду. Кто из мальчиков занял последнее место?

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x! + y! = 16z + 2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z) . (Напомним, что $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 5. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{FB} - 3\overrightarrow{AB}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KF .

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 2 + 4xy = 0 \\ y + z - 2 + 4yz = 0 \\ z + x - 2 + 4zx = 0 \end{cases}.$$

Задача 6. Сравните числа $\frac{\cos 2016^\circ}{\cos 2017^\circ}$ и $\frac{\cos 2018^\circ}{\cos 2019^\circ}$.

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 40 см, угол BAC равен 45° . Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что точка O лежит на прямой, соединяющей точку D и середину стороны AB . Найдите длину основания AD трапеции.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$8^{|x-a|} \log_{1/5}(x^2 + 2x + 5) + 2^{x^2+2x} \log_{\sqrt{5}}(3|x-a| + 4) = 0$$

имеет ровно три решения?

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 20 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 5$, $DC = 1$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?