Вариант I

Задача 1. Что больше: 1 или $\dfrac{21}{64}+\dfrac{51}{154}+\dfrac{71}{214}$?

Ответ: Единица больше.

Первое решение.

$$\frac{21}{64}+\frac{51}{154}+\frac{71}{214}<\frac{21}{63}+\frac{51}{153}+\frac{71}{213}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

Второе решение.

$$\begin{aligned}\frac{21}{64}+\frac{51}{154}+\frac{71}{214} &= \frac{21\cdot 154\cdot 214+64\cdot 51\cdot 214+64\cdot 154\cdot 71}{64\cdot 154\cdot 214}= \\ &= \frac{692076+698496+699776}{2109184}=\frac{2090348}{2109184}\left[=\frac{522587}{527296}\right]<1.\end{aligned}$$

Задача 2. В футбольном турнире играли семь команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие тринадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

Ответ: 4.

Решение. Всего командами сыграна $\dfrac{7\cdot 6}{2}=21$ игра, в каждой из которых разыгрывалось 2 или 3 очка. Следовательно, максимальное количество очков, которое суммарно может быть у всех команд это $21\cdot 3=63$. Значит, количество вышедших в следующий этап команд n удовлетворяет неравенству $n\cdot 13\leqslant 63$, откуда $n\leqslant 4$.

С другой стороны, можно привести пример турнирной таблицы, в которой 4 команды отбираются в следующий круг:

	1	2	3	4	5	6	7	Сумма
1	X	0	1	3	3	3	3	13
2	3	X	0	1	3	3	3	13
3	1	3	X	0	3	3	3	13
4	0	1	3	X	3	3	3	13
5	0	0	0	0	X	1	1	2
6	0	0	0	0	1	X	1	2
7	0	0	0	0	1	1	X	2

Задача 3. При каком наименьшем натуральном k выражение $2017\cdot 2018\cdot 2019\cdot 2020+k$ является квадратом натурального числа?

Ответ: 1.

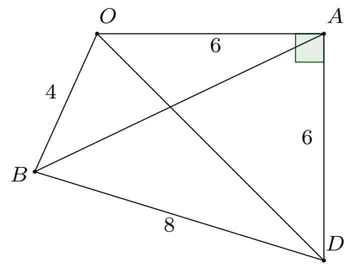
Решение. Докажем, что уже $k=1$ подходит. Пусть $n=2018$, тогда при $k=1$ выражение из условия равняется

$$\begin{aligned}(n-1)n(n+1)(n+2)+1 &= (n-1)(n+2)\cdot n(n+1)+1=(n^2+n-2)(n^2+n)+1= \\ &= \big((n^2+n-1)-1\big)\big((n^2+n-1)+1\big)+1=(n^2+n-1)^2.\end{aligned}$$

Задача 4. Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 6, до вершины B равно 4, до вершины C равно 8. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ: $20+6\sqrt{7}$.

Первое решение. Рассмотрим поворот вокруг точки A на угол $90°$, который переводит точку C в точку B. Пусть при этом повороте точка O переходит в точку D; тогда отрезок BD является образом отрезка CO; поскольку при повороте длина отрезков не меняется, $BD = CO = 8$. Получаем четырёхугольник $OADB$, в котором $OA = AD = 6$, $BD = 8$, $OB = 4$, $\angle OAD = 90°$ (см. чертёж). Дальше можно рассуждать несколькими способами.



Первый способ. Рассмотрим систему координат, в которой точка O имеет координаты $(0,0)$, точка A имеет координаты $(6,0)$, точка D — координаты $(6,-6)$. Найдём координаты точки $B(x,y)$, учитывая, что $OB = 4$ и $DB = 8$, т.е.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ (x-6)^2 + (y+6)^2 = 64 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $12x - 12y - 72 = -48$, откуда $x - y = 2$. Подставляя $x = y + 2$ в первое уравнение, получаем $2y^2 + 4y - 12 = 0$, $y^2 + 2y - 6 = 0$, откуда $y = -1 \pm \sqrt{7}$. Поскольку (см. чертёж) точка B должна лежать по ту же сторону от прямой OA, что и точка D, то $y > 0$, поэтому подходит только корень $y = -1 - \sqrt{7}$, откуда $x = 1 - \sqrt{7}$.

Наконец, $S = \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{(x-6)^2 + y^2}{2} = \dfrac{(1-\sqrt{7}-6)^2 + (1+\sqrt{7})^2}{2} = 20 + 6\sqrt{7}$.

Второй способ. Для начала заметим, что $OD = 6\sqrt{2}$, $\angle ODA = 45°$. Обозначим $\angle ODB = \varphi$. Тогда по теореме косинусов для треугольника ODB имеем

$$\cos\varphi = \frac{OD^2 + BD^2 - OB^2}{2 \cdot OD \cdot BD} = \frac{(6\sqrt{2})^2 + 8^2 - 4^2}{2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 8} = \frac{120}{2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 8} = \frac{5\sqrt{2}}{8},$$

а тогда $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{50}{64}} = \frac{\sqrt{14}}{8}$. Теперь, по теореме косинусов для треугольника ADB, получаем

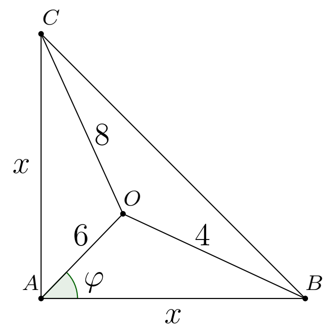
$$S = \frac{AB^2}{2} = \frac{AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos(\varphi + 45°)}{2} = 18 + 32 - 6 \cdot 8 \cdot \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sqrt{2}} = 20 + 6\sqrt{7}.$$

Второе решение. Пусть $AB = AC = x$, $\angle OAB = \varphi$. По теореме косинусов для треугольников OAB и OAC имеем:

$$4^2 = x^2 + 6^2 - 12x\cos\varphi$$
$$8^2 = x^2 + 6^2 - 12x\sin\varphi$$

откуда

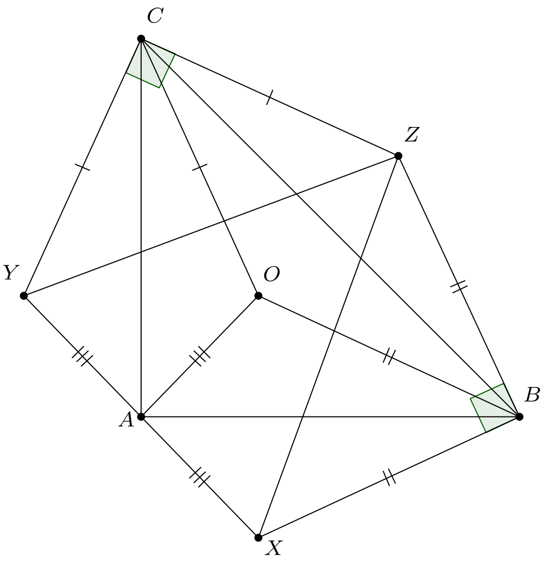
$$12x\cos\varphi = x^2 + 20$$
$$12x\sin\varphi = x^2 - 28$$



Возводя эти неравенства в квадрат, после сложения, получаем квадратное уравнение на x^2: $144x^2 = 2x^4 - 16x^2 + 1184$, $x^4 - 80x^2 + 592 = 0$. Корнями этого уравнения являются

$$x^2_{1,2} = 40 \pm 12\sqrt{7}.$$

Заметим, что $40 - 12\sqrt{7} < 36$, и в этом случае $x < AO$, то есть точка O не будет лежать внутри треугольника, поэтому $S = \frac{x^2}{2} = 20 + 6\sqrt{7}$.



План третьего решения. Отразим точку O симметрично относительно сторон AB, AC и BC треугольника ABC; обозначим образы через X, Y и Z соответственно. (см. рисунок) Тогда $AY = AX = AO$, $CY = CZ = CO$, $BX = BZ = BO$. Простым счётом углов убеждаемся, что $\angle YCZ = 2\angle ACB = 90°$, $\angle XBZ = 2\angle ABC = 90°$, $\angle XAY = 2\angle BAC = 180°$. Площадь пятиугольника $XYCZB$ в два раза больше площади треугольника ABC. С другой стороны, площадь $XYCZB$ складывается из площади двух прямоугольных треугольников YCZ и XBZ, в который нам известен катет, а также треугольника XYZ, у которого нам известны все стороны, поэтому его площадь мы можем найти, например, воспользовавшись формулой Герона.

Задача 5. Обозначим $f(x) = 9x^2 + 8x - 2$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

Ответ: -1, $\dfrac{2}{9}$, $\dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{6}$.

Первое решение. Число x удовлетворяет уравнению $f(f(x)) = x$ тогда и только тогда, когда найдётся такое число y, что выполнена система

$$\begin{cases} 9x^2 + 8x - 2 = y \\ 9y^2 + 8y - 2 = x \end{cases}.$$

Вычитая из первого равенства второе, после преобразований получаем $9(x - y)(x + y + 1) = 0$, откуда или $y = x$, или $y = -x - 1$. Подставим y в первое уравнение системы. В первом случае получим уравнени $9x^2 + 7x - 2 = 0$, откуда $x = -1$ или $x = \dfrac{2}{9}$. Во втором случае получим уравнение $9x^2 + 9x - 1 = 0$, откуда $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{117}}{2 \cdot 9} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{6}$

План второго решения. Честно посчитаем $f(f(x)) - x$:

$(9(9x^2+8x-2)^2+8(9x^2+8x-2)-2)-x = 729x^4+1296x^3+324x^2-225x+18 = 9(81x^4+144x^3+36x^2-25x+2)$,

т.е. исходное уравнение равносильно

$$81x^4 + 144x^3 + 36x^2 - 25x + 2 = 0.$$

Теперь у него можно найти два рациональных корня, пользуясь теоремой о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами: *если p/q, $(p, q) = 1$ — корень многочлена с целыми коэффициентами, то p является делителем свободного члена, а q — старшего коэффицента.* Получаем:

$$81x^4 + 144x^3 + 36x^2 - 25x + 2 = (x + 1)(9x - 2)(9x^2 + 9x - 1),$$

корни же третьей скобки можно найти, используя формулу через дискриминант.

Задача 6. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$3 \arcsin x - 2 \arccos y$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Заметим, что $x^2 + y^2 = 1$ тогда и только тогда, когда существует некоторое $\varphi \in [0; 2\pi]$ такое, что $x = \sin\varphi$, $y = \cos\varphi$. Тогда выражение из условия приобретает вид

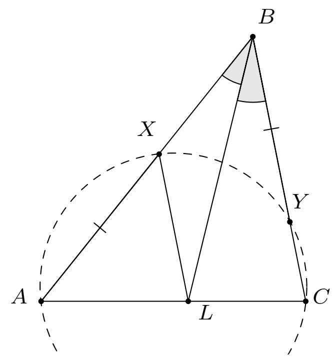
$$3 \arcsin \sin \varphi - 2 \arccos \cos \varphi. \qquad (*)$$

Разберём несколько случаев:

- $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: тогда $\arcsin \sin \varphi = \varphi$, $\arccos \cos \varphi = \varphi$, а
$$3 \arcsin \sin \varphi - 2 \arccos \cos \varphi = 3\varphi - 2\varphi = \varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: тогда $\arcsin \sin \varphi = \pi - \varphi$, $\arccos \cos \varphi = \varphi$, а
$$3 \arcsin \sin \varphi - 2 \arccos \cos \varphi = 3(\pi - \varphi) - 2\varphi = 3\pi - 5\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\varphi \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$: тогда $\arcsin \sin \varphi = \pi - \varphi$, $\arccos \cos \varphi = 2\pi - \varphi$, а
$$3 \arcsin \sin \varphi - 2 \arccos \cos \varphi = 3(\pi - \varphi) - 2(2\pi - \varphi) = -\pi - \varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right]$;
- $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$: тогда $\arcsin \sin \varphi = \varphi - 2\pi$, $\arccos \cos \varphi = 2\pi - \varphi$, а
$$3 \arcsin \sin \varphi - 2 \arccos \cos \varphi = 3(\varphi - 2\pi) - 2(2\pi - \varphi) = -10\pi + 5\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{5\pi}{2}; 0\right]$.

Суммируя всё вышесказанное, получаем, что выражение $(*)$ при $\varphi \in [0; 2\pi]$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Задача 7. Дан треугольник ABC. На отрезках AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = BY$. Оказалось, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC (L на отрезке AC). Докажите, что $XL \parallel BC$.



Решение. Из того, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности, следует, что $BX \cdot BA = BY \cdot BC$, или $AB : BC = BY : BX$. Из того, что BL — биссектриса треугольника ABC следует, что $AL : LC = AB : BC$. Тогда
$$AL : LC = AB : BC = BY : BX = AX : XB,$$
откуда по теореме, обратной теореме Фалеса, получаем, что $XL \parallel BC$, что и требовалось.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение
$$\log_2(2x^2 + (2a+1)x - 2a) - 2\log_4(x^2 + 3ax + 2a^2) = 0$$
имеет два различных корня, сумма квадратов которых больше 4?

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{5}; 1\right)$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде
$$\log_2(2x^2 + (2a+1)x - 2a) = \log_2(x^2 + 3ax + 2a^2).$$

Заметим, что это уравнение эквивалентно системе
$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2 + (2a+1)x - 2a = x^2 + 3ax + 2a^2 \\ x^2 + 3ax + 2a^2 > 0 \end{array}\right.,$$
или
$$\left\{\begin{array}{ll} x^2 - (a-1)x - 2a(a+1) = 0 & (1) \\ (x+a)(x+2a) > 0 & (2) \end{array}\right..$$

По теореме, обратной теореме Виета, корнями уравнения (1) являются числа $x_1 = 2a$ и $x_2 = -a-1$. Поскольку у уравнения должно быть два различных корня, получаем следующие условия:

$$\begin{cases} (2a+a)(2a+2a) > 0 \\ (-a-1+a)(-a-1+2a) > 0 \\ 2a \neq -a-1 \end{cases},$$

то есть $a \neq 0$, $a \neq -\frac{1}{3}$, $a < 1$.

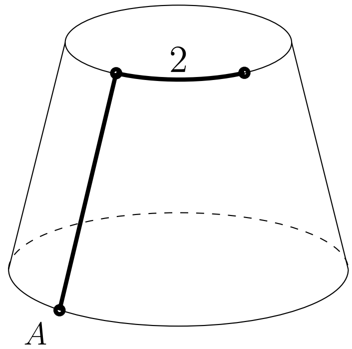
Сумма квадратов x_1 и x_2 должна быть больше 4, то есть $4a^2 + (a+1)^2 > 4$, $5a^2 + 2a - 3 > 0$, откуда $a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{5}; \infty\right)$. Пересекая все четыре полученных условия, получаем ответ.

Задача 9. В школе имеется три кружка: по математике, по физике и по информатике. Директор как-то заметил, что среди участников кружка по математике ровно 1/6 часть ходит ещё и на кружок по физике, а 1/8 часть — на кружок по информатике; среди участников кружка по физике ровно 1/3 часть ходит ещё и на кружок по математике, а ровно 1/5 — на кружок по информатике; наконец, среди участников кружка по информатике ровно 1/7 часть ходит на кружок по математике. А какая часть участников кружка по информатике ходит на кружок по физике?

Ответ: 4/35.

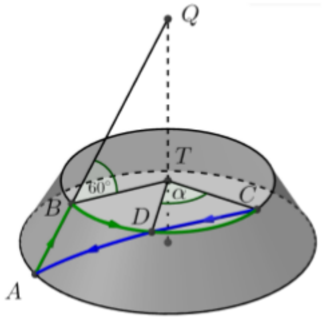
Решение. Пусть участников кружка по информатике x; тогда детей, которые ходят одновременно на кружок по математике и информатике $x/7$; тогда участников кружка по математике $8x/7$, а детей, которые ходят одновременно на кружок по математике и по физике — $4x/21$; тогда участников кружка по физике $4x/7$, а детей, которые ходят одновременно на кружок по информатике и по физике — $4x/35$.

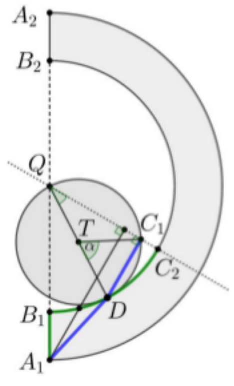
Задача 10. Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 8, а верхнего основания — 6. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A. Турист начинает подъём по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 2 (см. рис). После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?



Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$

Решение. Обозначим (см рисунок слева) вершину конуса буквой Q, центр меньшего основания — T, точку на верхнем основании, ближайшую к A — B, начальную точку обратного маршрута — C. Пусть D — последняя точку обратного маршрута на окружности верхнего основания (возможно, D совпадает с C или B). Угол $\angle DTC$ обозначим за α.





Рассмотрим развёртку боковой поверхности конуса (см рисунок справа), верхнее основание приложим к точке D так, чтобы оно касалось развёртки боковой поверхности. Сохраним обозначения точек, а в случае раздвоения используем индексы (так, к примеру, точки C_1 и C_2 на рисунке справа соответствуют точке C на рисунке слева). Любая дуга окружность верхнего основания переходит в дугу окружности в два раза большего радиуса, поскольку $QB = \frac{TB}{\cos 60^\circ} = 2TB$. Значит, угловая мера будет уменьшаться в два раза. В частности, окружность верхней грани перейдет в полуокружность, т.е. боковая поверхность перейдёт в часть плоскости, ограниченной двумя концентрическими полуокружностями и диаметром, проходящим через их концы, QD будет диаметром верхнего основания.

Угол $\angle DQC_1 = \frac{\angle DTC_1}{2} = \frac{\alpha}{2}$. По сказанному выше, угловые меры дуг $\overset{\frown}{DC_1}$ и $\overset{\frown}{DC_2}$ относятся $2:1$. Это значит, что $\angle DQC_2 = \frac{\angle DTC_1}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Тогда $\angle DQC_1 = \angle DQC_2$, а потому точка C_1 лежит на прямой QC_2. Учитывая, что QD — диаметр, получаем, что C_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую QC_2. Тогда длина маршрута, идущего по верхнему основанию (рисунок слева) из C в D и по боковой поверхности из D в A будет не меньше длины ломаной (рисунок справа) C_1DA_1 и не меньше длины перпендикуляра, опущенного из A_1 на прямую QC_2.

Докажем, что существует маршрут равный длине этого перпендикуляра. Для этого достаточно показать, что проекция точки A_1 лежит на отрезке QC_2, поскольку в этом случае перпендикуляр пересекает полуокружность $B_1C_2B_2$. Точка пересечения дает точку D для кратчайшего маршрута, а перпендикуляр изображает на развертке кратчайший маршрут. Так как путь по краю верхнего основания составляет треть длины окружности верхнего основания, то $\angle B_1QC_2 = 60^\circ$. Тогда отношение QC_2 к QA_1 равно отношению длин окружностей нижнего и верхнего оснований и равно $\frac{3}{4}$, что больше $\cos 60^\circ$. Значит проекция QA_1 на прямую QC_2 меньше длины отрезка QC_2, что и требовалось.

Радиус нижнего основания $R = \frac{8}{2\pi}$. Тогда $QA = \frac{R}{\cos 60^\circ} = \frac{8}{\pi}$. Из прямоугольного треугольника (рисунок 2) длина перпендикуляра равна

$$QA_1 \cdot \sin \angle B_1QC_2 = QA_1 \cdot \sin 60^\circ = QA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}.$$

Вариант II

Задача 1. Что больше: 1 или $\dfrac{27}{80}+\dfrac{46}{137}+\dfrac{63}{188}$?

Ответ: Сумма дробей больше.

Первое решение.

$$\frac{27}{80}+\frac{46}{137}+\frac{63}{188}>\frac{27}{81}+\frac{46}{138}+\frac{63}{189}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

Второе решение.

$$\begin{aligned}\frac{27}{80}+\frac{46}{137}+\frac{63}{188} &= \frac{27\cdot137\cdot188+80\cdot46\cdot188+80\cdot137\cdot63}{80\cdot137\cdot188}=\\ &= \frac{695412+691840+690480}{2060480}=\frac{2077732}{2060480}\left[=\frac{519433}{515120}\right]>1.\end{aligned}$$

Задача 2. В футбольном турнире играли семь команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие двенадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

Ответ: 5.

Решение. Всего командами сыграна $\dfrac{7\cdot6}{2}=21$ игра, в каждой из которых разыгрывалось 2 или 3 очка. Следовательно, максимальное количество очков, которое суммарно может быть у всех команд это $21\cdot3=63$. Значит, количество вышедших в следующий этап команд n удовлетворяет неравенству $n\cdot12\leqslant63$, откуда $n\leqslant5$.

С другой стороны, можно привести пример турнирной таблицы, в которой 5 команд отбираются в следующий круг:

	1	2	3	4	5	6	7	Сумма
1	X	0	0	3	3	3	3	12
2	3	X	0	0	3	3	3	12
3	3	3	X	0	0	3	3	12
4	0	3	3	X	0	3	3	12
5	0	0	3	3	X	3	3	12
6	0	0	0	0	0	X	1	1
7	0	0	0	0	0	1	X	1

Задача 3. При каком наименьшем натуральном k выражение $2019\cdot2020\cdot2021\cdot2022+k$ является квадратом натурального числа?

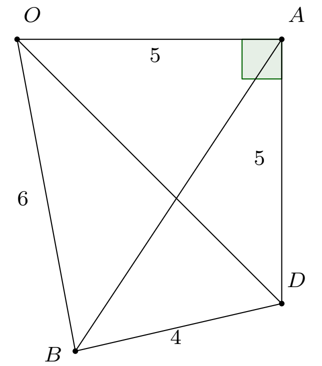
Ответ: 1.

Решение. Докажем, что уже $k=1$ подходит. Пусть $n=2020$, тогда при $k=1$ выражение из условия равняется

$$\begin{aligned}(n-1)n(n+1)(n+2)+1 &= (n-1)(n+2)\cdot n(n+1)+1=(n^2+n-2)(n^2+n)+1=\\ &= \big((n^2+n-1)-1\big)\big((n^2+n-1)+1\big)+1=(n^2+n-1)^2.\end{aligned}$$

Задача 4. Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 5, до вершины B равно 6, до вершины C равно 4. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ: $13+\dfrac{5}{2}\sqrt{23}$.



Первое решение. Рассмотрим поворот вокруг точки A на угол $90°$, который переводит точку C в точку B. Пусть при этом повороте точка O переходит в точку D; тогда отрезок BD является образом отрезка CO; поскольку при повороте длина отрезков не меняется, $BD = CO = 4$. Получаем четырёхугольник $OADB$, в котором $OA = AD = 5$, $BD = 4$, $OB = 6$, $\angle OAD = 90°$ (см. чертёж). Дальше можно рассуждать несколькими способами.

Первый способ. Рассмотрим систему координат, в которой точка O имеет координаты $(0, 0)$, точка A имеет координаты $(5, 0)$, точка D — координаты $(5, -5)$. Найдём координаты точки $B(x, y)$, учитывая, что $OB = 6$ и $DB = 4$, т.е.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ (x-5)^2 + (y+5)^2 = 16 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $10x - 10y - 50 = 20$, откуда $x - y = 7$. Подставляя $x = y + 7$ в первое уравнение, получаем $2y^2 + 14y + 13 = 0$, откуда $y = \frac{-7\pm\sqrt{23}}{2}$, $x = \frac{7\pm\sqrt{23}}{2}$. Поскольку точка B должна лежать по ту же сторону относительно AD, что и точка O, то $y = \frac{-7-\sqrt{23}}{2}$, $x = \frac{7-\sqrt{23}}{2}$.

Наконец, $S = \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{(x-5)^2 + y^2}{2} = \dfrac{((7-\sqrt{23})/2 - 5)^2 + ((7+\sqrt{23})/2)^2}{2} = 13 + \frac{5}{2}\sqrt{23}$.

Второй способ. Для начала заметим, что $OD = 5\sqrt{2}$, $\angle ODA = 45°$. Обозначим $\angle ODB = \varphi$. Тогда по теореме косинусов для треугольника ODB имеем

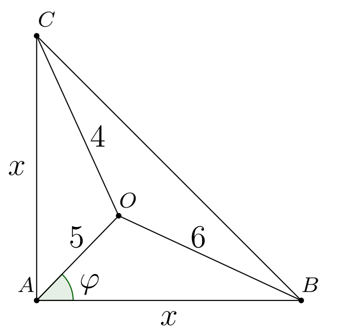
$$\cos\varphi = \frac{OD^2 + BD^2 - OB^2}{2 \cdot OD \cdot BD} = \frac{(5\sqrt{2})^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{30}{2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{3\sqrt{2}}{8},$$

а тогда $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{18}{64}} = \frac{\sqrt{46}}{8}$. Теперь, по теореме косинусов для треугольника ADB, получаем

$$S = \frac{AB^2}{2} = \frac{AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos(\varphi + 45°)}{2} = \frac{25}{2} + 8 - 5 \cdot 4 \cdot \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sqrt{2}} = 13 + \frac{5}{2}\sqrt{23}.$$

Второе решение. Пусть $AB = AC = x$, $\angle OAB = \varphi$. По теореме косинусов для треугольников OAB и OAC имеем:

$$6^2 = x^2 + 5^2 - 10x\cos\varphi$$
$$4^2 = x^2 + 5^2 - 10x\sin\varphi$$



откуда

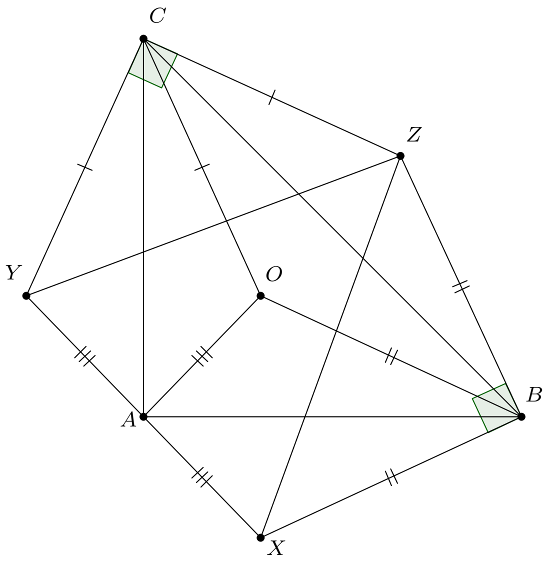
$$10x\cos\varphi = x^2 - 11$$
$$10x\sin\varphi = x^2 + 9$$

Возводя эти неравенства в квадрат, после сложения, получаем квадратное уравнение на x^2: $100x^2 = 2x^4 - 4x^2 + 202$, $x^4 - 52x^2 + 101 = 0$. Корнями этого уравнения являются

$$x^2_{1,2} = 26 \pm 5\sqrt{23}.$$

Заметим, что $26 - 5\sqrt{23} < 25$, и в этом случае $x < AO$, то есть точка O не будет лежать внутри треугольника, поэтому $S = \frac{x^2}{2} = 13 + \frac{5}{2}\sqrt{23}$.

План третьего решения. Отразим точку O симметрично относительно сторон AB, AC и BC треугольника ABC; обозначим образы через X, Y и Z соответственно. (см. рисунок) Тогда $AY = AX = AO$, $CY = CZ = CO$, $BX = BZ = BO$. Простым счётом углов убеждаемся, что $\angle YCZ = 2\angle ACB = 90^\circ$, $\angle XBZ = 2\angle ABC = 90^\circ$, $\angle XAY = 2\angle BAC = 180^\circ$. Площадь пятиугольника $XYCZB$ в два раза больше площади треугольника ABC. С другой стороны, площадь $XYCZB$ складывается из площади двух прямоугольных треугольников YCZ и XBZ, в который нам известен катет, а также треугольника XYZ, у которого нам известны все стороны, поэтому его площадь мы можем найти, например, воспользовавшись формулой Герона.



Задача 5. Обозначим $f(x) = 3x^2 - 7x - 11$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

Ответ: -1, $\dfrac{11}{3}$, $\dfrac{3 \pm 4\sqrt{3}}{3}$.

Первое решение. Число x удовлетворяет уравнению $f(f(x)) = x$ тогда и только тогда, когда найдётся такое число y, что выполнена система

$$\begin{cases} 3x^2 - 7x - 11 = y \\ 3y^2 - 7y - 11 = x \end{cases}.$$

Вычитая из первого равенства второе, после преобразований получаем $3(x-y)(x+y-2) = 0$, откуда или $y = x$, или $y = -x + 2$. Подставим y в первое уравнение системы. В первом случае получим уравнени $3x^2 - 8x - 11 = 0$, откуда $x = -1$ или $x = \dfrac{11}{3}$. Во втором случае получим уравнение $3x^2 - 6x - 13 = 0$, откуда $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{192}}{2 \cdot 3} = \dfrac{3 \pm 4\sqrt{3}}{3}$

План второго решения. Честно посчитаем $f(f(x)) - x$:

$$(3(3x^2-7x-11)^2-7(3x^2-7x-11)-11)-x = 27x^4-126x^3-72x^2+510x+429 = 3(9x^4-42x^3-24x^2+170x+143),$$

т.е. исходное уравнение равносильно

$$9x^4 - 42x^3 - 24x^2 + 170x + 143 = 0.$$

Теперь у него можно найти два рациональных корня, пользуясь теоремой о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами: *если p/q, $(p, q) = 1$ — корень многочлена с целыми коэффициентами, то p является делителем свободного члена, а q — старшего коэффицента.* Получаем:

$$9x^4 - 42x^3 - 24x^2 + 170x + 143 = (x + 1)(3x - 11)(3x^2 - 6x - 13),$$

корни же третьей скобки можно найти, используя формулу через дискриминант.

Задача 6. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$4 \arcsin x - \arccos y$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Заметим, что $x^2 + y^2 = 1$ тогда и только тогда, когда существует некоторое $\varphi \in [0; 2\pi]$ такое, что $x = \sin\varphi$, $y = \cos\varphi$. Тогда выражение из условия приобретает вид

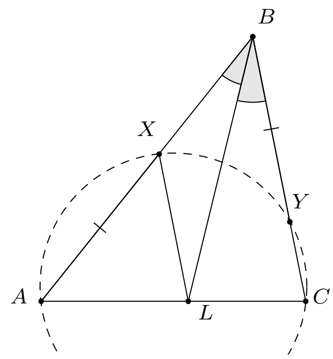
$$4 \arcsin \sin\varphi - \arccos \cos\varphi. \qquad (*)$$

Разберём несколько случаев:

- $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: тогда $\arcsin \sin \varphi = \varphi$, $\arccos \cos \varphi = \varphi$, а
$$4 \arcsin \sin \varphi - \arccos \cos \varphi = 4\varphi - \varphi = 3\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;
- $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: тогда $\arcsin \sin \varphi = \pi - \varphi$, $\arccos \cos \varphi = \varphi$, а
$$4 \arcsin \sin \varphi - \arccos \cos \varphi = 4(\pi - \varphi) - \varphi = 4\pi - 5\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;
- $\varphi \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$: тогда $\arcsin \sin \varphi = \pi - \varphi$, $\arccos \cos \varphi = 2\pi - \varphi$, а
$$4 \arcsin \sin \varphi - \arccos \cos \varphi = 4(\pi - \varphi) - (2\pi - \varphi) = 2\pi - 3\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$;
- $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$: тогда $\arcsin \sin \varphi = \varphi - 2\pi$, $\arccos \cos \varphi = 2\pi - \varphi$, а
$$4 \arcsin \sin \varphi - \arccos \cos \varphi = 4(\varphi - 2\pi) - (2\pi - \varphi) = -10\pi + 5\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{5\pi}{2}; 0\right]$.

Суммируя всё вышесказанное, получаем, что выражение $(*)$ при $\varphi \in [0; 2\pi]$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 7. Дан треугольник ABC. На отрезках AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = BY$. Оказалось, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. Пусть L — такая точка на отрезке AC, что $XL \parallel BC$. Докажите, что BL — биссектриса треугольника ABC.



Решение. Из того, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности, следует, что $BX \cdot BA = BY \cdot BC$, или $AB : BC = BY : BX$. Из того, что $XL \parallel BC$ следует, что $AL : LC = AX : XB$. Тогда
$$AL : LC = AX : X = BY : BX = AB : BC,$$
откуда по теореме о биссектрисе треугольника, получаем, что BL — биссектриса треугольника ABC, что и требовалось.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение
$$2 \log_{16}(2x^2 - x - 2a - 4a^2) - \log_4(x^2 - ax - 2a^2) = 0$$
имеет два различных корня, сумма квадратов которых принадлежит интервалу $(0; 4)$?

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{3}{5}\right)$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде
$$\log_4(2x^2 - x - 2a - 4a^2) = \log_4(x^2 - ax - 2a^2).$$

Заметим, что это уравнение эквивалентно системе
$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - x - 2a - 4a^2 = x^2 - ax - 2a^2 \\ x^2 - ax - 2a^2 > 0 \end{array} \right. ,$$
или
$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2 + (a-1)x - 2a(a+1) = 0 & (1) \\ (x+a)(x-2a) > 0 & (2) \end{array} \right. .$$

По теореме, обратной теореме Виета, корнями уравнения (1) являются числа $x_1 = -2a$ и $x_2 = a+1$. Поскольку у уравнения должно быть два различных корня, получаем следующие условия:

$$\begin{cases} (-2a+a)(-2a-2a) > 0 \\ (a+1+a)(a+1-2a) > 0 \\ -2a \neq a+1 \end{cases},$$

то есть $a \neq 0$, $a \neq -\frac{1}{3}$, $a \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Сумма квадратов x_1 и x_2 должна принадлежать интервалу $(0;4)$, то есть $0 < 4a^2 + (a+1)^2 < 4$,

$$\begin{cases} 5a^2 + 2a + 1 > 0 \\ 5a^2 + 2a - 3 < 0 \end{cases},$$

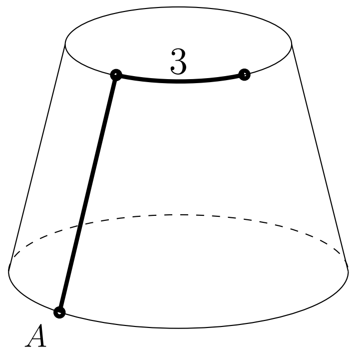
откуда $a \in \mathbb{R}$, $a \in \left(-1; \frac{3}{5}\right)$. Пересекая все пять полученных условий, получаем ответ.

Задача 9. В лагерь приехали школьники, среди которых были Петя, Вася и Тимофей, не знакомые друг с другом, однако у каждого из которых были знакомые среди приехавших детей. Петя заметил, что ровно 1/2 его знакомых знакома с Васей, а ровно 1/7 – с Тимофеем; Вася заметил, что 1/3 его знакомых знакомы с Петей, а 1/6 — с Тимофеем; наконец, Тимофей заметил, что ровно 1/5 его знакомых знакомы с Петей. А какую часть среди знакомых Тимофея составляют знакомые Васи?

Ответ: 7/20.

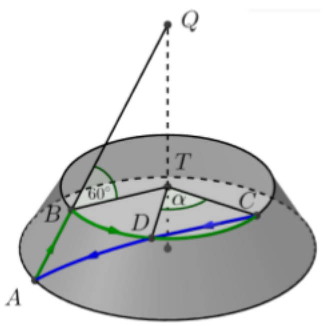
Решение. Пусть знакомых у Тимофея x; тогда общих знакомых Пети и Тимофея $x/5$; знакомых Пети тогда $7x/5$, а общих знакомых Пети и Васи — $7x/10$; знакомых Васи тогда $21x/10$, а общих знакомых Васи и Тимофея тогда — $7x/20$.

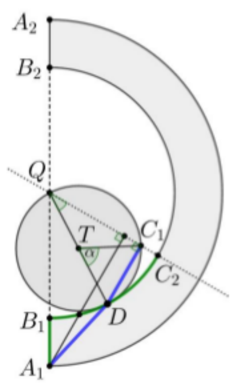
Задача 10. Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 10, а верхнего основания — 9. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A. Турист начинает подъём по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 3 (см. рис). После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?



Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{\pi}$

Решение. Обозначим (см рисунок слева) вершину конуса буквой Q, центр меньшего основания — T, точку на верхнем основании, ближайшую к A — B, начальную точку обратного маршрута — C. Пусть D — последняя точку обратного маршрута на окружности верхнего основания (возможно, D совпадает с C или B). Угол $\angle DTC$ обозначим за α.





Рассмотрим развёртку боковой поверхности конуса (см рисунок справа), верхнее основание приложим к точке D так, чтобы оно касалось развёртки боковой поверхности. Сохраним обозначения точек, а в случае раздвоения используем индексы (так, к примеру, точки C_1 и C_2 на рисунке справа соответствуют точке C на рисунке слева). Любая дуга окружность верхнего основания переходит в дугу окружности в два раза большего радиуса, поскольку $QB = \frac{TB}{\cos 60^\circ} = 2TB$. Значит, угловая мера будет уменьшаться в два раза. В частности, окружность верхней грани перейдет в полуокружность, т.е. боковая поверхность перейдёт в часть плоскости, ограниченной двумя концентрическими полуокружностями и диаметром, проходящим через их концы, QD будет диаметром верхнего основания.

Угол $\angle DQC_1 = \frac{\angle DTC_1}{2} = \frac{\alpha}{2}$. По сказанному выше, угловые меры дуг $\overset{\frown}{DC_1}$ и $\overset{\frown}{DC_2}$ относятся $2:1$. Это значит, что $\angle DQC_2 = \frac{\angle DTC_1}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Тогда $\angle DQC_1 = \angle DQC_2$, а потому точка C_1 лежит на прямой QC_2. Учитывая, что QD — диаметр, получаем, что C_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую QC_2. Тогда длина маршрута, идущего по верхнему основанию (рисунок слева) из C в D и по боковой поверхности из D в A будет не меньше длины ломаной (рисунок справа) C_1DA_1 и не меньше длины перпендикуляра, опущенного из A_1 на прямую QC_2.

Докажем, что существует маршрут равный длине этого перпендикуляра. Для этого достаточно показать, что проекция точки A_1 лежит на отрезке QC_2, поскольку в этом случае перпендикуляр пересекает полуокружность $B_1C_2B_2$. Точка пересечения дает точку D для кратчайшего маршрута, а перпендикуляр изображает на развертке кратчайший маршрут. Так как путь по краю верхнего основания составляет треть длины окружности верхнего основания, то $\angle B_1QC_2 = 60^\circ$. Тогда отношение QC_2 к QA_1 равно отношению длин окружностей нижнего и верхнего оснований и равно $\frac{9}{10}$, что больше $\cos 60^\circ$. Значит проекция QA_1 на прямую QC_2 меньше длины отрезка QC_2, что и требовалось.

Радиус нижнего основания $R = \frac{10}{2\pi}$. Тогда $QA = \frac{R}{\cos 60^\circ} = \frac{10}{\pi}$. Из прямоугольного треугольника (рисунок 2) длина перпендикуляра равна

$$QA_1 \cdot \sin \angle B_1QC_2 = QA_1 \cdot \sin 60^\circ = QA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{\pi}.$$

Вариант III

Задача 1. Что больше: 1 или $\dfrac{23}{93}+\dfrac{41}{165}+\dfrac{71}{143}$?

Ответ: Единица больше.

Первое решение.

$$\frac{23}{93}+\frac{41}{165}+\frac{71}{143}<\frac{23}{92}+\frac{41}{164}+\frac{71}{142}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1.$$

Второе решение.

$$\begin{aligned}\frac{23}{93}+\frac{41}{165}+\frac{71}{143} &= \frac{23\cdot 165\cdot 143+93\cdot 41\cdot 143+93\cdot 165\cdot 71}{93\cdot 165\cdot 143}=\\ &= \frac{542685+545259+1089495}{2194335}=\frac{2177439}{2194335}\left[=\frac{65983}{66495}\right]<1.\end{aligned}$$

Задача 2. В футбольном турнире играли восемь команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие пятнадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

Ответ: 5.

Решение. Всего командами сыграна $\dfrac{8\cdot 7}{2}=28$ игр, в каждой из которых разыгрывалось 2 или 3 очка. Следовательно, максимальное количество очков, которое суммарно может быть у всех команд это $28\cdot 3=84$. Значит, количество вышедших в следующий этап команд n удовлетворяет неравенству $n\cdot 15\leqslant 84$, откуда $n\leqslant 5$.

С другой стороны, можно привести пример турнирной таблицы, в которой 5 команд отбираются в следующий круг:

	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
1	X	0	0	3	3	3	3	3	15
2	3	X	0	0	3	3	3	3	15
3	3	3	X	0	0	3	3	3	15
4	0	3	3	X	0	3	3	3	15
5	0	0	3	3	X	3	3	3	15
6	0	0	0	0	0	X	1	1	2
7	0	0	0	0	0	1	X	1	2
8	0	0	0	0	0	1	1	X	2

Задача 3. При каком наименьшем натуральном k выражение $2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021+k$ является квадратом натурального числа?

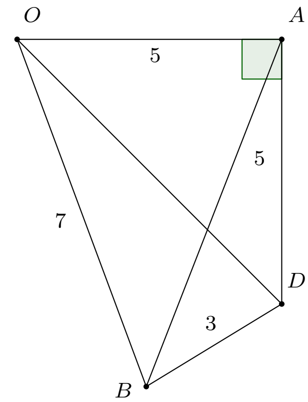
Ответ: 1.

Решение. Докажем, что уже $k=1$ подходит. Пусть $n=2019$, тогда при $k=1$ выражение из условия равняется

$$\begin{aligned}(n-1)n(n+1)(n+2)+1 &= (n-1)(n+2)\cdot n(n+1)+1=(n^2+n-2)(n^2+n)+1=\\ &= \big((n^2+n-1)-1\big)\big((n^2+n-1)+1\big)+1=(n^2+n-1)^2.\end{aligned}$$

Задача 4. Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 5, до вершины B равно 7, до вершины C равно 3. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{29}{2}+\dfrac{5}{2}\sqrt{17}$.



Первое решение. Рассмотрим поворот вокруг точки A на угол $90°$, который переводит точку C в точку B. Пусть при этом повороте точка O переходит в точку D; тогда отрезок BD является образом отрезка CO; поскольку при повороте длина отрезков не меняется, $BD = CO = 3$. Получаем четырёхугольник $OADB$, в котором $OA = AD = 5$, $BD = 3$, $OB = 7$, $\angle OAD = 90°$ (см. чертёж). Дальше можно рассуждать несколькими способами.

Первый способ. Рассмотрим систему координат, в которой точка O имеет координаты $(0,0)$, точка A имеет координаты $(5,0)$, точка D — координаты $(5,-5)$. Найдём координаты точки $B(x,y)$, учитывая, что $OB = 7$ и $DB = 3$, т.е.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ (x-5)^2 + (y+5)^2 = 9 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $10x - 10y - 50 = 40$, откуда $x - y = 9$. Подставляя $x = y + 9$ в первое уравнение, получаем $2y^2 + 18y + 32 = 0$, $y^2 + 9y + 16 = 0$ откуда $y = \frac{-9\pm\sqrt{17}}{2}$, $x = \frac{9\pm\sqrt{17}}{2}$. Поскольку точка B должна лежать по ту же сторону относительно AD, что и точка O, то $y = \frac{-9-\sqrt{17}}{2}$, $x = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$.

Наконец, $S = \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{(x-5)^2 + y^2}{2} = \dfrac{((9-\sqrt{17})/2-5)^2 + ((9+\sqrt{17})/2)^2}{2} = \frac{29}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{17}$.

Второй способ. Для начала заметим, что $OD = 5\sqrt{2}$, $\angle ODA = 45°$. Обозначим $\angle ODB = \varphi$. Тогда по теореме косинусов для треугольника ODB имеем

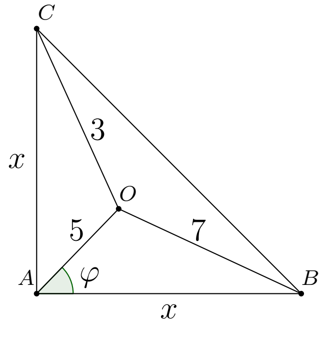
$$\cos\varphi = \frac{OD^2 + BD^2 - OB^2}{2\cdot OD\cdot BD} = \frac{(5\sqrt{2})^2 + 3^2 - 7^2}{2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{10}{2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

а тогда $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{2}{36}} = \frac{\sqrt{34}}{6}$. Теперь, по теореме косинусов для треугольника ADB, получаем

$$S = \frac{AB^2}{2} = \frac{AD^2 + BD^2 - 2\cdot AD\cdot BD\cdot\cos(\varphi + 45°)}{2} = \frac{25}{2} + \frac{9}{2} - 5\cdot 3\cdot\frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sqrt{2}} = \frac{29}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{17}.$$

Второе решение. Пусть $AB = AC = x$, $\angle OAB = \varphi$. По теореме косинусов для треугольников OAB и OAC имеем:

$$7^2 = x^2 + 5^2 - 10x\cos\varphi$$
$$3^2 = x^2 + 5^2 - 10x\sin\varphi$$



откуда

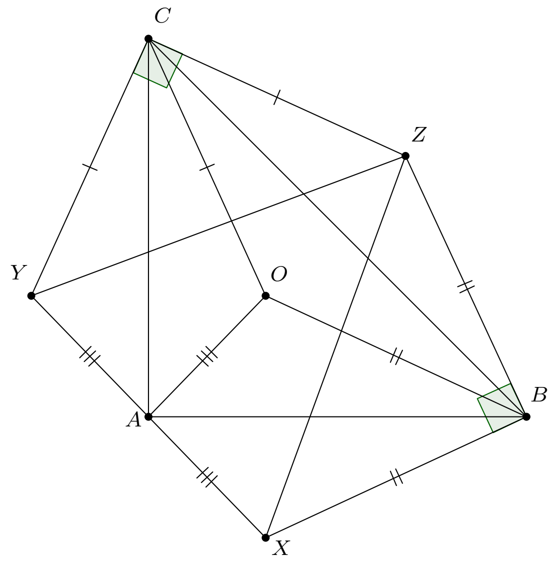
$$10x\cos\varphi = x^2 - 24$$
$$10x\sin\varphi = x^2 + 16$$

Возводя эти неравенства в квадрат, после сложения, получаем квадратное уравнение на x^2: $100x^2 = 2x^4 - 16x^2 + 832$, $x^4 - 58x^2 + 416 = 0$. Корнями этого уравнения являются

$$x_{1,2}^2 = 29 \pm 5\sqrt{17}.$$

Заметим, что $29 - 5\sqrt{17} < 25$, и в этом случае $x < AO$, то есть точка O не будет лежать внутри треугольника, поэтому $S = \frac{x^2}{2} = \frac{29}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{17}$.

План третьего решения. Отразим точку O симметрично относительно сторон AB, AC и BC треугольника ABC; обозначим образы через X, Y и Z соответственно. (см. рисунок) Тогда $AY = AX = AO$, $CY = CZ = CO$, $BX = BZ = BO$. Простым счётом углов убеждаемся, что $\angle YCZ = 2\angle ACB = 90°$, $\angle XBZ = 2\angle ABC = 90°$, $\angle XAY = 2\angle BAC = 180°$. Площадь пятиугольника $XYCZB$ в два раза больше площади треугольника ABC. С другой стороны, площадь $XYCZB$ складывается из площади двух прямоугольных треугольников YCZ и XBZ, в который нам известен катет, а также треугольника XYZ, у которого нам известны все стороны, поэтому его площадь мы можем найти, например, воспользовавшись формулой Герона.



Задача 5. Обозначим $f(x) = 7x^2 + 6x - 2$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

Ответ: $-1,\ \dfrac{2}{7},\ \dfrac{-7 \pm \sqrt{77}}{14}$.

Первое решение. Число x удовлетворяет уравнению $f(f(x)) = x$ тогда и только тогда, когда найдётся такое число y, что выполнена система

$$\begin{cases} 7x^2 + 6x - 2 = y \\ 7y^2 + 6y - 2 = x \end{cases}.$$

Вычитая из первого равенства второе, после преобразований получаем $7(x - y)(x + y + 1) = 0$, откуда или $y = x$, или $y = -x - 1$. Подставим y в первое уравнение системы. В первом случае получим уравнени $7x^2 + 5x - 2 = 0$, откуда $x = -1$ или $x = \dfrac{2}{7}$. Во втором случае получим уравнение $7x^2 + 7x - 1 = 0$, откуда $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{77}}{2 \cdot 7} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{77}}{14}$

План второго решения. Честно посчитаем $f(f(x)) - x$:

$(7(7x^2+6x-2)^2+6(7x^2+6x-2)-2)-x = 343x^4+588x^3+98x^2-133x+14 = 7(49x^4+84x^3+14x^2-19x+2)$,

т.е. исходное уравнение равносильно

$$49x^4 + 84x^3 + 14x^2 - 19x + 2 = 0.$$

Теперь у него можно найти два рациональных корня, пользуясь теоремой о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами: *если p/q, $(p, q) = 1$ — корень многочлена с целыми коэффициентами, то p является делителем свободного члена, а q — старшего коэффицента.* Получаем:

$$49x^4 + 84x^3 + 14x^2 - 19x + 2 = (x + 1)(7x - 2)(7x^2 + 7x - 1),$$

корни же третьей скобки можно найти, используя формулу через дискриминант.

Задача 6. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$2 \arcsin x - \arccos y$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Заметим, что $x^2 + y^2 = 1$ тогда и только тогда, когда существует некоторое $\varphi \in [0; 2\pi]$ такое, что $x = \sin\varphi$, $y = \cos\varphi$. Тогда выражение из условия приобретает вид

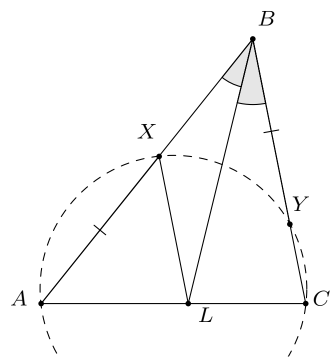
$$2 \arcsin \sin\varphi - \arccos \cos\varphi. \qquad (*)$$

Разберём несколько случаев:

- $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: тогда $\arcsin\sin\varphi = \varphi$, $\arccos\cos\varphi = \varphi$, а
$$2\arcsin\sin\varphi - \arccos\cos\varphi = 2\varphi - \varphi = \varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: тогда $\arcsin\sin\varphi = \pi - \varphi$, $\arccos\cos\varphi = \varphi$, а
$$2\arcsin\sin\varphi - \arccos\cos\varphi = 2(\pi - \varphi) - \varphi = 2\pi - 3\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\varphi \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$: тогда $\arcsin\sin\varphi = \pi - \varphi$, $\arccos\cos\varphi = 2\pi - \varphi$, а
$$2\arcsin\sin\varphi - \arccos\cos\varphi = 2(\pi - \varphi) - (2\pi - \varphi) = -\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$;
- $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$: тогда $\arcsin\sin\varphi = \varphi - 2\pi$, $\arccos\cos\varphi = 2\pi - \varphi$, а
$$2\arcsin\sin\varphi - \arccos\cos\varphi = 2(\varphi - 2\pi) - (2\pi - \varphi) = -6\pi + 3\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Суммируя всё вышесказанное, получаем, что выражение $(*)$ при $\varphi \in [0; 2\pi]$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Задача 7. Дан треугольник ABC. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC (L на отрезке AC), X — такая точка на отрезке AB, что $XL \parallel BC$. На отрезке BC нашлась точка Y такая, что $AX = BY$. Докажите, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности.



Решение. Из того, что BL — биссектриса треугольника ABC следует, что $AL : LC = AB : BC$. Из $XL \parallel BC$ следует, что $AL : LC = AX : XB$. Тогда
$$BY : BX = AX : XB = AL : LC = AB : BC,$$
то есть $BX \cdot BA = BY \cdot BC$. Следовательно, по одному из критериев вписанного четырёхугольника, точки A, X, Y и C лежат на одной окружности, что и требовалось.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение
$$\log_3(2x^2 - x + 2a - 4a^2) + \log_{1/3}(x^2 + ax - 2a^2) = 0$$
имеет два различных корня, сумма квадратов которых меньше 1?

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде
$$\log_3(2x^2 - x + 2a - 4a^2) = \log_3(x^2 + ax - 2a^2).$$

Заметим, что это уравнение эквивалентно системе
$$\begin{cases} 2x^2 - x + 2a - 4a^2 = x^2 + ax - 2a^2 \\ x^2 + ax - 2a^2 > 0 \end{cases},$$
или
$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x - 2a(a-1) = 0 & (1) \\ (x-a)(x+2a) > 0 & (2) \end{cases}.$$

По теореме, обратной теореме Виета, корнями уравнения (1) являются числа $x_1 = 2a$ и $x_2 = -a+1$. Поскольку у уравнения должно быть два различных корня, получаем следующие условия:

$$\begin{cases} (2a-a)(2a+2a) > 0 \\ (-a+1-a)(-a+1+2a) > 0 \\ 2a \neq -a+1 \end{cases},$$

то есть $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{3}$, $a \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

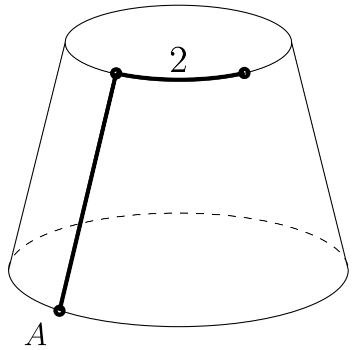
Сумма квадратов x_1 и x_2 должна быть меньше 1, то есть $4a^2 + (a-1)^2 < 1$, $5a^2 - 2a < 0$, откуда $a \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$. Пересекая все четыре полученных условия, получаем ответ.

Задача 9. На конференции присутствовали несколько учёных, некоторые из которых говорят на английском языке, некоторые на французском, а некоторые – на немецком. Устроители конференции заметили, что среди тех, кто говорит на английском ровно 1/5 говорит на французском, а ровно 1/3 — на немецком; среди тех, кто говорит на французском ровно 1/8 говорит на английском, а ровно 1/2 — на немецком; наконец, среди тех, кто говорит на немецком, ровно 1/6 говорит и на английском. А какую часть среди тех, кто говорит на немецком составляют те, кто говорит и на французском?

Ответ: 2/5.

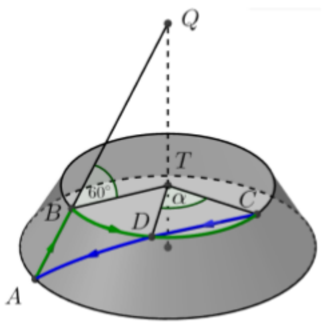
Решение. Пусть на немецком говорят x учёных. Тогда одновременно на немецком и английском говорят $x/6$ учёных; тогда на английском говорят $x/2$ учёных, а одновременно на английском и французском — $x/10$ учёных; тогда на французском говорят $4x/5$ учёных, а на французском и немецком — $2x/5$.

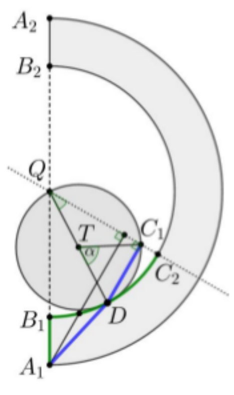
Задача 10. Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 8, а верхнего основания — 6. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A. Турист начинает подъём по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 2 (см. рис). После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?



Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$

Решение. Обозначим (см рисунок слева) вершину конуса буквой Q, центр меньшего основания — T, точку на верхнем основании, ближайшую к A — B, начальную точку обратного маршрута — C. Пусть D — последняя точку обратного маршрута на окружности верхнего основания (возможно, D совпадает с C или B). Угол $\angle DTC$ обозначим за α.





Рассмотрим развёртку боковой поверхности конуса (см рисунок справа), верхнее основание приложим к точке D так, чтобы оно касалось развёртки боковой поверхности. Сохраним обозначения точек, а в случае раздвоения используем индексы (так, к примеру, точки C_1 и C_2 на рисунке справа соответствуют точке C на рисунке слева). Любая дуга окружность верхнего основания переходит в дугу окружности в два раза большего радиуса, поскольку $QB = \frac{TB}{\cos 60^\circ} = 2TB$. Значит, угловая мера будет уменьшаться в два раза. В частности, окружность верхней грани перейдет в полуокружность, т.е. боковая поверхность перейдёт в часть плоскости, ограниченной двумя концентрическими полуокружностями и диаметром, проходящим через их концы, QD будет диаметром верхнего основания.

Угол $\angle DQC_1 = \frac{\angle DTC_1}{2} = \frac{\alpha}{2}$. По сказанному выше, угловые меры дуг $\overset{\frown}{DC_1}$ и $\overset{\frown}{DC_2}$ относятся $2:1$. Это значит, что $\angle DQC_2 = \frac{\angle DTC_1}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Тогда $\angle DQC_1 = \angle DQC_2$, а потому точка C_1 лежит на прямой QC_2. Учитывая, что QD — диаметр, получаем, что C_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую QC_2. Тогда длина маршрута, идущего по верхнему основанию (рисунок слева) из C в D и по боковой поверхности из D в A будет не меньше длины ломаной (рисунок справа) C_1DA_1 и не меньше длины перпендикуляра, опущенного из A_1 на прямую QC_2.

Докажем, что существует маршрут равный длине этого перпендикуляра. Для этого достаточно показать, что проекция точки A_1 лежит на отрезке QC_2, поскольку в этом случае перпендикуляр пересекает полуокружность $B_1C_2B_2$. Точка пересечения дает точку D для кратчайшего маршрута, а перпендикуляр изображает на развертке кратчайший маршрут. Так как путь по краю верхнего основания составляет треть длины окружности верхнего основания, то $\angle B_1QC_2 = 60^\circ$. Тогда отношение QC_2 к QA_1 равно отношению длин окружностей нижнего и верхнего оснований и равно $\frac{3}{4}$, что больше $\cos 60^\circ$. Значит проекция QA_1 на прямую QC_2 меньше длины отрезка QC_2, что и требовалось.

Радиус нижнего основания $R = \frac{8}{2\pi}$. Тогда $QA = \frac{R}{\cos 60^\circ} = \frac{8}{\pi}$. Из прямоугольного треугольника (рисунок 2) длина перпендикуляра равна

$$QA_1 \cdot \sin \angle B_1QC_2 = QA_1 \cdot \sin 60^\circ = QA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}.$$

Вариант IV

Задача 1. Что больше: 1 или $\frac{18}{71}+\frac{47}{187}+\frac{59}{117}$?

Ответ: Сумма дробей больше.

Первое решение.

$$\frac{18}{71}+\frac{47}{187}+\frac{59}{117}>\frac{18}{72}+\frac{47}{188}+\frac{59}{118}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1.$$

Второе решение.

$$\begin{aligned}\frac{18}{71}+\frac{47}{187}+\frac{59}{117} &= \frac{18\cdot187\cdot117+71\cdot47\cdot117+71\cdot187\cdot59}{71\cdot187\cdot117}=\\ &= \frac{393822+390429+783343}{1553409}=\frac{1567594}{1553409}>1.\end{aligned}$$

Задача 2. В футбольном турнире играли шесть команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие двенадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

Ответ: 3.

Решение. Всего командами сыграна $\frac{6\cdot5}{2}=15$ игр, в каждой из которых разыгрывалось 2 или 3 очка. Следовательно, максимальное количество очков, которое суммарно может быть у всех команд это $15\cdot3=45$. Значит, количество вышедших в следующий этап команд n удовлетворяет неравенству $n\cdot12\leqslant45$, откуда $n\leqslant3$.

С другой стороны, можно привести пример турнирной таблицы, в которой 3 команды отбираются в следующий круг:

	1	2	3	4	5	6	Сумма
1	X	0	3	3	3	3	12
2	3	X	0	3	3	3	12
3	0	3	X	3	3	3	12
4	0	0	0	X	1	1	2
5	0	0	0	1	X	1	2
6	0	0	0	1	1	X	2

Задача 3. При каком наименьшем натуральном k выражение $2016\cdot2017\cdot2018\cdot2019+k$ является квадратом натурального числа?

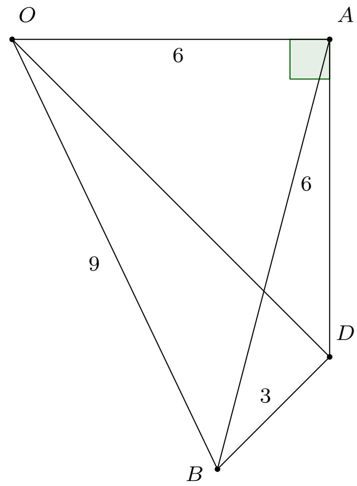
Ответ: 1.

Решение. Докажем, что уже $k=1$ подходит. Пусть $n=2017$, тогда при $k=1$ выражение из условия равняется

$$\begin{aligned}(n-1)n(n+1)(n+2)+1 &= (n-1)(n+2)\cdot n(n+1)+1=(n^2+n-2)(n^2+n)+1=\\ &= \big((n^2+n-1)-1\big)\big((n^2+n-1)+1\big)+1=(n^2+n-1)^2.\end{aligned}$$

Задача 4. Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 6, до вершины B равно 9, до вершины C равно 3. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{45}{2}+9\sqrt{2}$.



Первое решение. Рассмотрим поворот вокруг точки A на угол $90°$, который переводит точку C в точку B. Пусть при этом повороте точка O переходит в точку D; тогда отрезок BD является образом отрезка CO; поскольку при повороте длина отрезков не меняется, $BD = CO = 8$. Получаем четырёхугольник $OADB$, в котором $OA = AD = 6$, $BD = 3$, $OB = 9$, $\angle OAD = 90°$ (см. чертёж). Дальше можно рассуждать несколькими способами.

Первый способ. Рассмотрим систему координат, в которой точка O имеет координаты $(0,0)$, точка A имеет координаты $(6,0)$, точка D — координаты $(6,-6)$. Найдём координаты точки $B(x,y)$, учитывая, что $OB = 9$ и $DB = 3$, т.е.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 81 \\ (x-6)^2 + (y+6)^2 = 9 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $12x - 12y - 72 = 72$, откуда $x - y = 12$. Подставляя $x = y + 12$ в первое уравнение, получаем $2y^2 + 24y + 63 = 0$, откуда $y = \frac{-12 \pm 3\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{12 \pm 3\sqrt{2}}{2}$. Поскольку точка B должна лежать по ту же сторону относительно AD, что и точка O, то $y = \frac{-12-3\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{12-3\sqrt{2}}{2}$.

Наконец, $S = \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{(x-6)^2 + y^2}{2} = \dfrac{((12-3\sqrt{2})/2 - 6)^2 + ((12+3\sqrt{2})/2)^2}{2} = \frac{45}{2} + 9\sqrt{2}$.

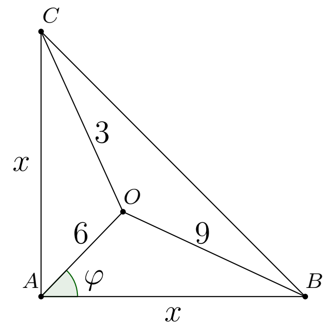
Второй способ. Для начала заметим, что $OD = 6\sqrt{2}$, $\angle ODA = 45°$. Заметим, что $OD^2 + BD^2 = 72 + 9 = 81 = OB^2$. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle ODB = 90°$, а $\angle ADB = 135°$.

Тогда по теореме косинусов для треугольника ADB:

$$S = \frac{AB^2}{2} = \frac{AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos 135°}{2} = \frac{36 + 9 - 36\sqrt{2}}{2} = \frac{45}{2} + 9\sqrt{2}.$$

Второе решение. Пусть $AB = AC = x$, $\angle OAB = \varphi$. По теореме косинусов для треугольников OAB и OAC имеем:

$$9^2 = x^2 + 6^2 - 12x\cos\varphi$$
$$3^2 = x^2 + 6^2 - 12x\sin\varphi$$



откуда

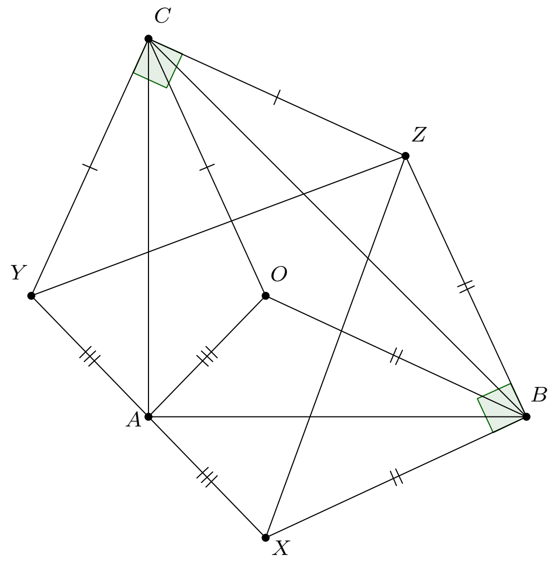
$$12x\cos\varphi = x^2 - 45$$
$$12x\sin\varphi = x^2 + 27$$

Возводя эти неравенства в квадрат, после сложения, получаем квадратное уравнение на x^2: $144x^2 = 2x^4 - 36x^2 + 2754$, $x^4 - 90x^2 + 1377 = 0$. Корнями этого уравнения являются

$$x_{1,2}^2 = 45 \pm 18\sqrt{2}.$$

Заметим, что $45 - 18\sqrt{2} < 36$, и в этом случае $x < AO$, то есть точка O не будет лежать внутри треугольника, поэтому $S = \frac{x^2}{2} = \frac{45}{2} + 9\sqrt{2}$.

План третьего решения. Отразим точку O симметрично относительно сторон AB, AC и BC треугольника ABC; обозначим образы через X, Y и Z соответственно. (см. рисунок) Тогда $AY = AX = AO$, $CY = CZ = CO$, $BX = BZ = BO$. Простым счётом углов убеждаемся, что $\angle YCZ = 2\angle ACB = 90°$, $\angle XBZ = 2\angle ABC = 90°$, $\angle XAY = 2\angle BAC = 180°$. Площадь пятиугольника $XYCZB$ в два раза больше площади треугольника ABC. С другой стороны, площадь $XYCZB$ складывается из площади двух прямоугольных треугольников YCZ и XBZ, в который нам известен катет, а также треугольника XYZ, у которого нам известны все стороны, поэтому его площадь мы можем найти, например, воспользовавшись формулой Герона.



Задача 5. Обозначим $f(x) = 4x^2 + 7x - 10$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

Ответ: $1, -\dfrac{5}{2}, -1 \pm \sqrt{3}$.

Первое решение. Число x удовлетворяет уравнению $f(f(x)) = x$ тогда и только тогда, когда найдётся такое число y, что выполнена система

$$\begin{cases} 4x^2 + 7x - 10 = y \\ 4y^2 + 7y - 10 = x \end{cases}.$$

Вычитая из первого равенства второе, после преобразований получаем $4(x-y)(x+y+2) = 0$, откуда или $y = x$, или $y = -x - 2$. Подставим y в первое уравнение системы. В первом случае получим уравнени $4x^2 + 6x - 10 = 0$, откуда $x = 1$ или $x = -\dfrac{5}{2}$. Во втором случае получим уравнение $4x^2 + 8x - 8 = 0$, $x^2 + 2x - 2 = 0$ откуда $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

План второго решения. Честно посчитаем $f(f(x)) - x$:

$$(4(4x^2+7x-10)^2+7(4x^2+7x-10)-10)-x = 64x^4+224x^3-96x^2-512x+320 = 32(2x^4+7x^3-3x^2-16x+10),$$

т.е. исходное уравнение равносильно

$$2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 16x + 10 = 0.$$

Теперь у него можно найти два рациональных корня, пользуясь теоремой о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами: *если p/q, $(p, q) = 1$ — корень многочлена с целыми коэффициентами, то p является делителем свободного члена, а q — старшего коэффицента.* Получаем:

$$2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 16x + 10 = (x - 1)(2x + 5)(x^2 + 2x - 2),$$

корни же третьей скобки можно найти, например, используя формулу через дискриминант.

Задача 6. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$5 \arcsin x - 2 \arccos y$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Заметим, что $x^2 + y^2 = 1$ тогда и только тогда, когда существует некоторое $\varphi \in [0; 2\pi]$ такое, что $x = \sin\varphi$, $y = \cos\varphi$. Тогда выражение из условия приобретает вид

$$5 \arcsin \sin\varphi - 2 \arccos \cos\varphi. \qquad (*)$$

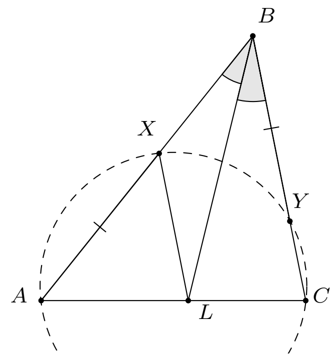
Разберём несколько случаев:

- $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: тогда $\arcsin\sin\varphi = \varphi$, $\arccos\cos\varphi = \varphi$, а
$$5\arcsin\sin\varphi - 2\arccos\cos\varphi = 5\varphi - 2\varphi = 3\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;
- $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: тогда $\arcsin\sin\varphi = \pi - \varphi$, $\arccos\cos\varphi = \varphi$, а
$$5\arcsin\sin\varphi - 2\arccos\cos\varphi = 5(\pi - \varphi) - 2\varphi = 5\pi - 7\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;
- $\varphi \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$: тогда $\arcsin\sin\varphi = \pi - \varphi$, $\arccos\cos\varphi = 2\pi - \varphi$, а
$$5\arcsin\sin\varphi - 2\arccos\cos\varphi = 5(\pi - \varphi) - 2(2\pi - \varphi) = \pi - 3\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$;
- $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$: тогда $\arcsin\sin\varphi = \varphi - 2\pi$, $\arccos\cos\varphi = 2\pi - \varphi$, а
$$5\arcsin\sin\varphi - 2\arccos\cos\varphi = 5(\varphi - 2\pi) - 2(2\pi - \varphi) = -14\pi + 7\varphi;$$
следовательно, при $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ выражение $(*)$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{7\pi}{2}; 0\right]$.

Суммируя всё вышесказанное, получаем, что выражение $(*)$ при $\varphi \in [0; 2\pi]$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{7\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 7. Дан треугольник ABC. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC (L на отрезке AC), X — такая точка на отрезке AB, что $XL \parallel BC$. Описанная окружность треугольника AXC пересекает отрезок BC в точках C и Y. Докажите, что $AX = BY$.

Решение. Из того, что BL — биссектриса треугольника ABC следует, что $AL : LC = AB : BC$. Из того, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности, следует, что $BX \cdot BA = BY \cdot BC$, или $AB : BC = BY : BX$. Из того, что $XL \parallel BC$ следует, что $AL : LC = AX : XB$. Тогда
$$AL : LC = AB : BC = BY : BX,$$
откуда следует, что $AX = BY$, что и требовалось доказать.



Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение
$$\log_2(2x^2 - x - 2a - 4a^2) + 3\log_{1/8}(x^2 - ax - 2a^2) = 0$$
имеет два различных корня, сумма квадратов которых принадлежит интервалу $(4; 8)$?

Ответ: $\left(\frac{3}{5}; 1\right)$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде
$$\log_2(2x^2 - x - 2a - 4a^2) = \log_4(x^2 - ax - 2a^2).$$

Заметим, что это уравнение эквивалентно системе
$$\begin{cases} 2x^2 - x - 2a - 4a^2 = x^2 - ax - 2a^2 \\ x^2 - ax - 2a^2 > 0 \end{cases},$$
или
$$\begin{cases} x^2 + (a-1)x - 2a(a+1) = 0 & (1) \\ (x+a)(x-2a) > 0 & (2) \end{cases}.$$

По теореме, обратной теореме Виета, корнями уравнения (1) являются числа $x_1 = -2a$ и $x_2 = a+1$. Поскольку у уравнения должно быть два различных корня, получаем следующие условия:

$$\begin{cases} (-2a+a)(-2a-2a) > 0 \\ (a+1+a)(a+1-2a) > 0 \\ -2a \neq a+1 \end{cases},$$

то есть $a \neq 0$, $a \neq -\frac{1}{3}$, $a \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Сумма квадратов x_1 и x_2 должна принадлежать интервалу $(4; 8)$, то есть $4 < 4a^2 + (a+1)^2 < 8$,

$$\begin{cases} 5a^2 + 2a - 3 > 0 \\ 5a^2 + 2a - 7 < 0 \end{cases},$$

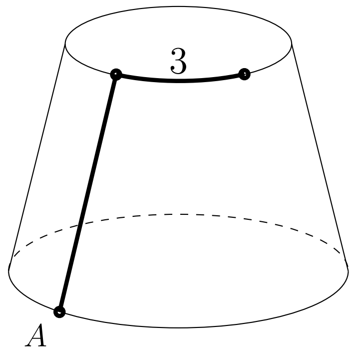
откуда $a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$, $a \in \left(-\frac{7}{5}; 1\right)$. Пересекая все пять полученных условий, получаем ответ.

Задача 9. На детский праздник дети приносили из дома угощенья: печенье, конфеты и вафли. Классный руководитель заметила, что среди тех, кто принёс печенье ровно 1/3 принесли и конфеты, а ровно 1/4 — принесли и вафли; среди тех, кто принёс конфеты ровно 1/7 часть принесли и печенье, а ровно 1/8 — и вафли; наконец, среди тех, кто принёс вафли, ровно 1/2 принесли и печенье. А какую часть среди тех, кто принёс вафли, составляют те, кто принёс ещё и конфеты?

Ответ: 7/12.

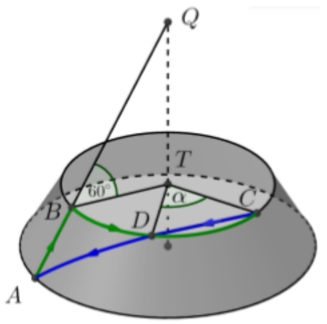
Решение. Пусть тех, кто принёс вафли x. Тогда тех, кто принёс и вафли, и печенье $x/2$; тогда тех, кто принёс печенье $2x$, а тех, кто принёс и печенье и конфеты — $2x/3$; тогда тех, кто принёс конфеты $14x/3$, а тех, кто принёс и конфеты, и вафли — $7x/12$.

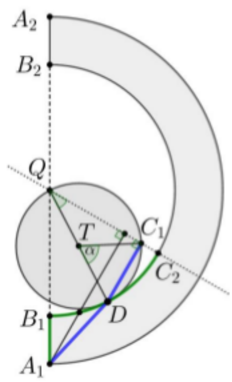
Задача 10. Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 10, а верхнего основания — 9. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A. Турист начинает подъём по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 3 (см. рис). После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?



Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{\pi}$

Решение. Обозначим (см рисунок слева) вершину конуса буквой Q, центр меньшего основания — T, точку на верхнем основании, ближайшую к A — B, начальную точку обратного маршрута — C. Пусть D — последняя точку обратного маршрута на окружности верхнего основания (возможно, D совпадает с C или B). Угол $\angle DTC$ обозначим за α.





Рассмотрим развёртку боковой поверхности конуса (см рисунок справа), верхнее основание приложим к точке D так, чтобы оно касалось развёртки боковой поверхности. Сохраним обозначения точек, а в случае раздвоения используем индексы (так, к примеру, точки C_1 и C_2 на рисунке справа соответствуют точке C на рисунке слева). Любая дуга окружность верхнего основания переходит в дугу окружности в два раза большего радиуса, поскольку $QB = \frac{TB}{\cos 60^\circ} = 2TB$. Значит, угловая мера будет уменьшаться в два раза. В частности, окружность верхней грани перейдет в полуокружность, т.е. боковая поверхность перейдёт в часть плоскости, ограниченной двумя концентрическими полуокружностями и диаметром, проходящим через их концы, QD будет диаметром верхнего основания.

Угол $\angle DQC_1 = \frac{\angle DTC_1}{2} = \frac{\alpha}{2}$. По сказанному выше, угловые меры дуг $\overset{\smile}{DC_1}$ и $\overset{\smile}{DC_2}$ относятся $2:1$. Это значит, что $\angle DQC_2 = \frac{\angle DTC_1}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Тогда $\angle DQC_1 = \angle DQC_2$, а потому точка C_1 лежит на прямой QC_2. Учитывая, что QD — диаметр, получаем, что C_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую QC_2. Тогда длина маршрута, идущего по верхнему основанию (рисунок слева) из C в D и по боковой поверхности из D в A будет не меньше длины ломаной (рисунок справа) C_1DA_1 и не меньше длины перпендикуляра, опущенного из A_1 на прямую QC_2.

Докажем, что существует маршрут равный длине этого перпендикуляра. Для этого достаточно показать, что проекция точки A_1 лежит на отрезке QC_2, поскольку в этом случае перпендикуляр пересекает полуокружность $B_1C_2B_2$. Точка пересечения дает точку D для кратчайшего маршрута, а перпендикуляр изображает на развертке кратчайший маршрут. Так как путь по краю верхнего основания составляет треть длины окружности верхнего основания, то $\angle B_1QC_2 = 60^\circ$. Тогда отношение QC_2 к QA_1 равно отношению длин окружностей нижнего и верхнего оснований и равно $\frac{9}{10}$, что больше $\cos 60^\circ$. Значит проекция QA_1 на прямую QC_2 меньше длины отрезка QC_2, что и требовалось.

Радиус нижнего основания $R = \frac{10}{2\pi}$. Тогда $QA = \frac{R}{\cos 60^\circ} = \frac{10}{\pi}$. Из прямоугольного треугольника (рисунок 2) длина перпендикуляра равна

$$QA_1 \cdot \sin \angle B_1QC_2 = QA_1 \cdot \sin 60^\circ = QA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{\pi}.$$