7 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Существуют ли два одночлена, произведение которых равно $-12a^4b^2$, а сумма является одночленом с коэффициентом 1?

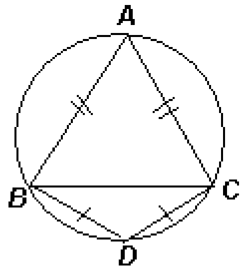
Ответ: да, существуют.

Например, $4a^2b$ и $-3a^2b$.

Отметим, что приведенный пример – единственный. Действительно, если сумма одночленов также является одночленом, то эти одночлены – подобные, то есть имеют одинаковую буквенную часть. Тогда, учитывая заданную буквенную часть произведения, получим, что буквенная часть искомых одночленов равна a^2b. Затем представим число 12 в виде произведения двух множителей, сумма которых равна 1. Это также можно сделать единственным способом.

1.2. У двух равнобедренных треугольников равны основания и радиусы описанных окружностей. Обязательно ли эти треугольники равны? *Ответ обоснуйте*.

Рис. 1



Ответ: нет, не обязательно.

Например, равнобедренные треугольники *ABC* и *DBC* с общим основанием *BC*, вписанные в одну и ту же окружность, не равны (см. рис. 1).

1.3. Шахматист сыграл в турнире 20 партий и набрал 12,5 очков. На сколько партий больше он выиграл, чем проиграл? (*Победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0.*)

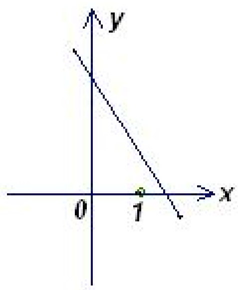
Ответ: на 5 партий.

Первый способ («арифметический»). Если бы у шахматиста было одинаковое количество побед и поражений, то он набрал бы 10 очков. Так как победа и поражение приносит столько же очков, сколько и две ничьи, то можно считать, что в этом случае он все 20 партий сыграл вничью. Так как в действительности он набрал на 2,5 очка больше, то пять ничьих надо заменить пятью победами, то есть у шахматиста – побед на 5 больше чем поражений.

Второй способ («алгебраический»). Пусть шахматист x партий выиграл, y партий сыграл вничью, а z партий проиграл. Тогда $x + y + z = 20$. Кроме того, $x\cdot 1 + y\cdot 0,5 + z\cdot 0 = 12,5$. Умножим обе части второго уравнения на 2 и вычтем из полученного уравнения первое, тогда $x - z = 5$. Условие задачи реализуется, например, при $x = 12$, $y = 1$, $z = 7$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. На рисунке изображен график функции $y = kx + b$. Сравните $|k|$ и $|b|$. *Ответ обоснуйте*.



Ответ: $|k| < |b|$.

Если $x = 0$, то $y = b$, поэтому данный график пересекает ось ординат в точке $(0; b)$. Следовательно, $b > 0$ (см. данный рисунок), то есть $|b| = b$.

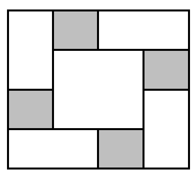
Если $x = 1$, то $y = k + b$, поэтому $0 < k + b < b$ (см. данный рисунок). Следовательно, $k < 0$, то есть $|k| = -k$. Кроме того, $b > -k$, значит, $|b| > |k|$.

Условие $k < 0$ можно получить иначе: оно следует из того, что данная линейная функция убывает.

2.2. Разрежьте квадрат 4×4 по линиям сетки на 9 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались ни сторонами, ни вершинами.

Ответ: например, см. рис. 2.

Рис. 2



2.3. Является ли простым число $2011\cdot 2111 + 2500$? *Ответ обоснуйте*.

Ответ: нет, не является.

<u>Первый способ</u>. $2011 \cdot 2111 + 2500 = 2011 \cdot (2011 + 100) + 2500 = 2011^2 + 100 \cdot 2011 + 50^2 = 2011^2 + 2 \cdot 2011 \cdot 50 + 50^2 = (2011 + 50)^2$ – составное число.

<u>Второй способ</u>. Заметим, что сумма цифр числа 2011 равна 4, сумма цифр числа 2111 равна 5, а сумма цифр числа 2500 равна 7. Так как число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки при делении на 3, то при делении на 3 число 2011 дает остаток 1, число 2111 – остаток 2, число 2500 – остаток 1. Произведение $2011 \cdot 2111$ будет при делении на 3 иметь остаток 2, а сумма $2011 \cdot 2111 + 2500$ будет делиться на 3, значит, она не является простым числом.

Можно также произвести непосредственные вычисления: $2011 \cdot 2111 + 2500 = 4247721$ и подсчитать, что сумма цифр получившегося числа равна 27, то есть оно делится на 3 и на 9.

Третий тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

3.1. Петя ехал из Петрова в Николаево, а Коля – наоборот. Они встретились, когда Петя проехал 10 км и еще четверть оставшегося ему до Николаева пути, а Коля проехал 20 км и треть оставшегося ему до Петрова пути. Какое расстояние между Петрово и Николаево?

<u>Ответ</u>: 50 км.

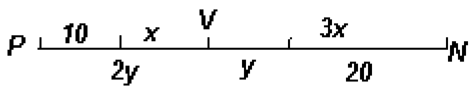


Рис. 3

<u>Первый способ</u>. Пусть до места встречи Петя проехал $(10 + x)$ км, тогда до Николаево ему оставалось ехать $3x$ км. Аналогично, если Коля проехал до места встречи $(20 + y)$ км, то ему до Петрово оставалось ехать $2y$ км (см. рис. 3).

Выражая двумя способами длины участков PV и NV, составляем систему уравнений: $\begin{cases} x + 10 = 2y, \\ y + 20 = 3x \end{cases}$. Решая эту систему, получим, что $x = y = 10$.

Значит, расстояние между Петрово и Николаево составляет $10 + 4x = 20 + 3y = 50$ (км).

<u>Второй способ</u>. Пусть S км – искомое расстояние. Тогда до встречи Петя проехал $10 + \frac{S-10}{4}$ (км), а Коля проехал $20 + \frac{S-20}{3}$ (км). Следовательно, $10 + \frac{S-10}{4} + 20 + \frac{S-20}{3} = S$. Умножив обе части этого уравнения на 12 и приведя подобные слагаемые, получим: $250 + 7S = 12S$, то есть $S = 50$.

3.2. В прямоугольнике $ABCD$ точка P – середина стороны AB, а точка Q – основание перпендикуляра, опушенного из вершины C на PD. Докажите, что $BQ = BC$.

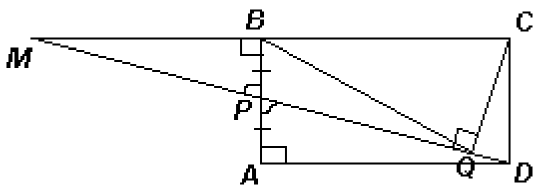


Рис. 4

Пусть прямые DP и BC пересекаются в точке M (см. рис. 4). Тогда прямоугольные треугольники DAP и MBP равны (по катету и острому углу). Следовательно, $MB = AD = BC$.

Таким образом, QB – медиана прямоугольного треугольника MQC, значит, $BQ = \frac{1}{2}$ ÌC $= BC$, что и требовалось.

Отметим, что точка Q может лежать и вне данного прямоугольника, но на приведенное решение это не влияет.

Семиклассники, уже знакомые со вписанными углами, могут предложить другой способ решения, основанный на том, что четырехугольник BCQP является вписанным.

3.3. В коробке лежат 2011 белых и 2012 черных шаров. Наугад вытаскиваются два шара. Если они одного цвета, то их выкидывают и кладут в коробку черный шар. Если они разного цвета, то выкидывают черный, а белый кладут обратно. Процесс продолжается до тех пор, пока в коробке не останется один шар. Какого он цвета?

Ответ: белого.

При любой комбинации вытащенных шаров количество белых шаров либо не меняется (если вытащены два черных шара или шары разного цвета), либо уменьшается на 2 (если вытащены два белых шара). Таким образом, количество белых шаров остается нечетным. Поскольку в коробке остается один шар, то он может быть только белым.

Такая ситуация действительно возможна: например, если 2012 раз вытаскивать шары разного цвета и 1005 раз вытаскивать два белых шара (в любой последовательности).

Четвертый тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

4.1. Для чисел a, b и c, отличных от нуля, выполняется равенство: $a^2(b + c – a) = b^2(c + a – b) = c^2(a + b – c)$. Следует ли из этого, что $a = b = c$?

Ответ: да, следует.

Рассмотрим первое из данных равенств и преобразуем его: $a^2(b + c – a) = b^2(c + a – b) \Leftrightarrow a^2b + a^2c – a^3 – b^2c – ab^2 + b^3 = 0 \Leftrightarrow ab(a – b) + c(a^2 – b^2) – (a^3 – b^3) = 0 \Leftrightarrow (a – b)(ab + ac + bc – a^2 – ab – b^2) = 0 \Leftrightarrow (a – b)(ac + bc – a^2 – b^2) = 0$ (1).

Аналогично, рассматривая два других данных равенства, получим: $(b – c)(ba + ca – b^2 – c^2) = 0$ (2) и $(c – a)(cb + ab – c^2 – a^2) = 0$ (3).

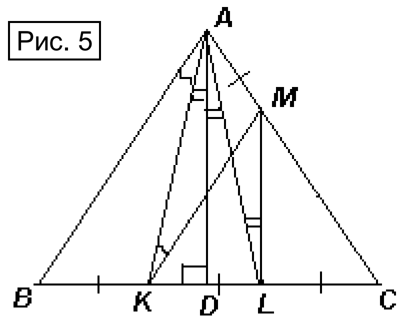
Равенство (1) выполняется тогда и только тогда, когда $a = b$ или $a^2 + b^2 – ac – bc = 0$.

В первом случае, из равенства (2) получим, что $c(a – c)^2 = 0$, откуда, учитывая, что $c \neq 0$, следует, что $c = a$. Аналогично и для двух других равенств: если первая скобка в одном из них равна нулю, то выполняется равенство $a = b = c$, что и требовалось.

Пусть $a \neq b$, $b \neq c$ и $c \neq a$, тогда $a^2 + b^2 – ac – bc = 0$, $b^2 + c^2 – ab – ac = 0$ и $c^2 + a^2 – bc – ab = 0$. Складывая эти равенства почленно, получим: $a^2 + b^2 + c^2 – 2ab – 2ac – 2bc = 0 \Leftrightarrow (a – b)^2 + (b – c)^2 + (a – c)^2 = 0$, что невозможно, если не выполнено условие $a = b = c$.

4.2. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $BK = KL = LC$, à на стороне AC отмечена точка M так, что $AM = \frac{1}{3}AC$. Найдите сумму углов AKM и ALM.

Ответ: 30°.



Заметим, что треугольник MKC – также равносторонний, так как $CM = \frac{2}{3}CA = \frac{2}{3}CB = CK$ и $\angle MCK = 60°$ (см. рис. 5). Следовательно, $MK \parallel AB$, поэтому $\angle ÀKM = \angle KAB$.

Кроме того, точка L – середина отрезка KC, значит, медиана ML треугольника MKC является и его высотой. Проведем высоту AD треугольника ABC, тогда $ML \parallel AD$, поэтому $\angle ÀLM = \angle LAD$. Из условия задачи следует, что точка D – середина KL, значит, треугольник KAL – равнобедренный с основанием KL, следовательно, его высота AD является и биссектрисой, то есть $\angle LAD = \angle KAD$.

Таким образом, $\angle ÀKM + \angle ÀLM = \angle KAB + \angle KAD = \angle BAD = 30°$, так как AD – биссектриса треугольника ABC.

4.3. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a + b + c + d$ оказаться простым?

Ответ: нет, не может.

Из условия задачи следует, что $d = \frac{ab}{c}$. Тогда *a* + *b* + *c* + *d* = *a* + *b* + *c* + $\frac{ab}{c}$ = $\frac{ac + c^2 + ab + bc}{c}$ = $\frac{c(a+c) + b(a+c)}{c}$ = $\frac{(a+c)(b+c)}{c}$. Полученное число – натуральное, при этом, *a* + *c* > *c* и *b* + *c* > *c*. Следовательно, при сокращении дроби получится произведение двух множителей, отличных от 1, то есть составное число.