8 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Решите уравнение: (x + 2010)(x + 2011)(x + 2012) = (x + 2011)(x + 2012)(x + 2013).

<u>Ответ</u>: –2011; – 2012.

Перенесем слагаемые в одну часть и разложим на множители получившееся выражение: $(x+2011)(x+2012)(x+2013)-(x+2010)(x+2011)(x+2012)=0$; $(x+2011)(x+2012)((x+2013)-(x+2010))=0$; $3(x+2011)(x+2012)=0$.

Это равенство выполняется при $x=-2011$ или $x=-2012$.

1.2. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *BD*. Докажите, что *AB* > *AD*.

Рассмотрим треугольник *ABD* (см. рис. 1). Так как угол *ADB* – внешний для треугольника *BDC*, то ∠*ADB* > ∠*CBD* = ∠*ABD*. Следовательно, *AB* > *AD*, что и требовалось.

Аналогично можно доказать, что BC > CD.

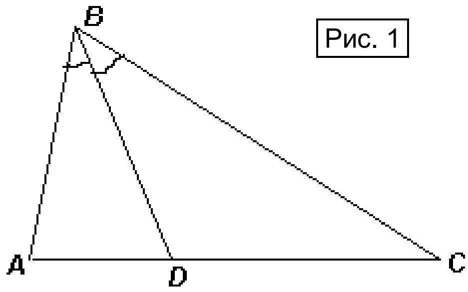


Рис. 1

1.3. Можно ли начертить два треугольника так, чтобы образовался девятиугольник?

<u>Ответ</u>: да, можно.

Например, см. рис. 2.

Полученный девятиугольник является ***объединением*** *двух треугольников. Желающие могут впоследствии подумать: какие n-угольники могут являться объединением двух треугольников, а какие не могут?*

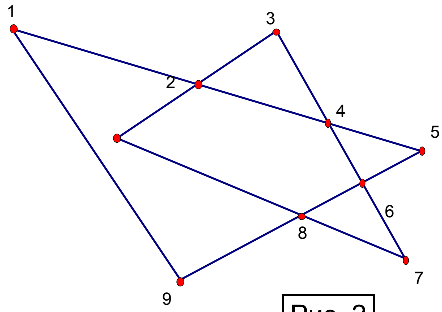


Рис. 2

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Для некоторых чисел *a*, *b*, *c* и *d*, отличных от нуля, выполняется равенство: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Найдите знак числа *ac*.

<u>Ответ</u>: *ac* < 0.

Приведем левую часть равенства к общему знаменателю, после чего избавимся от знаменателей, учитывая, что $b \neq 0$, $d \neq 0$ и $b + d \neq 0$: $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a+c}{b+d}$; $(ad+bc)(b+d)=(a+c)bd$.

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые: $adb+ad^2+b^2c+bcd=abd+bcd$, $ad^2+b^2c=0$. Предположим, что числа *a* и *c* – одного знака. Тогда, если $a>0$ и $c>0$, то $ad^2+b^2c>0$, а если $a<0$ и $c<0$, то $ad^2+b^2c<0$.

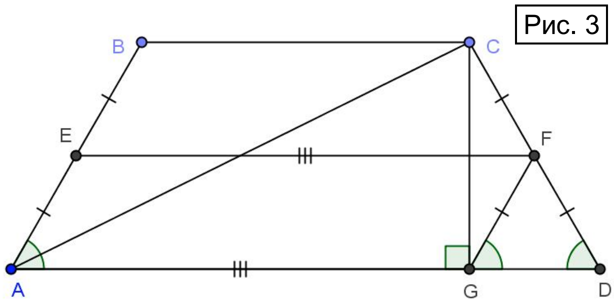
Таким образом, числа *a* и *c* имеют разные знаки, следовательно, *ac* < 0.

2.2. Найдите среднюю линию равнобокой трапеции, если ее диагональ равна 25, а высота равна 15.

<u>Ответ</u>: 20.

Пусть *ABCD* – данная трапеция (*AD* || *BC*), *EF* – ее средняя линия, *CG* – высота (см. рис. 3). Докажем, что *EF* = *AG*. Это можно сделать различными способами.

<u>Первый способ</u>. Так как *CF* – медиана прямоугольного треугольника *CGD*, то *FG* = $\frac{1}{2}$*CD* = *FD*. Учитывая также, что *AB* = *CD*,

Рис. 3


получим: $\angle FGD = \angle FDG = \angle EAG$, значит, *AE* || *FG*. Кроме того, *EF* || *AG*. Таким образом, *AEFG* – параллелограмм (по определению), следовательно, *EF* = *AG*.

Второй способ. Пусть *AD* = *a*, *BC* = *b*, тогда, $DG = \frac{a-b}{2}$ (так как *AB* = *CD*). Значит, $AG = AD - DG = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = EF$.

Далее, из треугольника *CGD* по теореме Пифагора находим *AG*: $AG^2 = AC^2 - CG^2 = 25^2 - 15^2$ = 10·40 = 20^2. Таким образом, *EF* = *AG* = 20.

2.3. Найдите наименьшее натуральное значение *n*, при котором число *n*! делится на 990. (*Напомним, что n! – произведение всех натуральных чисел от 1 до n.)*

Ответ: *n* = 11.

Так как 990 = 9·10·11 и 11 – простое число, то при *n* < 11 число *n*! не может делиться на 990. Следовательно, $n \geq 11$.

Так как 11! = 1·2·...·9·10·11, то это число делится также на 9 и на 10, значит оно кратно 990. Таким образом, искомое наименьшее значение *n* равно 11.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Известно, что *x*, *y* и *z* – целые числа и *xy* + *yz* + *zx* = 1. Докажите, что число $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ является квадратом натурального числа.

Подставим в первую скобку вместо 1 выражение *xy* + *yz* + *zx* и разложим на множители полученное выражение: $1 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = x(x + y) + z(x + y) = (x + y)(x + z)$. Аналогично, $1 + y^2 = xy + yz + zx + y^2 = y(z + y) + x(z + y) = (x + y)(y + z)$ и $1 + z^2 = xy + yz + zx + z^2 = z(z + x) + y(z + x) = (x + z)(y + z)$.

Таким образом, $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) = (x + y)^2(y + z)^2(x + z)^2 = ((x + y)(y + z)(x + z))^2$. Так как *x*, *y* и *z* – целые числа, то число $(x + y)(y + z)(x + z)$ является целым, при этом оно не обращается в ноль, так как $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) \geq 1$.

Следовательно, $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ является квадратом натурального числа, что и требовалось.

3.2. В прямоугольном треугольнике *ABC* угол *A* равен 60°, *M* – середина гипотенузы *AB*. Найдите угол *IMA*, где *I* – центр окружности, вписанной в данный треугольник.

Ответ: 45°.

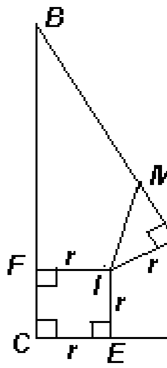


Рис. 4а

Первый способ. Пусть *r* – радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*; *D*, *E* и *F* – точки ее касания со сторонами *AB*, *BC* и *AC* соответственно (см. рис. 4а). Тогда *ID* = *IE* = *IF* = *r* и четырехугольник *CEIF* – квадрат, поэтому *CE* = *r*.

Из условия задачи следует, что $\angle ABC$ = 30°, поэтому, если *AC* = *b*, то *AB* = 2*b*, *AM* = *b*. Так как *AD* = *AE* = *b* – *r*, то *DM* = *r*.

Таким образом, треугольник *IDM* – прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $\angle IMA$ = 45°.

Для доказательства того, что DM = r, можно было также использовать формулу для вычисления радиуса вписанной окружности в прямоугольном треугольнике $r = \frac{a+b-c}{2}$ *и равенство BD = p – b, где p – полупериметр треугольника.*

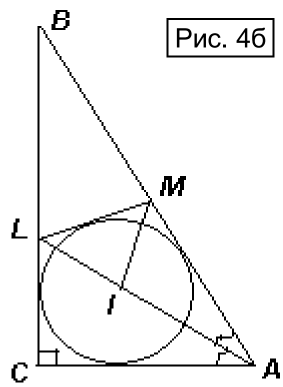


Рис. 4б

Второй способ. Проведем биссектрису *AL* данного треугольника (см. рис. 4б). Так как $\angle ABC$ = 30°, то $AC = \frac{1}{2}AB = AM$. Тогда ΔLAC = ΔLAM (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle LMA$ = $\angle LCA$ = 90° и $\angle MLA$ = $\angle CLA$, значит, *LM* – касательная к вписанной окружности. Таким образом, MI – биссектриса угла LMA, поэтому $\angle IMA = 45°$.

Отметим, что этот способ решения практически использовал симметрию относительно прямой AL. Попутно получено, что отрезки AL и ML разбивают данный треугольник на три равных треугольника.

3.3. Сколько существует натуральных n, не превосходящих 2012, таких, что сумма $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ оканчивается на 0?

Ответ: 1509.

Составим таблицу значений последних цифр у каждого слагаемого и у суммы для нескольких начальных значений n.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\mathbf{1^n}$	1	1	1	1	1
$\mathbf{2^n}$	2	4	8	6	2
$\mathbf{3^n}$	3	9	7	1	3
$\mathbf{4^n}$	4	6	4	6	4
Сумма	0	0	0	4	0

При $n = 5$ последние цифры у всех слагаемых такие же, как и при $n = 1$, значит общий период повторения последних цифр равен 4. При этом, для любых четырех последовательных значений n ровно в трех случаях сумма оканчивается на 0.

Так как $2012 : 4 = 503$, то искомое количество равно $503 \cdot 3 = 1509$.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. По двум пересекающимся дорогам с равными постоянными скоростями движутся автомобили «Ауди» и «БМВ». Оказалось, что как в 17:00, так и в 18:00 «БМВ» находился в два раза дальше от перекрёстка, чем «Ауди». В какое время «Ауди» мог проехать перекрёсток?

Ответ: в 17.15 или в 17.45.

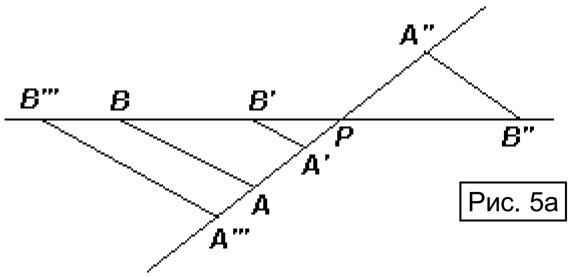


Рис. 5а

Первый способ («геометрически-алгебраический»). Заметим, что ситуация, когда ни одна из машин за рассматриваемый час не проехала перекресток, невозможна. Действительно, обозначив перекресток через P, а положение автомобилей «Ауди» и «БМВ» в 17.00 и в 18.00 через A и B, A' и B' соответственно (см. рис. 5а), получим, что если $PB = 2PA$ и $PB' = 2PA'$, то треугольники PAB и $PA'B'$ подобны, значит, $AA' \neq BB'$, что противоречит условию движения автомобилей с равными скоростями.

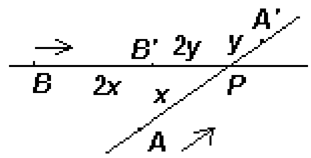


Рис. 5б

Аналогично доказывается, что оба автомобиля не могли за этот час проехать перекресток и не могли одновременно удаляться от перекрестка (соответствующие положения автомобилей обозначены на рис. 5а через A'' и B'', A''' и B'').

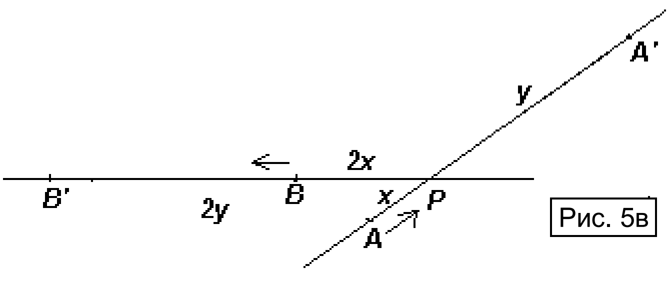


Рис. 5в

Таким образом, одна из машин пересекла перекресток, а другая – нет. Так как «Ауди» находилась к перекрестку ближе, чем «БМВ», то она его пересекла, в то время, как «БМВ» либо приближался к перекрестку, либо удалялся от него.

Пусть в 17.00 «Ауди» находилась от перекрестка на расстоянии x, а в 18.00 – на расстоянии y, тогда соответствующие расстояния от перекрестка до «БМВ» равны $2x$ и $2y$. За рассматриваемый час «Ауди» проехала $x + y$, а «БМВ» проехала либо $2x – 2y$ (если она двигалась к перекрестку, см. рис. 5б), либо $2y – 2x$ (если она удалялась от перекрестка, см. рис. 5в). Так как за этот час машины проехали одинаковое расстояние, то $x + y = 2x – 2y$ или $x + y = 2y – 2x$. В первом случае $x = 3y$, то есть до перекрестка

«Ауди» ехала $\frac{3}{4}$ часа, а во втором случае $x = \frac{1}{3}y$, то есть до перекрестка «Ауди» ехала $\frac{1}{4}$ часа.

Отметим, что первую часть рассуждений можно было провести, используя только алгебраические соотношения.

Второй способ («физический»). Заметим, что угол, под которым пересекаются дороги, значения не имеет, поэтому смысл задачи не изменится, если автомобили будут двигаться по одной и той же дороге. Так как скорости автомобилей постоянны и равны, то можно считать, что автомобили неподвижны, то есть расстояние между ними в 17.00 и в 18.00 одно и то же, а перекресток «движется» по этой дороге.

Сделаем чертеж, обозначив «Ауди» и «БМВ» через A и B соответственно (см. рис. 5г). Исходя из условия задачи, нас интересуют все такие положения перекрестка P, что $PB = 2PA$. Найдем на прямой AB все точки, для которых расстояние до точки B в два раза больше, чем до точки A. Таких точек две: P_1 и P_2, одна из них показывает положение перекрестка в 17.00, а другая – в 18.00.

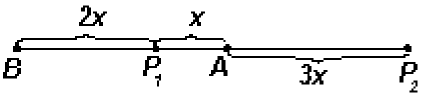


Рис. 5г

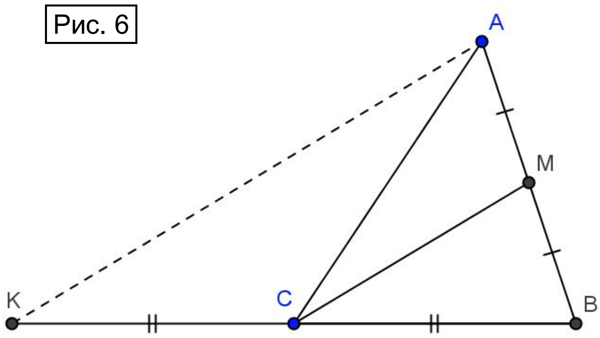
В первом случае (перекресток «движется» справа налево), расстояние от перекрестка до машин за рассматриваемый час в три раза уменьшилось, значит «встреча» A и P произошла в 17.45. Во втором случае (перекресток «движется» слева направо) это расстояние за час в три раза увеличилось, значит «встреча» A и P произошла в 17.15.

Отметим, что точки P_1 и P_2 находятся на прямой по разные стороны от точки A, но по одну сторону от точки B, значит, за рассматриваемый час «Ауди» пересекла перекресток, а «БМВ» – нет. При этом, в реальности, первый случай соответствует движению «БМВ» по направлению к перекрестку, а второй случай – ее движению от перекрестка.

4.2. Рассматриваются все треугольники ABC, у которых положение вершин B и C зафиксировано, а вершина A перемещается в плоскости треугольника так, что медиана CM имеет одну и ту же длину. По какой траектории движется точка A?

Ответ: по окружности.

Рис. 6



В одном из рассматриваемых треугольников проведем через вершину A прямую параллельно CM, которая пересечет прямую BC в точке K (см. рис. 6). Тогда, по теореме Фалеса, $KC = BC$, то есть CM – средняя линия треугольника AKM. Следовательно, $AK = 2CM$.

Так как положение вершин B и C у всех треугольников ABC фиксировано, то положение точки K также фиксировано. При движении точки A медиана CM имеет одну и ту же длину, поэтому длина отрезка AK также не изменяется. Следовательно, точка A движется по окружности с центром K и радиусом $2CM$.

Отметим, что такой же результат можно получить, используя гомотетию с центром B и коэффициентом 2.

4.3. Есть тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешается опустить в ящик, если номер ящика может быть получен из номера билета вычеркиванием одной из цифр. Можно ли разложить все билеты в 50 ящиков?

Ответ: да, можно.

Выделим две группы ящиков: 1) все ящики, номера которых содержат только цифры 0, 1, 2, 3 и 4; 2) все ящики, номера которых содержат только цифры 5, 6, 7, 8 и 9. В каждой из таких групп будет по 25 ящиков: в группу 1) войдет половина ящиков из первых пяти десятков (по 5 из каждого), а в группу 2) – половина ящиков из последних пяти десятков (также по 5 из каждого).

Докажем, что любой данный билет можно положить в один из пятидесяти выделенных ящиков, выполнив условие задачи. Действительно, номер любого билета состоит из трех цифр, поэтому, среди них найдутся, по крайней мере, две цифры, которые попадают в одну из групп (по принципу Дирихле). В каждом билете зафиксируем эти две цифры и вычеркнем оставшуюся цифру. Тем самым мы получим номер ящика, который обязательно присутствует в одной из рассматриваемых групп. В этот ящик мы и положим билет.

Отметим, что при формировании групп можно и другим способом разбивать десять цифр на две группы по пять цифр.