9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Верно ли, что если $b > a + c > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?

Ответ: да, верно.

Первый способ. Из данного неравенства следует, что $b^2 > (a+c)^2$, поэтому дискриминант данного уравнения: $D = b^2 - 4ac > (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0$. Значит, $D > 0$, то есть данное уравнение имеет два корня.

Отметим, что условие $a + c > 0$ весьма существенно, иначе, неравенство $b^2 > (a+c)^2$ может не выполняться и данное уравнение не будет иметь корней. Например, при $b = 0$, $a = c = –1$, получим уравнение $–x^2 – 1 = 0$, не имеющее корней.

Второй способ. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$. Из данного неравенства следует, что $a – b + c < 0$ и $a + b + c > 0$. Первое условие означает, что $f(–1) < 0$, а второе условие, – что $f(1) > 0$. Таким образом, график функции должен пересечь ось x, а поскольку это – парабола, то она пересекает ось x в двух точках, то есть данное уравнение имеет два корня.

1.2. Какое наименьшее значение может принимать периметр неравнобедренного треугольника с целыми длинами сторон?

Ответ: 9.

Пусть a, b и c – целые длины сторон треугольника и $a > b > c$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как $a > b > c$, то $a \geq 3$. Если $a = 3$, то $b = 2$, $c = 1$, что невозможно, так как в этом случае не выполняется неравенство треугольника $a < b + c$. Если $a = 4$, то $b + c > 4$, значит, $b = 3$, $c = 2$, а периметр треугольника равен 9. Если $a > 4$, то $b + c > 5$, то есть периметр треугольника не меньше, чем 11.

Второй способ. Запишем неравенство треугольника в таком виде: $c > a – b$. Так как a и b – различные натуральные числа, то $c \geq 2$, значит, $b \geq 3$ и $a \geq 4$. Следовательно, $a + b + c \geq 9$. Равенство достигается для треугольника со сторонам 2, 3 и 4.

1.3. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и –1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

1	**1**	**1**	**–1**	**–1**
1	**–1**	**1**	**–1**	**1**
–1	**1**	**–1**	**1**	**1**
–1	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**
–1	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**

Ответ: пять.

Приведем один из возможных примеров (см. таблицу). Сумма чисел в каждой из трех верхних строк положительна, а сумма чисел в каждом столбце отрицательна.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Найдите все натуральные решения уравнения: $2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}$.

Ответ: $n = 1$.

Первый способ. Преобразуем данное уравнение: $2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n} \Leftrightarrow 2n - 3 = \frac{1}{n^5} - \frac{2}{n}$ $\Leftrightarrow 2n - 3 = \frac{1-2n^4}{n^5}$. При $n = 1$ равенство верно, а при любом другом натуральном значении n левая часть последнего равенства положительна, а правая – отрицательна.

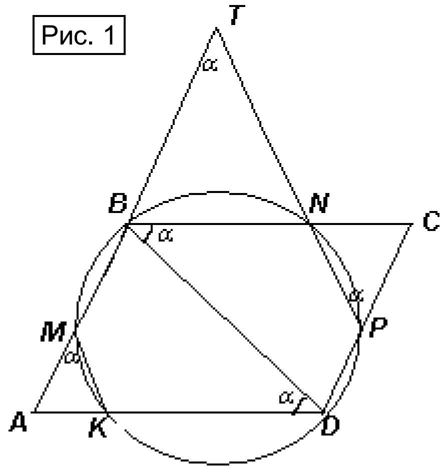
Второй способ. Преобразуем уравнение к виду: $2(n+\frac{1}{n}) = 3 + \frac{1}{n^5}$. Так как при любом $n > 0$ выполняется неравенство $n+\frac{1}{n} \geq 2$, то $2(n+\frac{1}{n}) \geq 4$. Так как n – натуральное число, то $3 + \frac{1}{n^5} \leq 4$. Таким образом, равенство возможно только в том случае, когда обе его части равны четырем, то есть при $n = 1$.

Третий способ. Преобразуем данное уравнение, избавившись от знаменателей, к виду: $2n^6 - 3n^5 + 2n^4 = 1$. Так как n – натуральное число, то левая часть уравнения делится на n, поэтому и правая часть должна делится на n. Следовательно, решением уравнения может являться только $n = 1$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $n = 1$ действительно является решением данного уравнения.

2.2. Окружность проходит через вершины B и D параллелограмма $ABCD$ и пересекает его стороны AB, BC, CD и DA в точках M, N, P и K соответственно. Докажите, что $MK \parallel NP$.

Рис. 1



Пусть $\angle CBD = \angle ADB = \alpha$ (см. рис. 1). Так как $BNPD$ – вписанный четырехугольник, то $\angle CPN = \angle CBD = \alpha$. Аналогично, $BMKD$ – вписанный четырехугольник, значит, $\angle AMK = \angle ADB = \alpha$.

Пусть прямые NP и AB пересекаются в точке T. Тогда, так как $AB \parallel CD$, то $\angle BTN = \angle CPN = \alpha$. Следовательно, $MK \parallel NP$ (по признаку параллельности прямых).

2.3. Делится ли число $21^{10} - 1$ на 2200?

Ответ: да, делится.

Представим число 2200 в виде произведения: $2200 = 22\cdot100 = 22\cdot20\cdot5$. Разложим выражение $21^{10} - 1$ на множители, используя формулу разности квадратов, а также формулы $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$ (справедливо для всех натуральных n) и $a^m + b^m = (a+b)\left(a^{m-1} - a^{m-2}b + \ldots - ab^{m-2} + b^{m-1}\right)$ (справедливо для всех нечетных натуральных m).

Тогда $21^{10} - 1 = (21^5)^2 - 1 = (21^5 - 1)(21^5 + 1) = (21 - 1)(21^4 + 21^3 + 21^2 + 21 + 1)(21 + 1)(21^4 - 21^3 + 21^2 - 21 + 1) = 20\cdot22\cdot(21^4 + 21^3 + 21^2 + 21 + 1)(21^4 - 21^3 + 21^2 - 21 + 1)$.

Заметим, что сумма $21^4 + 21^3 + 21^2 + 21 + 1$ делится на 5, так как она оканчивается цифрой 5. Следовательно, полученное произведение делится на $22\cdot20\cdot5 = 2200$.

Для тех, кто знаком с малой теоремой Ферма и с биномом Ньютона можно предложить еще один способ решения.

Представим число 2200 так: $2200 = 11\cdot200$. Тогда число $21^{10} - 1$ делится на 11 по малой теореме Ферма. Кроме того, по биному Ньютона: $21^{10} - 1 = (1 + 20)^{10} - 1 = 1 + 10\cdot20 + 45\cdot20^2 + 120\cdot20^3 + \ldots - 1 = 10\cdot20 + 45\cdot20^2 + 120\cdot20^3 + \ldots$.

В получившейся сумме первое слагаемое равно 200, а каждое слагаемое, начиная со второго, делится на 20^2, значит, эта сумма делится на 200. Таким образом $21^{10} - 1$ делится на 11 и на 200, следовательно, оно делится на 2200 (так как 11 и 200 – взаимно простые числа).

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Какие значения может принимать выражение $(x-y)(y-z)(z-x)$, если известно, что выполняется равенство: $\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$?

Ответ: 0.

Преобразуем исходное равенство: $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{z}$ $\Leftrightarrow$ $\left(\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)^2$ $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{x-y+z}\cdot\sqrt{y}=2\sqrt{x}\cdot\sqrt{z}$. Тогда $(x-y+z)y=xz$ $\Leftrightarrow$ $\left(xy-y^2\right)-\left(xz-yz\right)=0$ $\Leftrightarrow$ $(y-z)(x-y)=0$. Следовательно, $(x-y)(y-z)(z-x)=0$.

3.2. Существует ли треугольник с вершинами в узлах сетки, у которого центры вписанной и описанной окружностей, точки пересечения высот и медиан также лежат в узлах сетки?

Ответ: да, существует.

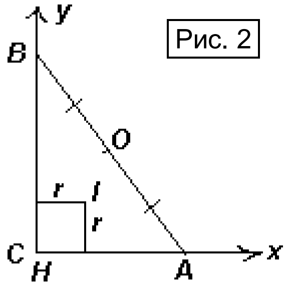


Рис. 2

Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC* в декартовой системе координат так, чтобы точка *C*(0; 0) являлась вершиной прямого угла, а лучи *CA* и *CB* задавали направление осей координат *x* и *y* соответственно (см. рис. 2). Пусть длины катетов пропорциональны сторонам египетского треугольника, то есть *CA* = 3*n*, *CB* = 4*n*, тогда *A*(3*n*; 0), *B*(0; 4*n*). Подберем значение *n* так, чтобы все указанные точки имели целочисленные координаты.

Точка пересечения высот *H* совпадает с вершиной *C*, поэтому *H*(0; 0). Центр описанной окружности *O* является серединой *AB*, следовательно, $O\left(\frac{3n}{2};2n\right)$. Таким образом, *n* должно быть кратно 2.

Центр *I* вписанной окружности будет иметь координаты: *I*(*r*; *r*), где *r* – радиус вписанной окружности. Его можно вычислить, например, по формуле $r=\frac{a+b-c}{2}$. При четном значении *n* длины сторон треугольника – четные, поэтому *r* – целое число.

Координаты точки *M* пересечения медиан являются средним арифметическим соответствующих координат вершин, то есть $M\left(n;\frac{4n}{3}\right)$. Следовательно, *n* должно быть кратно 3. Таким образом, *n* кратно 2 и кратно 3, то есть *n* кратно 6.

Если *n* = 6, то треугольник с вершинами C(0; 0), A(18; 0), B(0; 24) удовлетворяет условию задачи: *O*(9; 12), *I*(6; 6), *H*(0; 0), *M*(6; 8).

Существуют и другие примеры.

3.3. Известно, что выражения 4*k* + 5 и 9*k* + 4 при некоторых натуральных значениях *k* одновременно являются точными квадратами. Какие значения может принимать выражение 7*k* + 4 при тех же значениях *k*?

Ответ: 39.

Пусть $4k+5=m^2$ и $9k+4=n^2$, где *m* и *n* – некоторые натуральные числа. Выразим *k* из первого равенства и подставим во второе: $9\cdot\frac{m^2-5}{4}+4=n^2$ $\Leftrightarrow$ $9m^2-4n^2=29$ $\Leftrightarrow$ $(3m-2n)(3m+2n)=29$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}3m-2n=1\\3m+2n=29\end{cases}$, так как 29 – простое число. Единственным решением этой системы является пара чисел *m* = 5, *n* = 7. Тогда *k* = 5, а 7*k* + 4 = 39.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2+b^2}$, если *a* = $\underbrace{55\ldots55}_{2010}$, *b* = $1\underbrace{33\ldots33}_{2009}2$.

Ответ: $1\underbrace{44\ldots44}_{2009}3$.

Пусть $m = \underbrace{11\ldots11}_{2010}$, тогда: $\underbrace{55\ldots55}_{2010} = 5m$, $1\underbrace{33\ldots3}_{2009}32 = \underbrace{11\ldots11}_{2010}0 + \underbrace{22\ldots22}_{2010} = 12m$.

Значит, $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25m^2+144m^2} = \sqrt{169m^2} = 13m$, $13m = 13\cdot\underbrace{11\ldots11}_{2010} = 1\underbrace{44\ldots4}_{2009}43$

4.2. На сторонах *AC* и *BC* равностороннего треугольника *ABC* отмечены точки *D* и *E* соответственно так, что $AD = \frac{1}{3}AC$, $CE = \frac{1}{3}CB$. Отрезки *AE* и *BD* пересекаются в точке *F*. Найдите угол *BFC*.

Ответ: 90°.

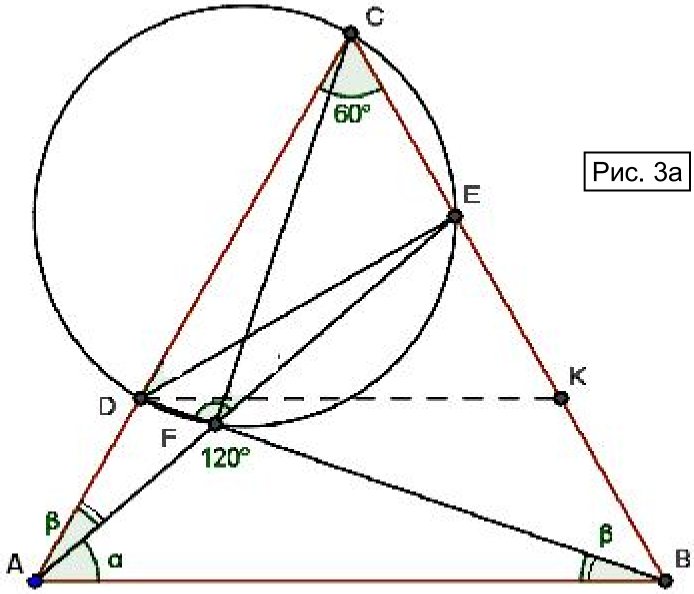


Рис. 3а

Первый способ. Пусть ∠*EAB* = α, а ∠*ABD* = β (см. рис. 3а). Тогда из равенства треугольников *CAE* и *ABD* (по двум сторонам и углу между ними) следует, что ∠*CAE* = ∠*ABD* = β. Значит, ∠*DFE* = ∠*AFB* = 180° – (α + β) = 120°. Следовательно, ∠*DFE* + ∠*DCE* = 180°, поэтому четырехугольник *ECDF* – вписанный.

На стороне *BC* отметим точку *K* так, что *BK : KC* = 1 : 2. Тогда треугольник *CDK* – равносторонний, *DE* – его медиана, которая является и высотой, значит, ∠*CED* = 90°.

По свойству вписанных углов ∠*CFD* = ∠*CED* = 90°, следовательно, ∠*BFC* = 90°.

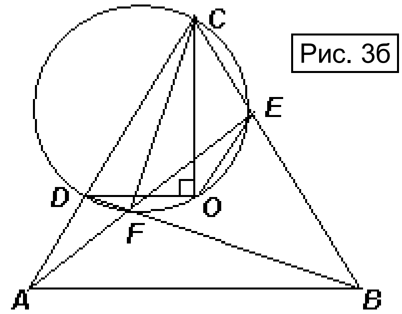


Рис. 3б

Второй способ. Пусть *O* – центр правильного треугольника *ABC*. Тогда *DO* || *AB* и *OE* || *CD*, поэтому ∠*DOE* = 120° и *CDOE* – равнобокая трапеция (см. рис. 3б).

Рассмотрим поворот с центром *O* на угол φ = –120°. При таком повороте образом вершины *B* является вершина *A*, а образом точки *D* – точка *E*, поэтому образом прямой *BD* является прямая *AE*. Следовательно, ∠*DFE* = 120°.

Рассмотрим окружность, описанную около трапеции *CDOE*. Так как *CO*⊥*DO*, то *CD* – диаметр этой окружности. Так как ∠*DFE* = ∠*DOE*, то точка *F* лежит на этой окружности, следовательно, ∠*CFD* = 90°, тогда ∠*BFC* = 90°.

Доказать, что ∠DFE = 120° можно также и с помощью векторов.

Пусть $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$, *тогда* $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = \bar{c} + \frac{1}{3}\overline{CB} = \bar{c} + \frac{1}{3}\left(\bar{b} - \bar{c}\right) = \frac{1}{3}\bar{b} + \frac{2}{3}\bar{c}$;

$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \frac{1}{3}\bar{c} - \bar{b}$. *Используем, что* $\cos\angle\left(\overline{AE};\overline{BD}\right) = \dfrac{\overline{AE}\cdot\overline{BD}}{\left|\overline{AE}\right|\cdot\left|\overline{BD}\right|}$. *Так как* $\left|\bar{b}\right| = \left|\bar{c}\right| = 1$,

$\angle\left(\bar{b};\bar{c}\right) = 60^\circ$, *то* $\overline{AE}\cdot\overline{BD} = -\frac{5}{9}\bar{b}\cdot\bar{c} - \frac{1}{3}\bar{b}^2 + \frac{2}{9}\bar{c}^2 = -\frac{7}{18}$; $\left|\overline{AE}\right| = \sqrt{\overline{AE}^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\bar{b}^2 + \frac{4}{9}\bar{b}\cdot\bar{c} + \frac{4}{9}\bar{c}^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$;

$\left|\overline{BD}\right| = \sqrt{\overline{BD}^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\bar{c}^2 - \frac{2}{3}\bar{b}\cdot\bar{c} + \bar{b}^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$. *Таким образом, cos∠DFE* = $-\frac{7}{18} : \frac{7}{9} = -\frac{1}{2}$, *значит, ∠DFE = 120°.*

4.3. Имеется 200 гирек массами 1, 2, …, 200 грамм. Их разложили на две чаши весов по 100 гирек на каждую, и весы оказались в равновесии. На каждой гирьке записали, сколько гирек на противоположной чаше легче нее. Докажите, что сумма чисел, записанных на гирьках левой чаши, равна сумме чисел, записанных на гирьках правой чаши.

Для каждой гирьки рассмотрим общее количество тех гирек, которые легче нее. Если масса гирьки равна *m*, то для нее таких гирек будет (*m* – 1). Так как весы находятся в равновесии, то для обеих чаш весов суммы *S* таких чисел одинаковы, а именно, на 100 меньше, чем сумма масс гирек на чаше (*можно подсчитать, что сумма масс гирек на каждой чаше равна* $\frac{1+200}{2}\cdot 100$ *= 10050, а S = 9950*).

На каждой чаше упорядочим гирьки по массе и для каждой из них рассмотрим количество тех гирек, которые легче нее и лежат на этой же чаше. Для самых легких гирь это число будет равно 0 (на каждой чаше), для следующих по массе это число равно 1 (на каждой чаше), и так далее. Поскольку все гирьки имеют различные массы и на каждой чаше – одинаковое количество гирек, то и суммы Q таких чисел для обеих чаш одинаковы (*Q = 0 + 1 + 2 + ... + 99 = 99·50 = 4950 для каждой чаши*).

Сумма чисел, записанных на гирьках каждой чаши равна *S* – *Q*, то есть одинакова (*S – Q = 5000 для каждой чаши*).

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Известно, что $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=3$. Найдите значение выражения $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: $2\frac{1}{6}$.

Первый способ. Приведем к общему знаменателю левую часть данного равенства: $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}$. Следовательно, $\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}=3$, откуда $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{3}{2}$. Тогда $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}$

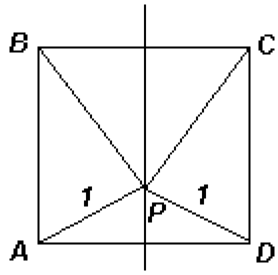
Второй способ. Заметим, что $y \neq 0$, так как при $y = 0$ равенство в условии задачи не выполняется. Тогда разделим почленно числитель и знаменатель каждой дроби в левой части данного равенства на *y* и введем обозначение: $\frac{x}{y}=t$. Получим: $\frac{t+1}{t-1}+\frac{t-1}{t+1}=3$. Решениями этого уравнения являются $t=\pm\sqrt{5}$. Тогда $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ = $\frac{t^2+1}{t^2-1}+\frac{t^2-1}{t^2+1}$ = $\frac{6}{4}+\frac{4}{6}$ = $\frac{13}{6}$.

5.2. На плоскости дан квадрат и точка *P*. Могут ли расстояния от точки *P* до вершин квадрата оказаться равными 1, 1, 2 и 3?

Ответ: нет, не могут.

Пусть дан квадрат *ABCD*. Рассмотрим два случая: равны расстояния от точки *P* 1) до соседних вершин квадрата; 2) до противоположных вершин квадрата.

Рис. 4а



<u>Первый способ</u>. 1) Пусть $PA = PD = 1$. Тогда точка P лежит на серединном перпендикуляре к стороне AD (см. рис. 4а), поэтому $PB = PC$, что противоречит условию задачи.

2) Пусть $PA = PC = 1$. Тогда точка P лежит на серединном перпендикуляре к диагонали AC, то есть на прямой BD, и $PB = 2$ (см. рис. 4 б, в). При этом, если точка P – вне квадрата (см. рис. 4б), то это противоречит тому, что угол ABP – тупой, а если точка P – внутри квадрата (см. рис. 4в), то $AC = BD = 5$, что противоречит неравенству треугольника $AC < PA + PC$.

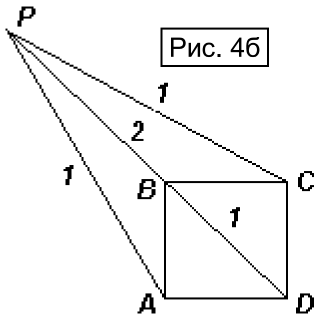


Рис. 4б

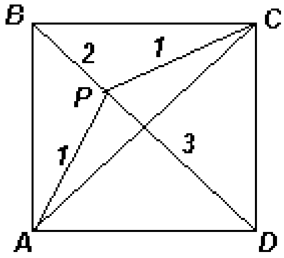


Рис. 4в

<u>Второй способ</u>. Используем, что для любого прямоугольника $ABCD$ и произвольной точки P должно выполняться равенство $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. Доказать его можно, например, так: пусть O – точка пересечения диагоналей прямоугольника (см. рис. 4г), тогда треугольники PAC и PBD имеют общую медиану PO. По формуле для вычисления медианы треугольника (*которую, можно получить, например, из теоремы о сумме квадратов диагоналей параллелограмма*): $PO^2 = \dfrac{2PA^2 + 2PC^2 - AC^2}{4}$ и $PO^2 = \dfrac{2PB^2 + 2PD^2 - BD^2}{4}$. Приравнивая правые части и учитывая, что $AC = BD$, получим требуемое равенство.

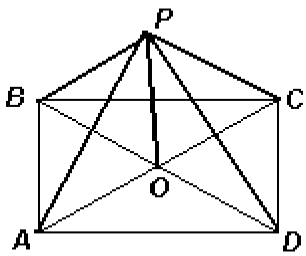


Рис. 4г

При подстановке данных в полученное равенство можно убедиться в том, что ни один из двух случаев невозможен.

Отметим, что доказанное равенство справедливо и в том случае, когда точка P не лежит в плоскости прямоугольника ABCD.

5.3. Несколько школьников ходило за грибами. Вася собрал больше всех и это составило $\frac{1}{5}$ от общего количества грибов, а Петя собрал меньше всех и это составило $\frac{1}{7}$ от общего количества. Сколько могло быть школьников?

<u>Ответ</u>: 6 человек.

<u>Первый способ</u>. Пусть за грибами ходило n школьников, тогда каждый из них в среднем собрал $\frac{1}{n}$ часть от общего количества грибов. Так как среднее арифметическое любого набора чисел, среди которых не все числа одинаковые, меньше наибольшего числа этого набора и больше наименьшего, то $\frac{1}{5} > \frac{1}{n} > \frac{1}{7}$, откуда $n = 6$.

<u>Второй способ</u>. Из условия задачи следует, что количество собранных грибов кратно 35. Пусть оно равно $35k$, где k – натуральное число, тогда Вася собрал $7k$ грибов, а Петя собрал $5k$. Следовательно, остальные m человек собрали $23k$ грибов.

Докажем, что $m = 4$. Действительно, если $m \geq 5$, то они бы собрали не менее, чем $5 \cdot 5k = 25k$ грибов, а если $m \leq 3$, то они бы собрали не более, чем $3 \cdot 7k = 21k$ грибов. При $m = 4$ описанная ситуация возможна, например, $23k = 6k + 6k + 5{,}5k + 5{,}5k$, где k – четное число.