10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Известно, что tgα + tgβ = p, ctgα + ctgβ = q. Найдите tg(α + β).

Ответ: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{pq}{q-p}$.

Из условия $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=p$ и равенства $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=q$, получим, что $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\dfrac{p}{q}$. Используя формулу $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ получим, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{p}{1-\dfrac{p}{q}}=\dfrac{pq}{q-p}$.

Предполагается, что тригонометрические выражения tgα, tgβ, ctgα, ctgβ и tg(α + β) определены, поэтому исследовать, для каких p и q задача имеет решение, не требуется.

1.2. Можно ли расположить на плоскости три вектора так, чтобы модуль суммы любых двух из них был равен 1, а сумма всех трёх была равна нулевому вектору?

Ответ: да, можно.

Первый способ. Рассмотрим правильный треугольник ABC со сторонами единичной длины (см. рис. 1а). Тогда искомый пример: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$.

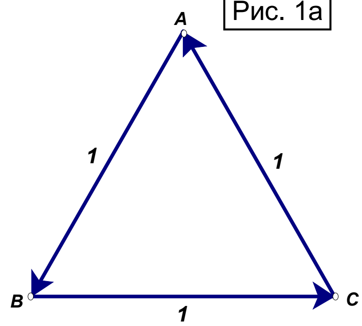


Рис. 1а

Действительно, $\overline{AB}$ + $\overline{BC}$ + $\overline{CA}$ = $\overline{AA}$ = $\bar{0}$. При этом модуль суммы любых двух из этих векторов равен модулю третьего, например, |$\overline{BC}$ + $\overline{CA}$| = |$\overline{BA}$| = 1.

Второй способ. Искомыми являются три единичных вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, образующие попарно углы 120° (см. рис. 1б).

Действительно, если сложить любые два из этих векторов, например, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, по правилу параллелограмма: $\overline{OB}$ + $\overline{OC}$ = $\overline{OA_1}$, то OBA_1C – ромб с углом 60°, значит, |$\overline{OA_1}$| = |$\overline{OB}$| = 1. Кроме того, векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OA_1}$ – противоположные, поэтому $\overline{OA}$ + $\overline{OB}$ + $\overline{OC}$ = $\overline{OA}$ + $\overline{OA_1}$ = $\bar{0}$.

Равенство $\overline{OA}$ + $\overline{OB}$ + $\overline{OC}$ = $\bar{0}$ можно получить иначе: концы рассматриваемых векторов образуют равносторонний треугольник ABC, у которого точка O – центроид.

Отметим также, что и в первом способе решения рассматривались векторы, образующие попарно углы 120°, но расположенные иначе.

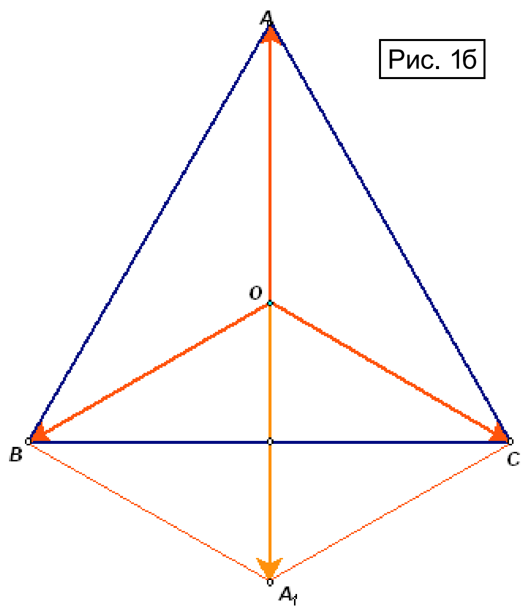


Рис. 1б

1.3. Выдающемуся бразильскому футболисту Роналдиньо Гаушо исполнится X лет в X^2 году. А сколько лет ему исполнится в 2018 году, когда чемпионат мира пройдет в России?

Ответ: 38 лет.

В условии задачи говорится о будущем времени, при этом футболист уже играет (или играл), поэтому достаточно оценить квадраты натуральных чисел, лежащие в промежутке от 2013 до 2100. Так как 44^2 = 1936, 45^2 = 2025, 46^2 = 2116, то возможен единственный вариант: X = 45. Следовательно, в 2018 году Роналдиньо будет на 7 лет меньше, то есть 38 лет.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2013$, $P(2013) = 1$, $P(k) = k$, где k – целое. Найдите k.

Ответ: 1007.

Воспользуемся следующим фактом: если $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, то для любых различных целых чисел a и b число $P(a) – P(b)$ делится на $a – b$.

Тогда из условия задачи следует, что $P(k) – P(1) = k – 2013$ делится на $k – 1$, а также $P(k) – P(2013) = k – 1$ делится на $k – 2013$. Оба условия выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $|k – 2013| = |k – 1|$.

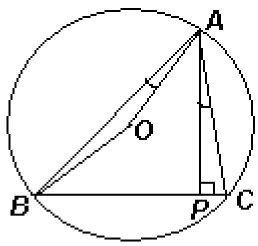
Решением полученного уравнения является середина отрезка [1; 2013], то есть $k = \frac{1+2013}{2} = 1007$.

Использованное утверждение несложно доказать, если в выражении $P(a) – P(b)$ сгруппировать подобные слагаемые и учесть, что для любого натурального n многочлен $a^n – b^n$ делится на $a – b$, но от школьников этого доказательства не требуется.

2.2. Центр O окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, лежит внутри него. Найдите площадь четырехугольника, если $\angle BAO = \angle DAC$, $AC = m$, $BD = n$.

Ответ: $\frac{mn}{2}$.

Рис. 2а



Пусть диагонали $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажем, что AC и BD перпендикулярны. Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Используем известный факт: если AP – высота треугольника ABC, O – центр описанной около этого треугольника окружности, то $\angle OAB = \angle PAC$ (см. рис. 2а).

Это доказывается простым счетом углов. Приведем его для случая остроугольного треугольника (для других видов треугольника – аналогично). Пусть $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle PAC = 90° – \gamma$. Так как центральный угол AOB равен 2γ, то $\angle OAB = \frac{180° - 2\gamma}{2} = 90° – \gamma = \angle PAC$.

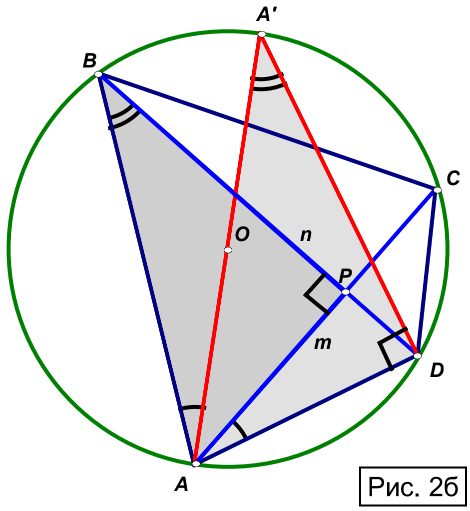


Рис. 2б

Применив этот факт к треугольнику ABD (см. рис. 2б), получим, что из условия $\angle BAO = \angle DAC$ и единственности перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BD, следует, что $AP \perp BD$.

Второй способ. Проведем диаметр AA', тогда из равенства $\angle BAO = \angle DAC$ следует, что $\angle BAP = \angle DAÀ'$ (см. рис. 2б). Кроме того, $\angle ABP = \angle AÀ'D$ (вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну ту же дугу). Так как вписанный угол ADA' опирается на диаметр, то $\angle ADA' = 90°$, значит, $\angle BAP + \angle ABP = \angle DAÀ' + \angle AÀ'D = 90°$. Таким образом, угол APB между диагоналями четырехугольника – прямой.

Этот результат также можно получить, если использовать, что угол между пересекающимися хордами AC и BD окружности равен полусумме угловых величин дуг AD и BC.

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{mn}{2}$.

2.3. Отмечены вершины и середины сторон правильного десятиугольника (то есть всего отмечено 20 точек). Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Ответ: 1130.

Треугольник однозначно определяется тремя своими вершинами. Из двадцати точек первую вершину можно выбрать 20 способами, вторую – 19 способами, а третью – 18 способами. Тогда, по правилу произведения, получим $20\cdot 19\cdot 18$ = 6840 способов выбора упорядоченной тройки вершин. Так как порядок вершин в нашем случае значения не имеет, то полученное число надо разделить на количество возможных перестановок трех элементов, то есть на 6. Получится 1140 треугольников.

Учитывая также, что три точки, лежащие на одной стороне десятиугольника, не образуют треугольника, получим: 1140 – 10 = 1130.

Рассуждение также можно проводить, оперируя количеством сочетаний из 20 элементов по три, и записывать решение в виде: C_{20}^{3} *– 10 =* $\frac{20!}{17!\cdot 3!}$ *– 10 = 1130.*

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + ac + abc$, если $a + b + c = 12$ (a, b и c – неотрицательные числа).

Ответ: 112.

Первый способ. Так как $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$, то $abc \le \frac{(a+b+c)^3}{3^3} = \frac{12^3}{3^3} = 64$.

Кроме того, из условия задачи следует, что $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 144$. Так как $ab + bc + ac \le a^2 + b^2 + c^2 = 144 - 2(ab + bc + ac)$, то $ab + bc + ac \le \frac{144}{3} = 48$.

В обоих случаях равенство достигается, если $a = b = c = 4$. Следовательно, наибольшее значение данного выражения равно 64 + 48 = 112.

Второй способ. Пусть $X = ab + bc + ac + abc$. Заметим, что $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + a + b + c + ab + bc + ac + abc = 13 + X$.

Так как $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$, то $xyz \le \frac{(x+y+z)^3}{3^3}$. Используем это неравенство для $x = 1 + a$, $y = 1 + b$, $z = 1 + c$. Тогда $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \le \frac{(3+a+b+c)^3}{3^3} = \frac{15^3}{3^3} = 125$.

Таким образом, $13 + X \le 125$, то есть $X \le 112$.

Равенство достигается при $a = b = c = 4$.

Обратим внимание на существенность того, что числа a, b и c – неотрицательные. В противном случае данное выражение может принимать и значения, большие, чем 112. Например, если a = 20, b = c = –4, то значение данного выражения равно 176.

3.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1. Докажите, что серединный перпендикуляр к AA_1, перпендикуляр к BC, проходящий через точку A_1, и прямая AO (O – центр описанной окружности) пересекаются в одной точке.

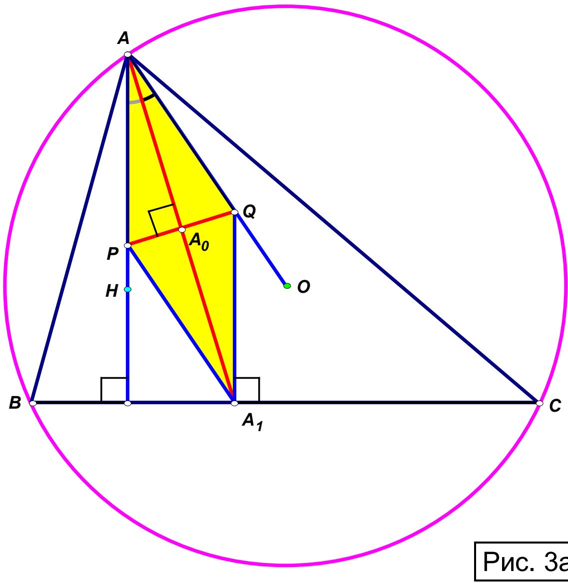


Рис. 3а

Пусть перпендикуляр к BC, проходящий через точку A_1, пересекает AO в точке Q (см. рис. 3 а, б). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Из вершины A проведем высоту треугольника ABC, а через точку A_1 – прямую, параллельную AO, которая пересечет высоту в точке P (см. рис. 3а). Тогда четырехугольник APA_1Q – параллелограмм.

Этот параллелограмм является ромбом, так как прямые AO и AH (H – ортоцентр треугольника ABC) симметричны относительно биссектрисы AA_1 (*см. первый способ решения задачи 2.2*), то есть диагональ AA_1 параллелограмма APA_1Q является биссектрисой его угла.

Следовательно, прямая PQ является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1, то есть три прямые, указанные в условии задачи, пересекаются в точке Q.

Второй способ. Продлим биссектрису AA_1 до пересечения с окружностью, описанной около треугольника ABC, в точке W (см. рис. 3б). Тогда $OW \perp BC$ и серединный перпендикуляр OK к отрезку AW содержит диаметр окружности (K – середина AW).

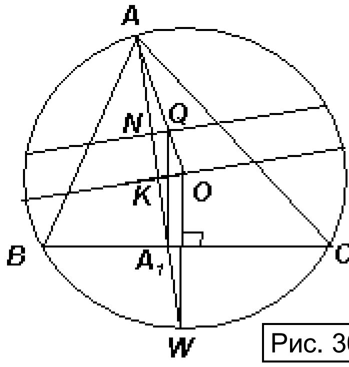
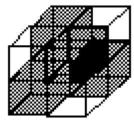


Рис. 3б

Так как $A_1Q \parallel WO$, то при гомотетии с центром A, переводящей точку O в точку Q, образом точки W является точка A_1. Следовательно, образом прямой OK при этой гомотетии является прямая QN, также перпендикулярная AA_1, причем образом точки K является точка N – середина отрезка AA_1. Таким образом, три прямые, указанные в условии задачи, пересекаются в точке Q.

3.3. Куб с ребром n составлен из белых и черных кубиков с ребром 1 таким образом, что каждый белый кубик имеет общую грань ровно с тремя чёрными, а каждый чёрный – ровно с тремя белыми. При каких n это возможно?

Рис. 4



Ответ: при всех четных n.

Пусть в данном кубе x белых кубиков, тогда количество черных кубиков равно $\frac{x \cdot 3}{3} = x$, так как каждому белому кубику соответствуют 3 черных, но каждый черный кубик учтен при этом 3 раза. Следовательно, общее количество кубиков должно быть четным, то есть n – четное число.

Построим теперь куб с ребром 2, удовлетворяющий условию задачи. Для этого нижний слой 2×2 уложим в шахматном порядке, а верхний – также в шахматном порядке, но с противоположной раскраской (см. рис. 4). Любой куб с четной длиной ребра, удовлетворяющий условию, можно собрать из таких кубиков с ребром 2, прикладывая их друг к другу гранями с одинаковой раскраской.

Доказать, что n должно быть четным можно и по-другому. Рассмотрим граф, вершинами которого являются кубики. Две вершины соединены ребром, если соответствующие кубики разного цвета и имеют общую грань. В таком графе *степень каждой вершины равна 3. Тогда, по лемме о рукопожатиях, количество вершин графа – четно.*

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Пусть x_1, x_2, ..., x_n – некоторые числа, принадлежащие отрезку [0; 1]. Докажите, что на этом отрезке найдется такое число x, что $\frac{1}{n}\left(|x-x_1|+|x-x_2|+\ldots+|x-x_n|\right)=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{n}\left(|x-x_1|+|x-x_2|+\ldots+|x-x_n|\right)$ на отрезке [0; 1]. Ее график – ломаная линия, следовательно, эта функция непрерывна. Рассмотрим два ее значения: $f(0)=\frac{1}{n}\left(|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|\right)$ и $f(1)=\frac{1}{n}\left(|1-x_1|+|1-x_2|+\ldots+|1-x_n|\right)$. Так как для любого $x_k\in[0;1]$ $|x_k| + |1 - x_k| = x_k + 1 - x_k = 1$, то $f(0) + f(1) = 1$.

Если f(0) = f(1) = $\frac{1}{2}$, то доказываемое равенство выполняется как при $x = 0$, так и при $x = 1$. Если же одно из этих чисел меньше, чем $\frac{1}{2}$, то другое – больше, чем $\frac{1}{2}$. Тогда, по теореме о промежуточном значении, найдется значение $x\in[0; 1]$, для которого $f(x) = \frac{1}{2}$, что и требовалось.

Аналогичное рассуждение также можно провести на «геометрическом» языке, не вводя функции в явном виде. Для этого достаточно рассмотреть соответствующие точки на координатной прямой и использовать, что при «движении» точки M(x) по отрезку [0; 1] сумма ее расстояний до точек с заданными координатами изменяется непрерывно.

4.2. В треугольнике ABC угол B равен 60°. Точка D внутри треугольника такова, что $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC$. Найдите наименьшее значение площади треугольника ABC, если $BD = a$.

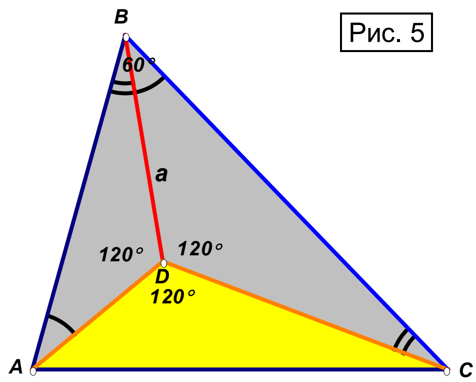


Рис. 5

<u>Ответ</u>: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Из условия задачи следует, что $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC. = 120°$ (см. рис. 5). Из треугольника ABD: $\angle DAB + \angle DBA = 60°$, а $\angle DBC + \angle DBA = 60°$ (по условию), значит, $\angle DAB = \angle DBC$. Следовательно, треугольники DAB и DBC подобны (по двум углам).

Поэтому $\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{CD}$, то есть $AD\cdot CD = BD^2 = a^2$. Значит, $S_{ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin 120^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то есть эта величина постоянная.

Таким образом, площадь треугольника ABC будет наименьшей, если будет наименьшей сумма площадей треугольников ADB и BDC. Заметим, что произведение этих величин постоянно: $S_{ADB}\cdot S_{BDC}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADB\cdot\frac{1}{2}BD\cdot CD\cdot\sin\angle BDC$ = $\frac{1}{4}BD^4\cdot\sin^2 120^\circ$ = $\frac{3a^4}{16}$. Тогда из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что их сумма принимает наименьшее значение, если эти площади равны, то есть $S_{ADB} = S_{BDC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Следовательно, искомое значение: $S_{ABC} = S_{ADC} + S_{ADB} + S_{BDC} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Отметим, что из полученного равенства $S_{ADB} = S_{BDC}$ *следует, что AD = CD. Тогда из того, что $AD\cdot CD = BD^2$, следует, что BD = AD = CD, то есть наименьшую площадь имеет равносторонний треугольник ABC, а точка D – его центр.*

Отметим также, что точка, из которой стороны треугольника видны под углами 120° называется точкой Ферма-Торричелли. Если все углы треугольника меньше, чем 120°, то сумма расстояний от этой точки до вершин треугольника – наименьшая из возможных. Подробнее – см., например, В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии. Том 1 или В.Ю. Протасов. Максимумы и минимумы в геометрии .

4.3. Существуют ли 2013 таких различных натуральных чисел, что сумма любых двух из них делится на их разность?

Ответ: да, существуют.

Первый способ. Построим сначала вспомогательную последовательность $\{x_n\}$, в которой 2013 чисел. Начиная это построение с конца, получим: $x_{2013} = 1$, $x_{2012} = 2$, и для любого i такого, что $1 \le i \le 2011$, $x_i = (x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_{2013})!$

Затем построим последовательность $\{a_n\}$ согласно следующему правилу: для любого i такого, что $1 \le i \le 2013$, $a_i = x_1 + x_2 + ... + x_i$.

Докажем, что $\{a_n\}$ – искомая последовательность. Выберем произвольные натуральные числа m и k ($m > k$), тогда $a_m - a_k = x_{k+1} + x_{k+2} + ... + x_m = t$. Так как $a_m + a_k = (a_m - a_k) + 2a_k$, то достаточно убедиться в том, что a_k делится на t. Действительно, $a_k = x_1 + ... + x_k$ и каждое слагаемое в этой сумме является факториалом числа, большего, чем t. Следовательно, каждое слагаемое делится на t, тогда и сумма делится на t.

Второй способ. Используя метод математической индукции, докажем, что утверждение задачи выполняется для любого натурального n.

При $n = 2$ числа, обладающие указанным свойством, очевидно, существуют, например, любые два последовательных натуральных числа.

Пусть утверждение верно для некоторого натурального k, то есть нашелся набор чисел a_1, a_2, ..., a_k, удовлетворяющий условию. Докажем, что тогда можно построить набор из $k + 1$ числа с тем же свойством. Пусть $A = a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_k$, тогда искомый набор состоит из чисел A, $A + a_1$, ..., $A + a_k$.

Действительно, рассмотрим два произвольных числа из этого набора: $x = A + a_i$ и $y = A + a_j$. По предположению индукции $a_i + a_j$ делится на $a_i - a_j$. Заметим также, что $2a_i = (a_i + a_j) + (a_i - a_j)$, поэтому $2a_i$ делится на $a_i - a_j$, значит, и $2A$ делится на $a_i - a_j$. Следовательно, $x + y = 2A + a_i + a_j$ также делится на $a_i - a_j = x - y$, что и требовалось. Очевидно, что для чисел $x = A + a_i$ и $y = A$ требуемое условие также выполняется.

Таким образом, существует любое количество натуральных чисел, обладающих указанным свойством, в том числе, и 2013 чисел.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

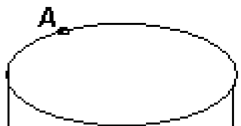
5.1. Найдите наибольшее значение выражения $x + y$, если $(2\sin x - 1)(2\cos y - \sqrt{3}) = 0$, $x \in [0; \frac{3\pi}{2}]$, $y \in [\pi; 2\pi]$.

Ответ: $\frac{10\pi}{3}$.

Заметим, что $(2\sin x - 1)(2\cos y - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. Решением уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ на промежутке $[0; \frac{3\pi}{2}]$ являются числа $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$, а решением уравнения $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $[\pi; 2\pi]$ – число $\frac{11\pi}{6}$.

Знак совокупности означает, что если выполняется первое равенство, то *y* – любое число из указанного для него промежутка, а если выполняется второе равенство, то *x* – любое число из указанного для него промежутка. Таким образом, достаточно выбрать наибольшие значения из данных промежутков и сравнить два значения суммы *x* + *y*: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6} < \frac{3\pi}{2} + \frac{11\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}$.

5.2. Точка *A* лежит на окружности верхнего основания прямого кругового цилиндра (см. рисунок), *B* – наиболее удаленная от нее точка на окружности нижнего основания, *C* – произвольная точка окружности нижнего основания. Найдите *AB*, если *AC* = 12, *BC* = 5.



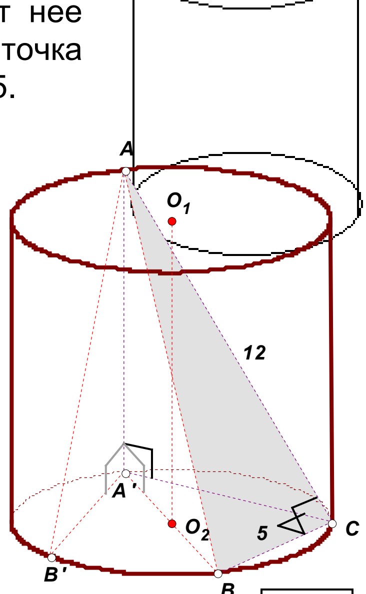


Рис. 6

Ответ: 13.

Пусть *A*’ – ортогональная проекция точки *A* на нижнее основание цилиндра, а *B*’ – произвольная точка окружности этого основания (см. рис. 6), тогда $AB' = \sqrt{A'A^2 + A'B'^2}$. Так как длина *A*’*A* не зависит от положения точки *B*’, то *AB*’ принимает наибольшее значение, если *A*’*B*’ – диаметр нижнего основания. Таким образом, указанная в условии точка *B* диаметрально противоположна точке *A*’.

Заметим, что при любом расположении точки *C* на окружности нижнего основания прямая *A*’*C* является ортогональной проекцией наклонной *AC* на плоскость этого основания. Тогда, так как угол *A*’*CB* – прямой, то угол *ACB* – также прямой (по теореме о трех перпендикулярах).

Следовательно, из прямоугольного треугольника *ACB*:
$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$.

5.3. Известно, что $b = 2013^{2013} + 2$. Будут ли числа $b^3 + 1$ и $b^2 + 2$ взаимно простыми?

Ответ: нет, не будут.

Прежде всего заметим, что число 2013 делится на 3, так как сумма цифр этого числа равна 6. Поэтому и любая степень этого числа делится на 3.

Тогда число $b^3 + 1 = (2013^{2013} + 2)^3 + 1 = (2013^{2013})^3 + 3\cdot(2013^{2012})^2\cdot 2 + 3\cdot 2013^{2013}\cdot 4 + 8 + 1$ делится на 3 и число $b^2 + 2 = (2013^{2013} + 2)^2 + 2 = (2013^{2012})^2 + 2\cdot 2013^{2013}\cdot 2 + 4 + 2$ также делится на 3.

Таким образом, данные числа имеют общий делитель, отличный от 1, то есть они не являются взаимно простыми.