8 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. В выражении $x^6 + x^4 + x{\cdot}A$ замените A на одночлен так, чтобы получился полный квадрат. Найдите как можно больше решений.

Ответ: $A = \pm 2x^4$ или $A = \frac{1}{4}x^7$ или $A = \frac{1}{4}x$ или $A = -x^3$ или $A = -x^5$.

Решение. Так как данное выражение является трехчленом, то оно станет полным квадратом двучлена в одном из трех случаев:

1) если x^6 è x^4 – квадраты двух чисел, а $x{\cdot}A$ – удвоенное произведение этих чисел, то $x^6 + x^4 \pm 2x^5 = (x^3 \pm x^2)^2$, то есть $A = \pm 2x^4$;

2) если x^4 и $x{\cdot}A$ – квадраты двух чисел, а x^6 – удвоенное произведение этих чисел, то $x^6 + x^4 + \frac{1}{4}x^8 = (x^2 + \frac{1}{2}x^4)^2$, то есть $A = \frac{1}{4}x^7$;

3) если x^6 и $x{\cdot}A$ – квадраты двух чисел, а x^4 – удвоенное произведение этих чисел, то $x^6 + x^4 + \frac{1}{4}x^2 = (x^3 + \frac{1}{2}x)^2$, то есть $A = \frac{1}{4}x$.

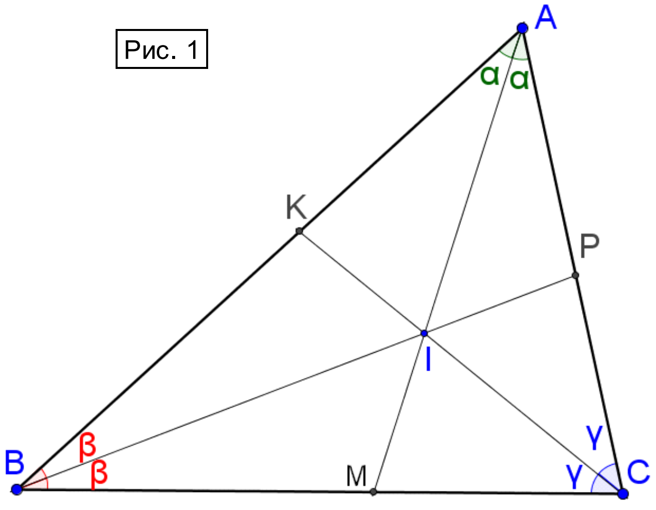
Кроме того, оно может стать квадратом одночлена, если $A = -x^3$ или $A = -x^5$.

1.2. На свой день рождения Василиса купила треугольный пирог, который она разрезала по каждой биссектрисе и получилось 6 кусков. Опоздавшему Игорю достался кусок в форме прямоугольного треугольника, на основании чего он заявил, что пирог имел форму равнобедренного треугольника. Прав ли Игорь?

Ответ: Игорь прав.

Решение. Рассмотрим пирог в виде треугольника ABC, в котором проведены биссектрисы AM, BP и CK. Пусть I – точка их пересечения, а углы обозначены так, как показано на рис. 1.

Рис. 1



Без ограничения общности можно считать, что Игорю достался кусок в виде треугольника BIK. Рассмотрим его углы. Заметим, что $\angle IBK = \beta < 90°$. Так как угол BIK – внешний для треугольника BIC, то $\angle BIK = \beta + \gamma = 90° - \alpha < 90°$. Следовательно, прямым мог быть только угол BKI. В этом случае, биссектриса CK треугольника является и его высотой, поэтому треугольник ABC – равнобедренный ($AC = BC$).

Можно также воспользоваться известным фактом: $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$, *значит, этот угол – тупой, а угол, смежный с ним, – острый.*

1.3. Найдите наименьшее натуральное n, для которого $(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$ делится на 1000.

Ответ: 121.

Решение. Заметим, что при любом натуральном n данное произведение делится на 8, так как среди любых четырех последовательных натуральных чисел одно делится на 4 и еще одно – на 2. Следовательно, достаточно найти наименьшее n, для которого данное произведение делится на $125 = 5^3$. Так как на 5 может делиться только один из множителей, то n – наименьшее, если множитель, делящийся на 125, – наибольший. Значит, $n + 4 = 125$, то есть $n = 121$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. На перемене несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли в него. В результате количество учеников в лицее после перемены уменьшилось на 10%, а доля мальчиков среди учеников лицея увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось количество мальчиков?

Ответ: количество мальчиков уменьшилось.

Решение. Пусть до начала перемены мальчиков было m человек. Так как это составляло 50% от общего количества учеников, то всего в лицее было $2m$ школьников.

После перемены количество учеников уменьшилось на 10%, то их стало $2m \cdot 0{,}9 = 1{,}8m$ человек. Из них мальчики составляли 55%, то есть их стало $1{,}8m \cdot 0{,}55 = 0{,}99m$.

Так как $m > 0{,}99m$, то количество мальчиков уменьшилось.

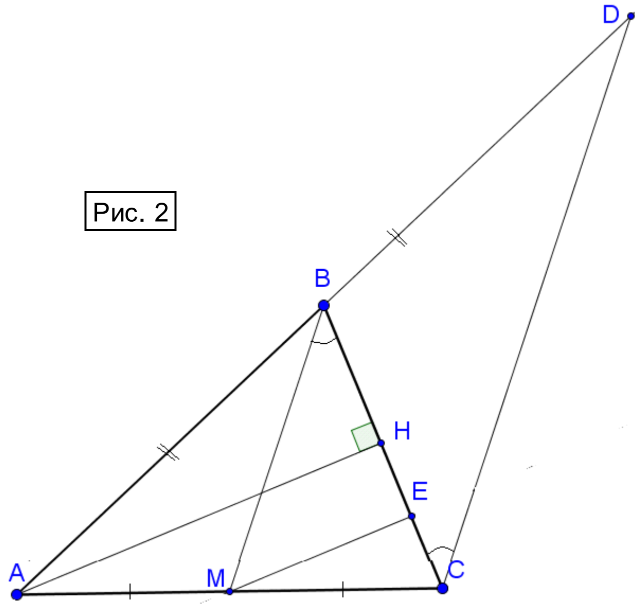
2.2. Высота AH остроугольного треугольника ABC равна его медиане BM. На продолжении стороны AB за точку B отложена точка D так, что $BD = AB$. Найдите угол BCD.

Ответ: 30°.

Решение. Из точки M опустим перпендикуляр ME на сторону BC, тогда $ME \parallel AH$, значит, ME – средняя линия треугольника AHC (см. рис. 2). Следовательно, $ME = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}BM$.

В прямоугольном треугольнике BME катет ME равен половине гипотенузы BM, поэтому $\angle MBE = 30°$. Кроме того, BM – средняя линия треугольника $AÑD$, поэтому $BM \parallel CD$. Значит, $\angle BCD = \angle MBC = 30°$.

Рис. 2



2.3. Можно ли из кубиков размером 1×1×1 склеить многогранник, площадь поверхности которого равна 2015? (*Кубики приклеиваются так, что склеиваемые грани полностью примыкают друг к другу.*)

Ответ: нельзя.

Решение. Будем приклеивать кубики по очереди и рассмотрим произвольный момент приклеивания очередного кубика. Пусть он приклеивается к уже имеющемуся многограннику своими k гранями, тогда после склеивания «спрятанными» оказываются эти k граней и k граней уже имевшегося многогранника. Таким образом, количество граней на поверхности многогранника изменяется на $6 - 2k$. Так как это четное число, а в изначальном состоянии (один кубик размером 1×1×1) количество граней также было четным числом, то в любой момент многогранник будет иметь четное количество граней. Следовательно, и площадь его поверхности четна, то есть не равна 2015.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Петя записал несколько алгебраических выражений, возвёл каждое из них в квадрат и сложил результаты. Могло ли у него в итоге получиться выражение $x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1$?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Пусть выражение $x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1$ равно сумме квадратов нескольких алгебраических выражений, тогда при любых x, y и z его значение неотрицательно.

Но, например, при $x = z = 0$, $y = –1$, $x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1 = 1 – 3 + 1 < 0$. Противоречие.

Также можно попытаться представить данное выражение в виде суммы квадратов, выделяя их постепенно, например, так: $x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1 = (x^2 + 4x + xz) + (y^2 + 3y) + z^2 + 1 = (x^2 + 2x(2 + \frac{1}{2}z) + (2 + \frac{1}{2}z)^2) – (2 + \frac{1}{2}z)^2 + (y^2 + 2y\cdot\frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2) – (\frac{3}{2})^2 + z^2 + 1 = (x + 2 + \frac{1}{2}z)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}z^2 – 2z – \frac{21}{4} = (x + 2 + \frac{1}{2}z)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}(z^2 – \frac{8}{3}z) – \frac{21}{4} = (x + 2 + \frac{1}{2}z)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}(z – \frac{4}{3})^2 – \frac{79}{12}$.

Тогда, выбрав значения переменных, при которых каждый из квадратов обращаются в ноль: $z = \frac{4}{3}$; $y = –\frac{3}{2}$; $x = –\frac{8}{3}$, *мы не только покажем, что данное выражение может принимать отрицательные значения, но и найдем, что наименьшее его значение равно* $–\frac{79}{12}$. *Однако этот путь представляется технически трудным.*

3.2. Внутри ромба $ABCD$ выбрана точка N так, что треугольник BCN – равносторонний. Биссектриса BL треугольника ABN пересекает диагональ AC в точке K. Докажите, что точки K, N и D лежат на одной прямой.

Решение. Докажем, что $\angle KNB + \angle BNC + \angle CND = 180°$ (см. рис. 3).

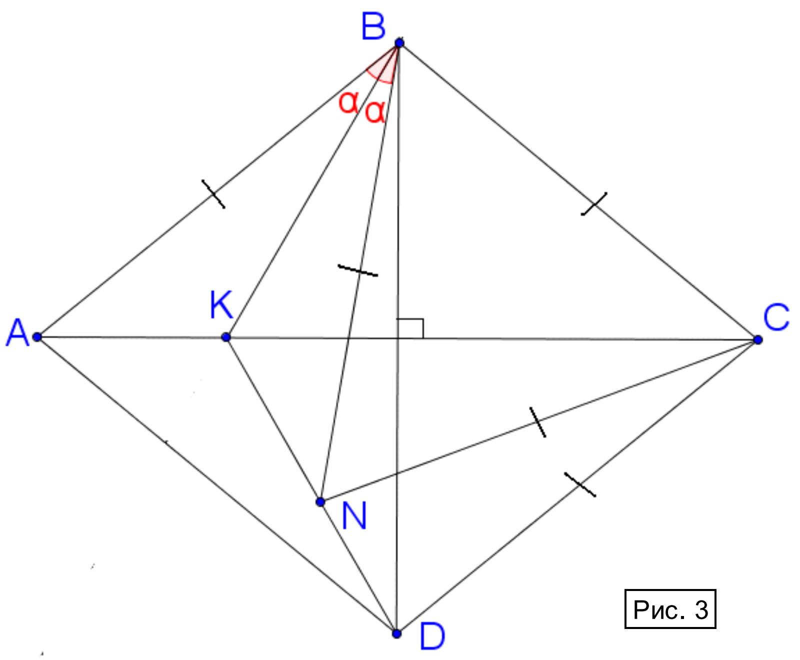


Рис. 3

Из условия задачи следует, что $\angle BNC = 60°$. Пусть $\angle ABK = \angle KBN = \alpha$, тогда $\angle ABC = 60° + 2\alpha$, $\angle BAD = 180° – \angle ABC = 120° – 2\alpha$, $\angle BAK = \frac{1}{2}\angle BAD = 60° – \alpha$.

Из условия задачи также следует, что $AB = BN = CN = CD$. Тогда $\Delta ABK = \Delta NBK$ (по двум сторонам и углу между ними), значит, $\angle KNB = \angle KAB = 60° – \alpha$. Кроме того, $\angle NCD = \angle BCD – \angle BCN = 120° – 2\alpha – 60° = 60° – 2\alpha$. Так как треугольник CDN – равнобедренный, то $\angle CND = \frac{180° – \angle NCD}{2} = 60° + \alpha$.

Таким образом, $\angle KNB + \angle BNC + \angle CND = 60° – \alpha + 60° + 60° + \alpha = 180°$, значит, точки K, N и D лежат на одной прямой.

3.3. Сколько существует несократимых дробей с числителем 2015, меньших, чем $\frac{1}{2015}$ и больших, чем $\frac{1}{2016}$?

Ответ: 1440.

Решение. Пусть $a > 0$ – знаменатель искомой дроби, тогда $\frac{1}{2016} < \frac{2015}{a} < \frac{1}{2015} \Leftrightarrow$ $2015^2 < a < 2015 \cdot 2016 \Leftrightarrow 2015^2 < a < 2015^2 + 2015$. Следовательно, искомые значения a – это числа вида $2015^2 + n$, где n – натуральное, $1 \le n \le 2014$ и НОД(2015; n) = 1.

Так как $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, то значения n, не удовлетворяющие условию, это все натуральные числа из указанного промежутка, кратные хотя бы одному из простых множителей в этом разложении. Найдем их количество: кратных пяти будет $13 \cdot 31 - 1 = 402$ (так как вычитается само число 2015), кратных тринадцати будет $5 \cdot 31 - 1 = 154$, а кратных тридцати одному будет $5 \cdot 13 - 1 = 64$. При этом, числа кратные сразу двум простым множителям разложения будут учтены дважды (чисел, учтенных при таком подсчете трижды, в указанном промежутке нет). Итак, чисел, кратных и 5, и 13 (то есть, кратных $5 \cdot 13$), будет $31 - 1 = 30$, чисел, кратных и 5, и 31, будет $13 - 1 = 12$, а чисел, кратных и 13, и 31, будет $5 - 1 = 4$.

Таким образом, искомое количество дробей равно $2014 - 402 - 154 - 64 + 30 + 12 + 4 = 1440$.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Известно, что $a > 1$. Обязательно ли имеет место равенство: $\left[\sqrt{\left[\sqrt{a}\right]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{a}}\right]$? (*Напомним, что $[x]$ – это целая часть числа x, то есть это наибольшее целое число, не превосходящее x.*)

Ответ: да, обязательно.

Решение. Так как $a > 1$, то найдется такое натуральное число n, что $n^4 \le a < (n + 1)^4$. Следовательно, $n^2 \le \sqrt{a} < (n + 1)^2$, тогда $n \le \sqrt{\sqrt{a}} < n + 1$. Таким образом, $\left[\sqrt{\sqrt{a}}\right] = n$.

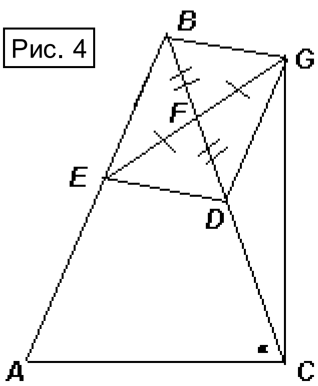
С другой стороны, $n^2 \le \left[\sqrt{a}\right] < (n + 1)^2$, поэтому $n \le \sqrt{\left[\sqrt{a}\right]} < n + 1$, то есть $\left[\sqrt{\left[\sqrt{a}\right]}\right] = n$.

Значит, указанное равенство действительно имеет место.

4.2. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки E и F соответственно так, что $AE = 2BF$. На луче EF отмечена точка G так, что $GF = EF$. Докажите, что угол ACG – прямой.

Решение. Отметим на стороне BC точку D так, что $BF = FD$ (см. рис. 4), тогда в четырехугольнике $BCDE$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, этот четырехугольник – параллелограмм. Следовательно, $DG = BE$.

Рис. 4



Кроме того, $BD = 2BF = AE$, значит, $DC = BC - BD = AB - AE = BE = DG$, то есть треугольник DCG – равнобедренный.

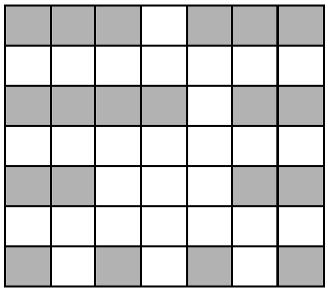
Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, тогда $\angle ABC = 180° - 2\alpha$. Так как $\angle GDB = \angle ABC = 180° - 2\alpha$ и угол GDB – внешний для треугольника CDG, то $\angle DCG = \angle DGC = 90° - \alpha$.

Таким образом, $\angle ACG = \angle BCA + \angle DCG = \alpha + 90° - \alpha = 90°$, что и требовалось.

4.3. Напомним, что игра в «морской бой» начинается с того, что на доске размером 10×10 клеток расставляют один «корабль» из четырех клеток, два – из трех клеток, три – из двух, и четыре одноклеточных (такие, как на рисунке). По правилам, «корабли» не должны касаться, даже углами. До какого наименьшего размера можно уменьшить поле для игры, оставив его квадратным и сохранив это правило?

Ответ: до квадрата размером 7×7 клеток.

Рис. 5а



Решение. Один из возможных примеров расстановки – см. рис. 5а.

Докажем, в квадрате размером 6×6 осуществить требуемую расстановку невозможно.

Первый способ. Любую вершину клетки назовем «узлом». Подсчитаем количество «узлов», которые в сумме должны занять все «корабли»: $10 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 60$.

В квадрате размером 6×6 есть только $7 \cdot 7 = 49$ «узлов» (включая «узлы» на границе). Следовательно, какие-то «узлы» должны стать для «кораблей» общими, а это противоречит условию.

Второй способ. Разобьем квадрат размером 6×6 на 9 квадратов размером 2×2 (см. рис. 5б). Согласно правилам, в каждом таком квадрате может находиться не более одного «корабля», но всего кораблей – 10. Значит, их расставить не удастся (*даже, если они все будут одноклеточными*!).

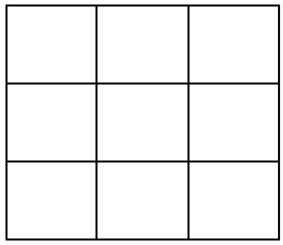


Рис. 5б

Отметим, что в квадрате размером 7×7 можно поставить еще один «лишний» одноклеточный «корабль».