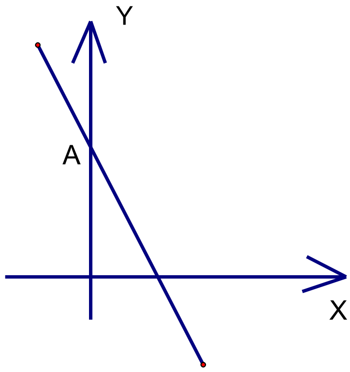
9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. На рисунке изображен график функции $y=(a^2-1)(x^2-1)+(a-1)(x-1)$. Найдите координаты точки *A*.



Ответ: *A*(0; 2).

Решение. Так как графиком является прямая, то заданная функция – линейная. Следовательно, $a^2-1=0 \Leftrightarrow a=\pm 1$.

Рассмотрим два случая:

1) Если $a=1$, то $y=0$, что не соответствует заданному графику (он не совпадает с осью абсцисс). Следовательно, $a\neq 1$.

2) Если $a=-1$, то $y=-2x+2$, что соответствует заданному графику (при $x=1$ $y=0$ и угловой коэффициент наклона прямой отрицателен). Подставив $x=0$ в уравнение $y=-2x+2$, получим, что $y=2$.

1.2. Существует ли выпуклый четырехугольник, каждая диагональ которого делит его на два остроугольных треугольника?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Предположим, что такой четырехугольник существует. Из условия задачи следует, что каждый его угол является углом остроугольного треугольника. Следовательно, все углы этого четырехугольника – острые, а их сумма меньше, чем 360°, что противоречит теореме о сумме углов четырехугольника.

1.3. Петя разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой на две части. Затем одну часть снова разрезал по прямой на две. Потом одну из получившихся частей опять разрезал на две части, и так далее, всего он резал бумагу сто раз. Потом Петя подсчитал суммарное количество вершин у всех получившихся многоугольников – получилось всего 302 вершины. Могло ли так быть?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Сделав сто разрезов, Петя получил 101 многоугольник, поэтому суммарно у них не меньше, чем 303 вершины.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=y+z, \\ \dfrac{1}{y}=z+x, \\ \dfrac{1}{z}=x+y. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. <u>Первый способ</u>. Вычитая из первого уравнения второе, получим: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=y-x \Leftrightarrow \dfrac{y-x}{xy}=y-x \Leftrightarrow (y-x)\left(\dfrac{1}{xy}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=y$ или $xy=1$.

1) Если $x=y$, то, исключив из первого и третьего уравнений переменную *y*, получим: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=x+z, \\ \dfrac{1}{z}=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{2x}, \\ \dfrac{1}{2x}=x \end{cases} \Leftrightarrow x=z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

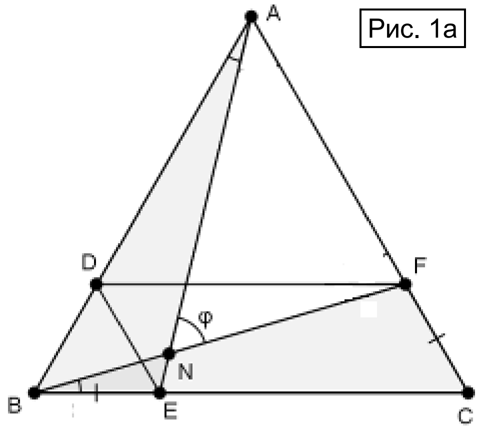
2) Если $xy=1$, то из первого уравнения следует, что $z=0$, тогда выражение $\dfrac{1}{z}$ не имеет смысла. Таким образом, этот случай невозможен.

Второй способ. Заметим, что $\begin{cases}\frac{1}{x}=y+z,\\ \frac{1}{y}=z+x,\\ \frac{1}{z}=x+y.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+x=x+y+z,\\ \frac{1}{y}+y=z+x+y,\\ \frac{1}{z}+z=x+y+z.\end{cases}$ Пусть $x+y+z=A$, тогда x, y и z – корни уравнения $\frac{1}{t}+t=A$, которое равносильно квадратному уравнению $t^2-At+1=0$. Так как квадратное уравнение имеет не более двух корней, то значения каких-то двух переменных должны быть одинаковыми. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассмотренным в пункте 1) первого способа.

2.2. На сторонах *AB*, *BC* и *CA* равностороннего треугольника *ABC* выбраны точки *D*, *E* и *F* соответственно так, что *DE* || *ÀC*, *DF* || *BC*. Найдите угол между прямыми *AE* и *BF*.

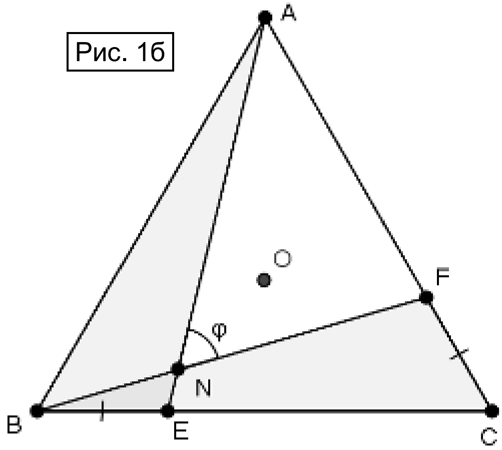
Ответ: 60°.

Решение. Пусть *AE* и *BF* пересекаются в точке *N*, тогда ∠*ANF* = φ – искомый (см. рис. 1а, б). Так как *CEDF* – параллелограмм, а треугольник *BDE* – равносторонний, то *BE* = *CF* (см. рис. 1а). Далее можно рассуждать по-разному.



Первый способ. Треугольники *BAE* и *CBF* равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, ∠*BAE* = ∠*CBF* = α, тогда ∠*ABF* = 60° – α. Угол *ANF* – внешний для треугольника *ABN*, значит, ∠*ANF* = ∠*BAE* + ∠*ABF* = 60°.

Второй способ. Рассмотрим поворот вокруг точки *O* – центра треугольника *ABC* на угол 120° против часовой стрелки (см. рис. 1б). При таком повороте вершина *A* перейдет в вершину B, сторона *BC* – в сторону *CA*, а так как *BE* = *CF*, то точка *E* перейдет в точку *F*. Следовательно, луч *AE* перейдет в луч *BF*. Угол между этими лучами равен углу поворота, то есть ∠*ENF* = 120°, значит, ∠*ANF* = 60°.



2.3. На доске записаны числа 20 и 100. Разрешается дописать на доску произведение любых двух имеющихся на ней чисел. Можно ли такими операциями когда-нибудь получить на доске число 50...0 (2015 нулей)?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Так как 20 = $2^2\cdot5$, 100 = $2^2\cdot5^2$, то изначально на доске записаны числа, в разложении которых простые множители двоек не меньше, чем пятерок. При умножении двух чисел, обладающим этим свойством, получится число с этим же свойством, то есть оно будет выполняться для всех чисел, записанных на доске. В разложении числа 50…0 на простые множители количество пятерок на 1 больше, чем количество двоек, поэтому его получить нельзя.

Эту же идею можно реализовать по-другому. Так как 20 = $2\cdot10$, 100 = 10^2, то любое число, которое будет дописано на доске имеет вид $2^k\cdot10^n$, где k и n – натуральные числа. Но 50...0 не является числом такого вида.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Сумма трех различных чисел равна 10, а разность между наибольшим и наименьшим равна 3. Какие значения может принимать число, среднее по величине?

Ответ: $\frac{7}{3} < b < \frac{13}{3}$.

Решение. Пусть $a+b+c=10$, $a>b>c$, $a-c=3$. Исходя из этих условий, найдем, в каких границах может находиться значение b. Исключив переменную a, получим: $b+2c=7$, $c+3>b>c$, что равносильно условиям $2c=7-b$ и $2c+6>2b>2c$. Тогда $13-b>2b>7-b \Leftrightarrow 13>3b>7 \Leftrightarrow \frac{13}{3}>b>\frac{7}{3}$.

3.2. Внутри параллелограмма *ABCD* выбрана точка *P* так, что ∠*APB* + ∠*CPD* = 180°. Докажите, что ∠*PBC* = ∠*PDC*.

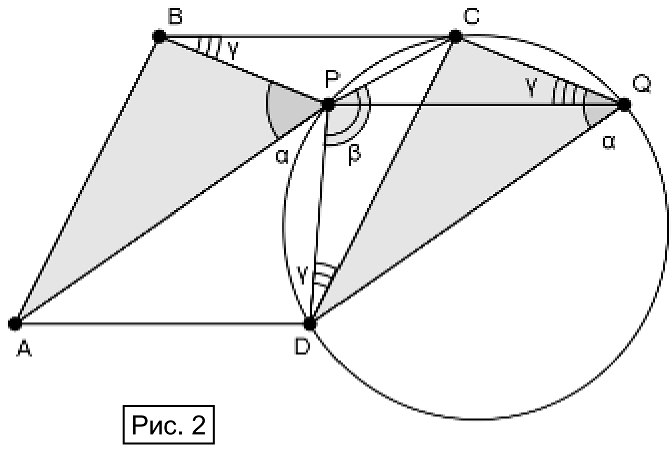


Рис. 2

Решение. Построим отрезок *CQ*, параллельный и равный отрезку *BP* (см. рис. 2). Тогда ∠*DCQ* = ∠*ABP* (углы с сонаправленными сторонами). Значит, равны треугольники *CDQ* и *BAP* (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, ∠*DQC* = ∠*APB*, значит, ∠*CPD* + ∠*DQC* = 180°. Таким образом, четырехугольник *CPDQ* – вписанный.

Проведя окружность, описанную около *CPDQ*, получим, что ∠*PDC* = ∠*PQC* (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Так как *BPQC* – параллелограмм, то ∠*PBC* = ∠*PQC* = ∠*PDC*, что и требовалось.

Дополнительное построение, использованное при решении, по сути является параллельным переносом на вектор $\overline{BC}$.

3.3. Каких натуральных чисел от 1 до 1 000 000 (включительно) больше: чётных с нечётной суммой цифр или нечётных с чётной суммой цифр?

Ответ: четных чисел с нечетной суммой цифр больше.

Решение. Рассмотрим произвольное число с нечетной суммой цифр. Если к нему справа приписать четную цифру, то получится четное число с нечетной суммой цифр. Если же справа приписать нечетную цифру, то получится нечетное число с четной суммой цифр. Так как приписать можно любую цифру от 0 до 9, то при выполнении такой операции получится одинаковое количество чисел с указанными свойствами.

Рассмотрим произвольное число с четной суммой цифр. Если к нему справа приписать четную цифру, то получится четное число с четной суммой цифр, а если приписать нечетную цифру, то получится нечетное число с нечетной суммой цифр. В обоих случаях мы получим числа, не обладающие ни одним из свойств, указанных в условии.

Эти рассуждения можно также представить в виде таблицы (цифрами 1 и 2 обозначены свойства, указанные в условии, взятые в том же порядке).

N	Ч	Ч	Ч	Ч	Н	Н	Н	Н
S(N)	Ч	Ч	Н	Н	Ч	Ч	Н	Н
Посл. цифра	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н
Рез.	–	–	1	2	–	–	1	2

Заметим, что среди чисел от 1 до 9 нет чисел, обладающих указанными свойствами, а все числа от 10 до 999 999 можно получить, приписывая последнюю цифру к числам от 1 до 99 999. Значит среди чисел от 1 до 999999 чисел с указанными свойствами поровну. Но еще есть четное число 1 000 000, у которого нечетная сумма цифр, поэтому таких чисел больше.

Эту же идею можно реализовать иначе. Назовём числа, о которых говорится в условии задачи, «интересными» Рассмотрим сначала первые два десятка. Среди чисел *от 1 до 9 интересных нет, а все числа от 10 до 19 будут интересными, причем их будет поровну: 5 чётных чисел с нечётной суммой цифр и 5 нечётных чисел с чётной суммой цифр.*

*Теперь рассмотрим произвольный десяток чисел, идущих подряд, от *0 до *9 (знаком * обозначена одна и та же последовательность цифр). Если сумма цифр в последовательности * чётная, то в этом десятке не встретится интересных чисел. Если же она нечётная, то все числа этого десятка будут интересными, и их опять-таки будет поровну каждого вида. Заметим, что при разбиении числового ряда от 10 до 999 999 на такие десятки, интересных чисел обоих видов получится поровну, но останется ещё число 1 000 000, которое, будучи чётным, имеет нечётную сумму цифр, поэтому таких чисел будет больше.*

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Сумма неотрицательных чисел x_1, x_2, ..., x_{10} равна 1. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_9x_{10}$.

Ответ: 0,25.

Решение. Первый способ. Заметим, что для неотрицательных чисел справедливо неравенство: $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_9x_{10} \le (x_1 + x_3 + \ldots + x_9)(x_2 + x_4 + \ldots + x_{10})$. Далее воспользуемся верным неравенством $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (*следствие из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим*).

Получим, что $(x_1 + x_3 + \ldots + x_9)(x_2 + x_4 + \ldots + x_{10}) \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Таким образом, $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_9x_{10} \le \frac{1}{4}$.

Равенство, например, достигается, если $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_{10} = 0$.

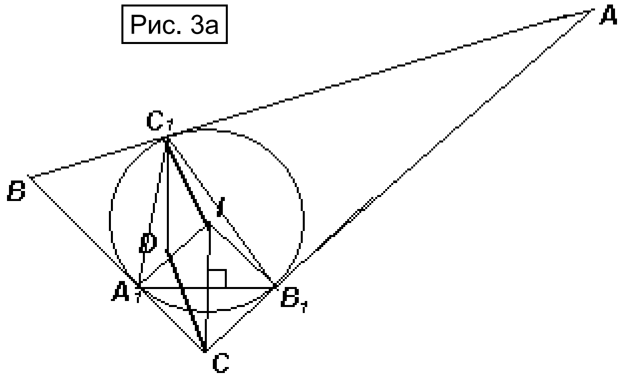
Второй способ. Пусть x_n – наибольшее из чисел x_1, x_2, ..., x_{10}. В каждом слагаемом заданной суммы, не содержащем x_n, заменим один из множителей на x_n, тогда эта сумма не уменьшится. Вынося x_n в полученной сумме за скобки, получим: $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_9x_{10} \le x_n(x_1 + x_2 + ... + x_{10} - x_n) = x_n(1 - x_n) \le \frac{1}{4}$ (*опять использовано неравенство* $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$).

Пример, когда достигается равенство, приведен выше.

4.2. Вписанная окружность прямоугольного треугольника *ABC* (угол *C* – прямой) касается сторон *AB*, *BC* и *CA* в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Высоты треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке *D*. Найдите расстояние между точками *C* и *D*, если длины катетов треугольника *ABC* равны 3 и 4.

Ответ: 1.

Рис. 3а



Решение. Пусть *I* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*, тогда A_1IB_1C – квадрат (см. рис. 3а). Заметим, что для треугольника $A_1B_1C_1$ эта окружность является описанной. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Рассмотрим четырехугольник CDC_1I и докажем, что это – параллелограмм (см. рис. 3а). Действительно, $IC \perp A_1B_1$ и $C_1D \perp A_1B_1$ (так как прямая C_1D содержит высоту треугольника $A_1B_1C_1$), поэтому

$IC \parallel C_1D$. Кроме того, $IC = C_1D$, так как в любом треугольнике расстояние от центра описанной окружности до середины стороны в два раза меньше, чем расстояние от противолежащей вершины до ортоцентра треугольника.

Из доказанного следует, что $CD = IC_1 = r$. Для вычисления радиуса r вписанной окружности треугольника ABC воспользуемся формулой $r = \dfrac{AC + BC - AB}{2}$. Учитывая, что $AB = 5$, получим, что $r = 1$.

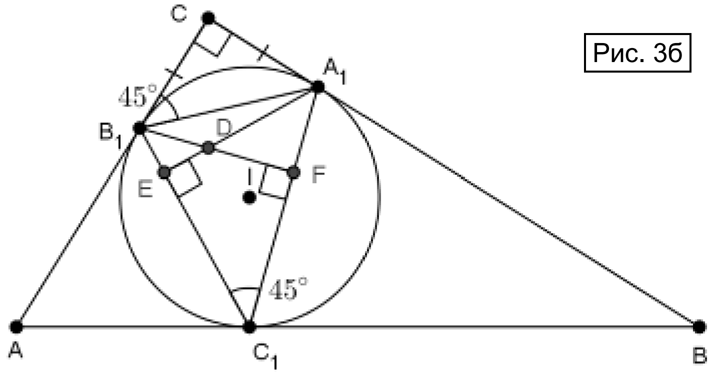


Рис. 3б

Второй способ. Используя теорему об угле между касательной и хордой и учитывая, что A_1IB_1C – квадрат, получим: $\angle B_1C_1A_1 = \angle CB_1A_1 = 45°$ (см. рис. 3б).

Пусть B_1F и A_1E – высоты треугольника $A_1B_1C_1$. Из четырехугольника DEC_1F найдем, что $\angle EDF = 135°$.

Рассмотрим окружность с центром C и радиусом $CB_1 = CA_1$ (см. рис. 3в). Докажем, что точка D лежит на этой окружности. Действительно, рассмотрим на такой окружности точку произвольную точку K на большей дуге B_1A_1. Тогда $\angle B_1KA_1 = \frac{1}{2}\angle B_1CA_1 = 45°$. Значит, $\angle B_1KA_1 + \angle B_1DA_1 = 45° + 135° = 180°$. Следовательно, четырехугольник B_1KA_1D – вписанный.

Таким образом, $CD = CB_1 = r$. Дальнейшие вычисления приведены выше.

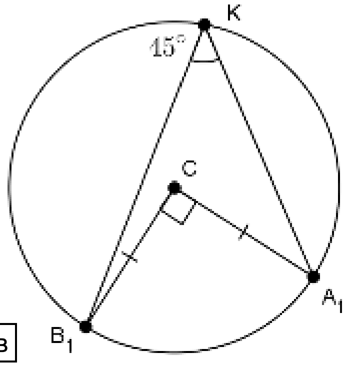


Рис. 3в

В заключительной фазе решения для вычисления CB_1 можно также использовать тот факт, что в любом треугольнике расстояние от вершины до точки касания равно разности полупериметра и противолежащей стороны.

4.3. Василиса Премудрая расставляет все натуральные числа от 1 до n^2, где $n > 1$, в клетки таблицы размером $n\times n$. Кандидат в женихи должен вычеркнуть строку и столбец так, чтобы сумма всех оставшихся чисел была четной. Всегда ли выполнимо такое задание?

Ответ: всегда.

Решение. Заметим, что четность суммы чисел в такой таблице $n\times n$ совпадает с четностью числа n. Объединение строки и столбца, в которых находится число в таблице, будем называть его «перекрестием». Тогда, если n – четное, то кандидат в женихи должен вычеркнуть перекрестие, в котором сумма чисел четна, а если n – нечетное, то он должен вычеркнуть перекрестие с нечетной суммой чисел.

Для каждого числа в таблице подсчитаем сумму чисел в его перекрестии и сложим все полученные суммы. Тогда каждое число из таблицы будет учтено $2n - 1$ раз, поэтому получим: $S = (2n - 1)(1 + 2 + \ldots + n^2)$. Следовательно, четность числа S совпадает с четностью числа n.

Пусть n – четное. Рассмотрим два случая:

1) В таблице есть строка или столбец с нечетной суммой чисел. Пусть, для определенности, это будет строка L, тогда среди чисел этой строчки найдется такое, что сумма чисел его перекрестия четна. Действительно, если такого перекрестия нет, то сумма чисел в каждом столбце без числа в строке L четна (иначе данное перекрестие было бы искомым), а значит, сумма чисел во всех строках, кроме L, четна. Но сумма чисел в самой строке L нечетна, а то это противоречит тому, что сумма всех чисел таблицы четна.

2) Во всех строках и столбцах таблицы сумма чисел четная. Тогда кандидату в женихи достаточно вычеркнуть перекрестие любого четного числа.

Пусть *n* – нечетное. Тогда, так как число *S* – нечетное, то в таблице найдется перекрестие с нечетной суммой чисел.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Существует ли квадратный трёхчлен, который при *x* = 2014; 2015; 2016 принимает значения 2015; 0; 2015 соответственно?

Ответ: да, существует.

Решение. Первый способ. Из условия задачи следует, что точки (2014; 2015) и (2016; 2015) должны принадлежать графику данного трехчлена (параболе). Так как они симметричны относительно прямой *x* = 2015, то эта прямая – ось параболы, тогда точка (2015; 0) – ее вершина. Следовательно, формула искомого трехчлена имеет вид: $f(x)=a(x-2015)^2$. Значение a можно найти либо подстановкой любой из пар (2014; 2015) или (2016; 2015) в полученное уравнение, либо зная, что a – коэффициент растяжения от оси абсцисс, при котором график искомого трехчлена получается из графика трехчлена $f(x)=(x-2015)^2$. Получим, что a = 2015, то есть $f(x)=2015(x-2015)^2$.

Второй способ. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ – искомый квадратный трехчлен. Из условия задачи следует, что $f(2014)=f(2016)=2015$, $f(2015)=0$, $x_1=2015$ – корень трехчлена. Следовательно, $ax^2+bx+c=a(x-2015)(x-x_2)$.

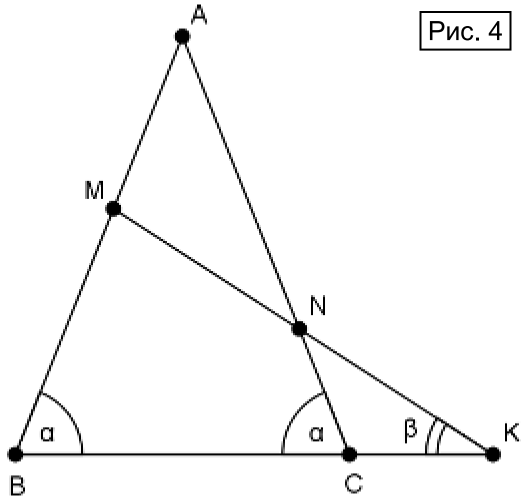
После подстановки условий, записанных выше, получим систему уравнений: $\begin{cases} a(2014-2015)(2014-x_2)=2015, \\ a(2016-2015)(2016-x_2)=2015 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a(2014-x_2)=2015, \\ a(2016-x_2)=2015 \end{cases}$. Следовательно, $a(2016-x_2)=-a(2014-x_2) \Leftrightarrow 2016-x_2=x_2-2014 \Leftrightarrow x_2=2015$, то есть $x_1=x_2=2015$. Подставив x_2 в любое из уравнений системы, получим, что $a=2015$. Тогда $f(x)=2015(x-2015)^2$.

5.2. На сторонах *AB* и *AC* равнобедренного треугольника *ABC* (*AB* = *AC*) соответственно отмечены точки *M* и *N* так, что *AN* > *AM*. Прямые *MN* и *BC* пересекаются в точке *K*. Сравните длины отрезков *MK* è *MB.*

Ответ: *MK* > *MB.*

Решение. Пусть $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$, $\angle NKC = \beta$ (см. рис. 4). Так как угол *ACB* – внешний для треугольника *CNK*, то $\alpha > \beta$. В треугольнике *BKM* против большего угла лежит большая сторона, значит, *MK* > *MB.*

Рис. 4



5.3. Можно ли расставить натуральные числа от 1 до 10 в ряд так, чтобы каждое число было делителем суммы всех предыдущих?

Ответ: да, можно.

Решение. Например, так: 7, 1, 8, 4, 10, 6, 9, 3, 2, 5.

Существуют и другие примеры. Отметим, что в любом примере на последнем месте должно стоять либо 1, либо 5. Действительно, последнее число x должно быть делителем числа (1 + 2 + ... + 10) – x = 55 – x, следовательно, оно должно быть делителем числа 55.