10 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. На координатной плоскости изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенству: $x^2y - y \geq 0$.

Ответ: см. рис. 1.

Решение. $x^2y - y \geq 0 \Leftrightarrow y(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ |x| \geq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \leq 0, \\ |x| \leq 1 \end{cases}$.

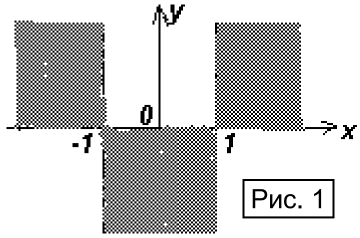


Рис. 1

1.2. В выпуклом четырехугольнике тангенс одного из углов равен числу m. Могут ли тангенсы каждого из трех остальных углов также равняться m?

Ответ: не могут.

Решение. Из условия задачи следует, что в четырехугольнике нет прямых углов. Так как сумма его углов равна 360°, то все его углы не могут быть одновременно ни тупыми, ни острыми. Следовательно, в четырехугольнике есть хотя бы один тупой угол и хотя бы один острый угол. Но тангенсы тупого и острого углов имеют разные знаки, поэтому они между собой не равны.

1.3. Можно ли поставить в ряд все натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы любые два соседних числа отличались или на 2, или в два раза?

Ответ: можно.

Решение. Например, так: 99, 97, ..., 3, 1, 2, 4, ..., 98, 100 (сначала нечетные числа в порядке убывания, затем четные числа в порядке возрастания).

Существуют и другие примеры.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. ($\sin x$, $\sin y$, $\sin z$) – возрастающая арифметическая прогрессия. Может ли последовательность ($\cos x$, $\cos y$, $\cos z$) также являться арифметической прогрессией?

Ответ: не может.

Решение. <u>Первый способ</u>. Предположим, что ($\cos x$, $\cos y$, $\cos z$) – арифметическая прогрессия. Тогда $2\cos y = \cos x + \cos z$. Из условия задачи следует, что $2\sin y = \sin x + \sin z$. Возведем в квадрат каждое из этих равенств и почленно сложим. Получим: $4\cos^2 y + 4\sin^2 y = \cos^2 x + 2\cos x\cos z + \cos^2 z + \sin^2 x + 2\sin x\sin z + \sin^2 z \Leftrightarrow \cos(x - z) = 1 \Leftrightarrow x - z = 2\pi n$, $n \in Z$. Следовательно, $\sin x = \sin(z + 2\pi n) = \sin z$, что противоречит условию задачи.

<u>Второй способ</u>. На координатной плоскости рассмотрим точки $A(\cos x; \sin x)$, $B(\cos y; \sin y)$ и $C(\cos z; \sin z)$. Тогда $\overline{AB}(\cos y - \cos x; \sin y - \sin x)$, $\overline{BC}(\cos z - \cos y; \sin z - \sin y)$.

Если каждая из последовательностей ($\cos x$, $\cos y$, $\cos z$) и ($\sin x$, $\sin y$, $\sin z$) является арифметической прогрессией, то соответствующие координаты этих векторов равны, значит, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Из условия задачи следует, что эти векторы не нулевые, следовательно, точки A, B и C должны лежать на одной прямой. С другой стороны, эти три точки лежат на единичной окружности. Одновременно это невозможно, так как прямая и окружность не могут иметь три общие точки.

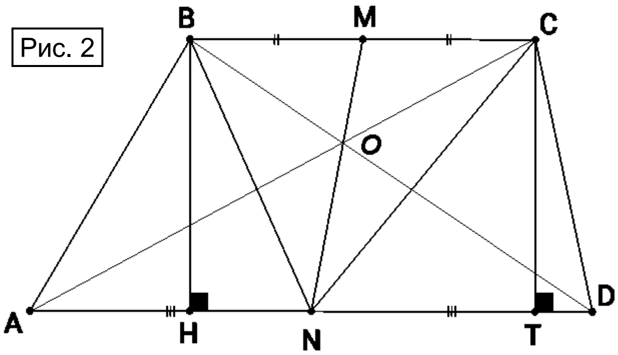
2.2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, M и N – середины сторон BC и AD соответственно. Отрезок MN делит площадь четырехугольника пополам. Найдите отношение $OM : ON$, если $AD = 2BC$.

Ответ: 1 : 2.

Решение. Докажем, что $ABCD$ – трапеция. Действительно, проведем, например, отрезки BN и CN (см. рис 2). Тогда NM – медиана треугольника BNC, поэтому равны площади треугольников BNM и CNM.

По условию, MN делит площадь $ABCD$ на две равные части, значит, $S_{ABN} = S_{DCN}$. Кроме того, у треугольников ABN и DCN равны основания: $AN = DN$, поэтому их высоты BH и CT также равны. Следовательно, $AD \parallel BC$, то есть $ABCD$ – трапеция.

Рис. 2



Тогда точка O лежит на отрезке MN, à треугольники AOD и COB подобны с коэффициентом $k = \frac{AD}{BC} = 2$.

Так как ON и OM – соответствующие медианы этих треугольников, то $ON : OM = k$, то есть $OM : ON = 1 : 2$.

2.3. Число 1047 при делении на A дает остаток 23, а при делении на $A + 1$ – остаток 7. Найдите A.

Ответ: 64.

Решение. Так как 1047 дает остаток 23 при делении на A, то $1047 - 23 = 1024$ делится на A. Аналогично, 1047 дает остаток 7 при делении на $A + 1$, значит, $1047 - 7 = 1040$ делится на $A + 1$. Так как $1024 = 2^{10}$, то $A = 2^n$, где n – натуральное и $n \le 10$. При этом, $A > 23$, поэтому $n \ge 5$. Осталось выяснить, какие из чисел: $2^5 + 1$, $2^6 + 1$, $2^7 + 1$, $2^8 + 1$, $2^9 + 1$, $2^{10} + 1$ являются делителями числа 1040. Непосредственной проверкой убеждаемся, что этому условию удовлетворяет только одно из этих чисел: $2^6 + 1 = 65$. Следовательно, $A = 2^6$.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Пусть a, b, c, d – действительные числа, удовлетворяющие системе равенств: $\begin{cases} \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=6 \\ \frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=8 \end{cases}$. Какие значения может принимать выражение $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

Ответ: 2 или 4.

Решение. Пусть $x=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, $y=\frac{b}{c}+\frac{d}{a}$, тогда $x+y=6$ и $x\cdot y=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{a}\right)$ = $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{d}{b}+\frac{c}{a}$ = 8. Следовательно, x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2-6t+8=0$. Так как $t_1=2$, $t_2=4$, то $x=2$ или $x=4$.

3.2. Все грани треугольной пирамиды $SABC$ – остроугольные треугольники. SX и SY – высоты граней ASB и BSC. Известно, что четырехугольник $AXYC$ – вписанный. Докажите, что прямые AC и BS перпендикулярны.

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть H – проекция точки S на плоскость ABC, тогда по теореме о трех перпендикулярах $HX \perp AB$ и $HY \perp BC$ (см. рис. 3а).

Рассмотрим треугольник ABC (см. рис. 3б). Пусть $\angle BÀH = x$. По условию, четырехугольник $AXYC$ – вписанный, следовательно, $\angle BYX = \angle BÀH = x$. Кроме того, $\angle BXH = \angle BYH = 90^\circ$, поэтому четырехугольник $BXHY$ также вписанный. Тогда $\angle ÀBH = \angle XYH = 90^\circ - x$. Таким образом, $\angle ÀBH + \angle BÀH = 90^\circ$, значит, $BH \perp AC$. Следовательно, $BS \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

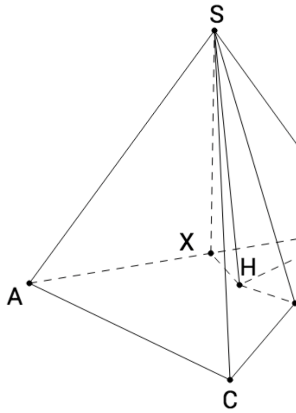


Рис. 3а

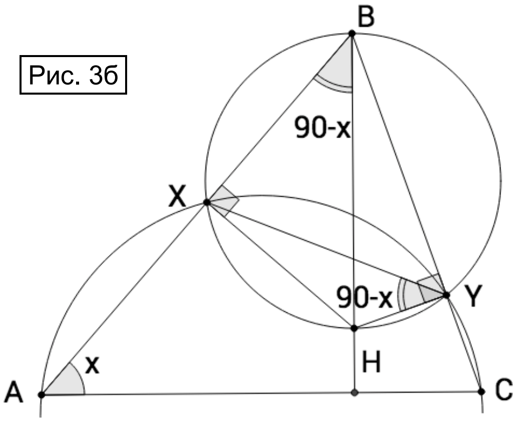


Рис. 3б

Второй способ. Проведем высоту *AZ* в грани *SAB* (см. рис. 3в). Тогда точки *A*, *X*, *Z* и *S* лежат на одной окружности. По теореме об отрезках секущих (*о степени точки*): *BX*·*BA* = *BZ*·*BS*. По условию, четырехугольник *AXYC* – вписанный, следовательно, используя ту же терему, получим: *BX*·*BA* = *BY*·*BC*.

Из двух полученных равенств следует, что *BZ*·*BS* = *BY*·*BC*. Это означает, что точки *C*, *Y*, *Z* и *S* также лежат на одной окружности. Тогда ∠*CZS* = ∠*CYS* = 90°.

Таким образом, *BS*⊥*ZA* и *BS*⊥*ZÑ*, значит, *BS*⊥(*AZC*), поэтому *BS*⊥*AC*.

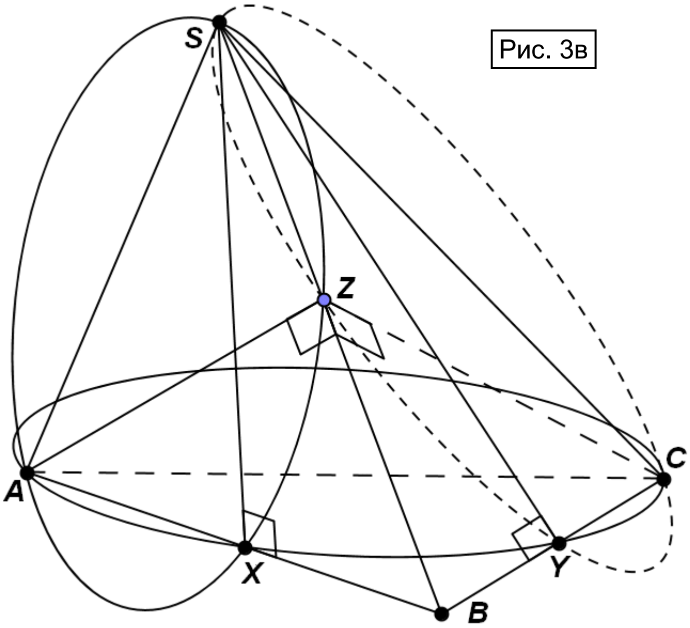


Рис. 3в

3.3. Кодовый замок откроется, если в каждой клетке квадрата размером 4×4 набрать число от 1 до 16 (не повторяясь) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была кратна 17. Можно ли открыть такой замок?

Ответ: можно.

Решение. Например, см. рис. 4. Проверкой убеждаемся, что сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 34.

Рис. 4

1	16	2	15
4	13	3	14
5	12	6	11
8	9	7	10

Этот пример можно построить, исходя из таких соображений: сначала «замостим» данный квадрат горизонтальными «доминошками» и в каждую из них поставим два числа с суммой 17. После этого надо добиться, чтобы суммы чисел в трех квадратах, расположенных в столбцах 2 и 3, также были кратны 17. Заметим, что в горизонтальных «доминошках» этих квадратов сумма чисел уже не может быть равной 17. Но можно сделать эти суммы больше семнадцати и меньше семнадцати на одно и то же число попеременно.

В приведённом примере эти суммы соответственно равны: 17 + 1, 17 – 1, 17 + 1, 17 – 1. Существуют и другие примеры.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Сто положительных чисел записаны по кругу. Квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, стоящих за этим числом по часовой стрелке. Какие числа могут быть записаны?

Ответ: каждое из записанных чисел равно 2.

Решение. Первый способ. Пусть x_1, x_2, ..., x_{100} – записанные числа. Тогда $x_1^2 = x_2 + x_3$, $x_2^2 = x_3 + x_4$, ..., $x_{99}^2 = x_{100} + x_1$; $x_{100}^2 = x_1 + x_2$. Без ограничения общности можно считать, что

x_1 – наименьшее из чисел (возможно, не единственное), тогда $x_2 + x_3$ – наименьшая из сумм двух чисел. Следовательно, $x_1^2 = x_2 + x_3 \le x_1 + x_2 = x_{100}^2$, поэтому $x_3 \le x_1$ Таким образом, $x_1 = x_3$ и $x_1 = x_{100}$. Аналогично, $x_3^2 = x_4 + x_5 \le x_3 + x_4 = x_5^2$, поэтому $x_3 = x_5$.

Двигаясь по часовой стрелке и действуя аналогично, получим: $x_{100} = x_1 = x_3 = x_5 = ... = x_{99}$, тогда равенство $x_{99}^2 = x_{100} + x_1$ равносильно тому, что $x^2 = 2x$ и $x > 0$, откуда следует, что каждое из этих чисел равно 2. Значит, $x_{100} = x_1 = x_3 = x_5 = ... = x_{99} = 2$, тогда, вычисляя остальные числа, стоящие по кругу, получим, что каждое из них равно 2.

Второй способ. Очевидно, что если каждое из записанных чисел равно 2, то условие задачи выполняется. Докажем, что других вариантов быть не может.

Действительно, пусть найдутся числа, большие двух. Рассмотрим наибольшее среди них число a, тогда $a = 2 + t$, где $t > 0$. Сумма двух чисел, следующих за a, равна $(2 + t)^2 = 4 + 4t + t^2 > 4 + 2t = 2(2 + t) = 2a$. Значит хотя бы одно из двух следующих чисел больше, чем a. Противоречие.

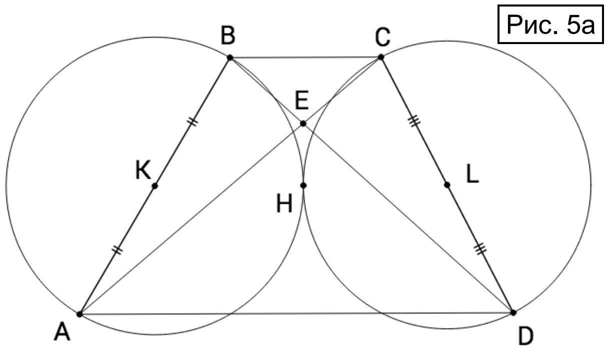
Аналогично, если найдутся числа, меньшие двух, то рассмотрим число b, наименьшее среди них, тогда .$b = 2 – t$, где $0 < t < 2$. Сумма двух чисел, следующих за b, равна $(2 – t)^2 < 4 – 2t = 2b$, так как $(2 – t)^2 < 4 – 2t \Leftrightarrow 4 – 4t + t^2 < 4 – 2t \Leftrightarrow t^2 – 2t < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 2$. Значит хотя бы одно из двух следующих чисел меньше, чем b. Противоречие.

Полученные противоречия показывают, что среди записанных чисел нет чисел, отличных от 2.

Отметим, что первую часть второго способа решения можно заменить такой оценкой: сложим почленно данные сто равенств. Получим: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{100}^2 = 2(x_1 + x_2 + ... + x_{100})$. *По неравенству между средним квадратичным и средним арифметическим* $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{100} x_i^2}{100}} \ge \dfrac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i^2 \ge \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)^2}{100}$. *Тогда, учитывая полученное равенство:* $\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)^2 \le 200\sum_{i=1}^{100} x_i$. *Следовательно,* $\sum_{i=1}^{100} x_i \le 200$, *поэтому среди данных чисел найдутся те, которые не превосходят двух.*

4.2. Трапеция с основаниями AD и BC описана вокруг окружности, E – точка пересечения ее диагоналей. Докажите, что угол AED – тупой.

Рис. 5а



Решение. Первый способ. Пусть K и L – середины боковых сторон AB и CD данной трапеции (см. рис. 5а). Построим окружности, диаметрами которых являются эти стороны, и докажем, что окружности касаются. Действительно, так как трапеция – описанная, то сумма радиусов построенных окружностей равна $\frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = KL$. Таким образом, сумма радиусов окружностей равна расстоянию между их центрами, то есть окружности касаются в некоторой точке H.

Точка E пересечения диагоналей трапеции не может лежать на ее средней линии, поэтому она не совпадает с H. Докажем, что точка E лежит вне построенных кругов. Действительно, если это не так, то она принадлежит одному из кругов, но не принадлежит другому. Следовательно, из двух углов AEB и CED, один угол – тупой или прямой, а другой – острый. Но это невозможно, так как эти углы – вертикальные.

Полученное противоречие показывает, что E лежит вне кругов, значит, $\angle AEB = \angle CED < 90°$, тогда $\angle AED > 90°$, что и требовалось.

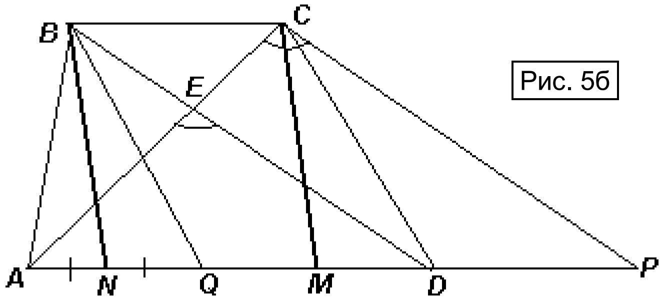


Рис. 5б

Второй способ. Через вершину C проведем прямую, параллельную диагонали BD, которая пересечет AD в точке P (см. рис. 5б). Тогда $\angle ACP$ = $\angle AED$ и $DP = BC$, значит, $AP = AD + BC$. Через вершину B проведем прямую, параллельную стороне ÑD, которая пересечет AD в точке Q. Тогда $BQ = CD$ и $QD = BC$, значит, $AQ = AD – BC$.

Пусть N – середина AQ, M – середина AP. Из треугольника ABQ: $BN < \frac{AB+BQ}{2}$ = $\frac{AB+CD}{2}$ = $\frac{AD+BC}{2}$ (последнее равенство следует из того, что трапеция $ABCD$ – описанная). Кроме того, $MN = AM – AN$ = $\frac{AD+BC}{2}$ – $\frac{AD-BC}{2}$ = BC, значит, $BCMN$ – параллелограмм. Тогда $CM = BN$ < $\frac{AD+BC}{2}$ = $\frac{AP}{2}$. Так как CM – медиана треугольника ACP, то $\angle ACP$ $\angle AED$ > 90°, что и требовалось.

4.3. В правильном 21-угольнике 6 вершин покрашены красным цветом, а 7 вершин – синим. Обязательно ли найдутся два равных треугольника, один из которых с красными вершинами, а другой – с синими?

Ответ: обязательно.

Решение. Рассмотрим повороты вокруг центра данного многоугольника на все углы вида $\frac{360^\circ}{21}\cdot k$, где k = 1; 2; ...; 20, например, по часовой стрелке. Тогда каждая синяя точка попадет по одному разу в каждую из остальных вершин 21-угольника. Следовательно, каждая синяя точка по одному разу совпадёт с каждой красной точкой, то есть всего таких совпадений будет $6\cdot 7 = 42$. Так как все такие совпадения приходятся на 20 ненулевых поворотов (в исходном положении совпадений нет), то, по принципу Дирихле, найдется поворот, при котором будет не менее трех совпадений. Значит, при этом повороте образом какого-то треугольника с синими вершинами является треугольник с красными вершинами. Следовательно, эти треугольники равны.

Эту же идею можно реализовать иначе. Количество различных пар, состоящих из одной синей и одной красной точки: 6·7 = 42. Опишем окружность около данного многоугольника и поставим в соответствие каждой такой паре длину дуги от синей точки до красной, двигаясь, например, по часовой стрелке. Различных значений длин таких дуг – 20, поэтому хотя бы три значения длин дуг совпадают. Получим три пары точек разного цвета, которые и определят равные треугольники с синими и красными вершинами.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Решите уравнение: $8\sqrt{xy} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} + 1)$.

Ответ: (0; 0); (1; 1).

Решение. Так как слагаемые в каждой скобке правой части уравнения неотрицательны, то, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим: $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \ge \sqrt[4]{xy}$, $\frac{\sqrt{x}+1}{2} \ge \sqrt[4]{x}$ и $\frac{\sqrt{y}+1}{2} \ge \sqrt[4]{y}$.

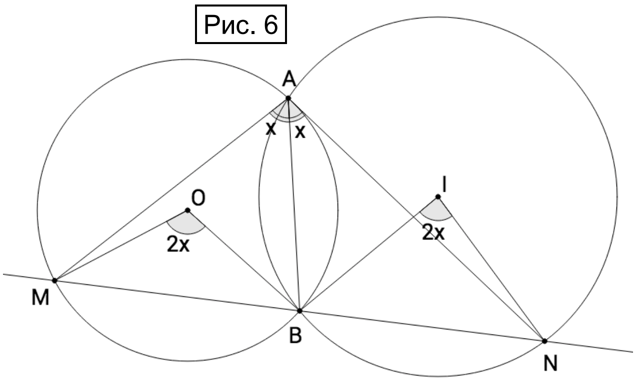
Перемножим почленно эти неравенства и умножим обе части полученного неравенства на 8: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} + 1) \ge 8\sqrt{xy}$. Следовательно, равенство достигается тогда и только тогда, когда каждое из трех неравенств обращается в равенство или когда значения обеих частей уравнения равны нулю. Значит, $\sqrt{x} = \sqrt{y} = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$ или $x = y = 0$.

Перед тем, как использовать неравенство о средних, можно сделать замену переменных: $\sqrt{x} = a \geq 0$; $\sqrt{y} = b \geq 0$.

5.2. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Через точку *B* проведена прямая, пересекающая окружности в точках *M* и *N* так, что *AB* – биссектриса треугольника *MAN*. Докажите, что отношение отрезков *BM* и *BN* равно отношению радиусов окружностей.

Решение. Пусть *O* и *I* – центры данных окружностей, а *R* и *r* соответственно – их радиусы (см. рис. 6).

Рис. 6



Первый способ. Так как $\angle MOB = 2\angle MÀB = 2\angle NÀB = \angle NIB$, то равнобедренные треугольники *MOB* и *NIB* подобны. Тогда *BM* : *BN* = *OM* : *IN* = *R* : *r*, что и требовалось.

Второй способ. Обозначим: $\angle MÀB = \angle NÀB = x$. По следствию из теоремы синусов для треугольников *MÀB* и *NÀB*: *BM* = 2*R*sin*x*, *BN* = 2*r*sin*x*. Тогда $\frac{BM}{BN} = \frac{R}{r}$, что и требовалось.

5.3. Какие значения может принимать наибольший общий делитель натуральных чисел *m* è *n*, если известно, что при увеличении числа *m* на 6 он увеличивается в девять раз?

Ответ: 3 или 6.

Решение. Пусть НОД(*m*; *n*) = *k*, тогда *m* = *kx*, *n* = *ky*, где *x* и *y* – натуральные числа Так как НОД(*m* + 6; *n*) = 9*k*, то *kx* + 6 делится на 9*k*, то есть *kx* + 6 = 9*kz*, $z \in N$. Тогда *k*(9*z* – *x*) = 6. Значит *k* – делитель числа 6. Кроме того, каждое из чисел *m* + 6 и *n* делится на 9, поэтому *m* делится 3. Следовательно, *k* делится на 3. Таким образом, достаточно проверить *k* = 3 и *k* = 6. Покажем, что оба случая возможны.:

1) Пусть *m* = 21, *n* = 27, тогда НОД(21; 27) = 3, НОД(27; 27) = 27.
2) Пусть *m* = 48, *n* = 54, тогда НОД(48; 54) = 6, НОД(54; 54) = 54.