Условия задач заочного тура

Задача 1. [8] Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P. Перпендикуляры к AC и BD в точках C и D, соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны.

Задача 2. [8, 9] Разрежьте крест, составленный из пяти одинаковых квадратов, на три многоугольника, равных по площади и периметру.

Задача 3. [8, 9] Дана окружность и точка K внутри нее. Произвольная окружность, равная данной и проходящая через точку K, имеет с данной окружностью общую хорду. Найдите геометрическое место середин этих хорд.

Задача 4. [9 – 11] При каком наименьшем n существует выпуклый n-угольник, у которого синусы всех углов равны, а длины всех сторон различны?

Задача 5. [8 – 10] Имеются две параллельные прямые p_1 и p_2. Точки A и B лежат на p_1, а C — на p_2. Будем перемещать отрезок BC параллельно самому себе и рассмотрим все треугольники $AB'C'$, полученные таким образом. Найдите геометрическое место точек, являющихся в этих треугольниках:

а) точками пересечения высот;

б) точками пересечения медиан;

в) центрами описанных окружностей.

Задача 6. [10, 11] Сторону AB треугольника ABC разделили на n равных частей (точки деления $B_0 = A, B_1, B_2, \dots, B_n = B$), а сторону AC этого треугольника разделили на $(n+1)$ равных частей (точки деления $C_0 = A, C_1, C_2, \dots, C_{n+1} = C$). Закрасили треугольники $C_iB_iC_{i+1}$ (где $i = 1, 2, \dots, n$). Какая часть площади треугольника закрашена?

Задача 7. [8, 9] Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке O. Вершина A правильного треугольника ABC лежит на большей окружности, а середина стороны BC — на меньшей. Чему может быть равен угол BOC?

Задача 8. [8, 9] Вокруг выпуклого четырехугольника $ABCD$ описаны три прямоугольника. Известно, что два из этих прямоугольников являются квадратами. Верно ли, что и третий обязательно является квадратом?
(Прямоугольник описан около четырехугольника $ABCD$, если на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине $ABCD$).

Задача 9. [9] Пусть O — центр правильного треугольника ABC. Из произвольной точки P плоскости опустили перпендикуляры на стороны треугольника. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров. Докажите, что M — середина отрезка PO.

Задача 10. [8, 9] Разрежьте неравносторонний треугольник на четыре подобных треугольника, среди которых не все одинаковые.

Задача 11. [8 – 10] Квадрат разрезали на n прямоугольников со сторонами $a_i \times b_i$, $i = 1, \ldots, n$. При каком наименьшем n в наборе $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ все числа могут оказаться различными?

Задача 12. [8, 9] Постройте четырехугольник по заданным сторонам a, b, c и d и расстоянию l между серединами его диагоналей.

Задача 13. [9] Дан треугольник ABC и две прямые l_1, l_2. Через произвольную точку D на стороне AB проводятся прямая, параллельная l_1, пересекающая AC в точке E, и прямая, параллельная l_2, пересекающая BC в точке F. Постройте точку D, для которой отрезок EF имеет наименьшую длину.

Задача 14. [10, 11] Пусть P — произвольная точка внутри треугольника ABC. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP, BP и CP соответственно со сторонами BC, CA и AB. Упорядочим площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, обозначив меньшую через S_1, среднюю — S_2, а большую — S_3. Докажите, что

$$\sqrt{S_1S_2} \leqslant S \leqslant \sqrt{S_2S_3},$$

где S — площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Задача 15. [11] Дана окружность с центром в начале координат. Докажите, что найдется окружность меньшего радиуса, на которой лежит не меньше точек с целыми координатами.

Задача 16. [8, 9] Взяли неравносторонний остроугольный треугольник и отметили в нем 4 замечательные точки: центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести (точка пересечения медиан) и точку пересечения высот. Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому из центров соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.

Задача 17. [11] В треугольник ABC вписана окружность и отмечены ее центр I и точки касания P, Q, R со сторонами BC, CA и AB соответственно. Одной линейкой постройте точку K, в которой окружность, проходящая через вершины B и C, касается (внутренним образом) вписанной окружности.

Задача 18. [10, 11] На плоскости даны три прямые l_1, l_2, l_3, образующие треугольник, и отмечена точка O — центр описанной окружности этого треугольника. Для произвольной точки X плоскости обозначим через X_i точку, симметричную точке X относительно прямой l_i, $i = 1, 2, 3$.

а) Докажите, что для произвольной точки M прямые, соединяющие середины отрезков O_1O_2 и M_1M_2, O_2O_3 и M_2M_3, O_3O_1 и M_3M_1, пересекаются в одной точке;

б) где может лежать эта точка пересечения?

Задача 19. [8 – 11] Как известно, Луна вращается вокруг Земли. Будем считать, что Земля и Луна — это точки, и Луна вращается вокруг Земли по круговой орбите с периодом один оборот в месяц.

Летающая тарелка находится в плоскости лунной орбиты. Она может перемещается прыжками через Луну и Землю — из старого места (точки A) она моментально появляется в новом (в точке A') так, что в середине отрезка AA' находится или Луна, или Земля. Между прыжками летающая тарелка неподвижно висит в космическом пространстве.

1) Определите, какое минимальное количество прыжков потребуется летающей тарелке, чтобы допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты.

2) Докажите, что летающая тарелка, используя неограниченное количество прыжков, может допрыгуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты за любой промежуток времени, например, за секунду.

Задача 20. [11] Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, A', B', C', D' — центры сфер, описанных около тетраэдров $IBCD$, $ICDA$, $IDAB$, $IABC$ соответственно. Докажите, что сфера, описанная около $ABCD$, целиком лежит внутри сферы, описанной около $A'B'C'D'$.

Задача 21. [10, 11] Планета "Тетраинкогнито", покрытая "океаном", имеет форму правильного тетраэдра с ребром 900 км. Какую площадь океана накроет "цунами" через 2 часа после тетратрясения с эпицентром в

а) центре грани,

б) середине ребра,

если скорость распространения цунами 300 км/час?

Задача 22. [10, 11] К граням тетраэдра восставлены перпендикуляры в их центрах тяжести (точках пересечения медиан). Докажите, что проекции трех перпендикуляров на четвертую грань пересекаются в одной точке.

Задача 23. [10, 11] Оклейте куб в один слой пятью равновеликими выпуклыми пятиугольниками.

Задача 24. [10, 11] Дан треугольник, все углы которого меньше φ, где $\varphi < 2\pi/3$. Докажите, что в пространстве существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом φ.