От Президента Турнира.

На Турнире городов в этом году, как и в предыдущие годы, предложено несколько новых задач. Вы не найдете эти задачи ни в каких задачниках или научных статьях. Откуда берутся эти задачи? Их присылают в Центральное жюри Турнира работающие математики. Решая свои задачи, они время от времени наталкиваются на вопросы, которые можно сформулировать как задачи для школьников. И ответы на эти вопросы в равной степени новы как для авторов задач, так и для участников Турнира городов. Так что участвуя в Турнире, вам удалось на некоторое время побывать на той границе, которая отделяет известное от неизвестного, и почувствовать себя открывателями нового.

Профессиональные математики и участники Турнира городов в принципе делают одно и то же: решают задачи. Разница в трудности и широте охвата материала. Хорошая олимпиадная задача требует пяти часов работы, а хорошая задача для профессионала — пяти тысяч часов — вот и вся разница (это слова известного русского математика Бориса Николаевича Делоне, инициатора первых математических олимпиад в России). Причем трудная олимпиадная задача трудна и нова не только для школьника, но и для профессионала — ведь он тоже не знает метода ее решения, и все его прошлые знания могут оказаться бесполезными.

Чему же учатся школьники, решая олимпиадные задачи?

Во-первых ясности. Решая задачу, нужно добиваться полной прозрачности всей рассматриваемой картины и полной ясности ее логического устройства.

Во-вторых собранности. На какие-то промежутки времени необходимо полностью погружаться в мир задачи. Эти промежутки могут быть двухминутные, десятиминутные или часовые. Величина промежутков зависит от индивидуальных особенностей человека, но в процессе самовоспитания может возрастать.

В-третьих, решая задачи, человек узнает новые факты, знание которые помогает ориентироваться в новых задачах. Знания, приобретенные таким опытом, намного ценнее, чем те, которые получены путем пассивного слушания лекций или чтения книг (но к математической книге можно относиться как к задачнику и получать также сверхценные знания).

В-четвертых, за несколько десятилетий существования математических олимпиад собралось уже так много прекрасных идей, впервые сформулированных в олимпиадных задачах, что можно говорить о некотором новом восприятии математики, порожденном олимпиадами. Эта мысль подтверждается тем, что большинство ныне работающих математиков в молодости успешно прошло через олимпиады.

Большинство — но не все! Теперь уместно сказать и о двух коренных отличиях олимпиад от профессиональной математики.

Первое. Олимпиада — это соревнование с ограниченным временем, фактически — соревнование на скорость. Для математики четыре-пять часов — спринтерская гонка. Эта сторона олимпиады не просто не имеет отношения к науке, но и враждебна к ней.

Второе. На олимпиаде задача дана — и точка. Откуда она взялась и зачем ее решать — неизвестно. Часто математик решает задачу, которую он считает шагом к главной задаче. И иной раз самое мудрое — это отказаться от решения вспомогательной задачи и думать, как без нее обойтись. Кроме того, в науке чуть ли не главное — это найти свое направление, заняться именно тем, что считаешь самым важным.

И многие выдающиеся математики плохо решают олимпиадные задачи.

Мы понимаем, что сам формат Турнира, проводимого как олимпиада, ограничивает его возможности. Поэтому организаторы Турнира вносят в работу со школьниками изменения, в какой-то степени исправляющие эти недостатки.

Во-первых, это правило зачета по трем задачам. Это сделано для того, чтобы во время решения задач не было смысла торопиться. Кроме того, если бы учитывались все задачи, можно было бы набрать приличное количество баллов, не решив ни одной задачи (за счет минус-плюсов). Такой результат несомненно слабый.

Во-вторых, это публикации тренировочных задач. В некоторых городах, например в Торонто, разбор этих задач организован как первый тур всего мероприятия (тренировочный и сложный варианты — это второй и третий туры).

В-третьих, это Летняя конференция Турнира городов, где на неделю даются несколько трудных задач на выбор. Редко случается, что какая-либо задача кем-нибудь полностью решается во время конференции — такова трудность задач. Режим работы свободный, задачи можно решать и днем и ночью, разрешаются совместные работы. И главная цель состоит не в том, чтобы обогнать друг друга (хотя никому не запрещается ставить перед собой такие цели), а в том, чтобы максимально продвинуться в решении трудной задачи, в частности решить пункты, которые еще вообще никем не решены (в том числе членами Жюри, предложившими задачу).

Такой стиль работы приближен к стилю исследовательской работы. К сожалению, мы пока не можем организовать такую конференцию для большого числа людей.

В заключение несколько слов об особенностях нынешнего Турнира. Он оказался более сложным, чем мы расчитывали. Для людей с крепкими нервами он стал тяжелым, но полезным испытанием. Но жалко, если некоторые школьники почувствовали разочарование в своих силах. Коэффициент 1.6, данный сложному варианту младших классов для сопоставления результатов с прошлогодними, не помог тем, кто не решил ни одной задачи, так как ноль умножать бесполезно.

Полный отчет о 25 Турнире городов будет опубликован после окончания Турнира. Кроме всего, что содержится в первой части, которую Вы держите в руках, в нем будут приведены итоговые результаты городов-участников и список дипломантов Турнира. В этом списке против фамилии каждого дипломанта будут приведены результаты его участия в том из туров этого Турнира, в котором он добился наивысших успехов.

Н. Константинов

ДВАДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, 19 октября 2003 г.

8 – 9 классы, тренировочный вариант.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Каждая грань параллелепипедной коробки с ребрами 3, 4, 5 разделена на единичные квадратики. Можно ли вписать во все квадратики по числу так, чтобы сумма чисел в каждом клетчатом кольце ширины 1, опоясывающем коробку, равнялась 120? (Г. А. Гальперин)
4	2. В выпуклом семиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ диагонали A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7, A_6A_1 и A_7A_2 равны между собой. Диагонали A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, A_4A_7, A_5A_1, A_6A_2 и A_7A_3 тоже равны между собой. Обязательно ли этот семиугольник равносторонний? (А. К. Толпыго)
4	3. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (где n — натуральное) возьмем наибольший нечетный делитель и сложим все эти делители. Докажите, что получится n^2. (Венгрия)
4	4. N точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, попарно соединили отрезками (каждую с каждой). Часть отрезков покрасили красным, остальные — синим. Красные отрезки образовали замкнутую несамопересекающуюся ломаную, и синие отрезки — тоже. Найдите все N, при которых это могло получиться. (Н. Емельянов)
5	5. На полоске $1 \times N$ на 25 левых полях стоят 25 шашек. Шашка может ходить на соседнюю справа свободную клетку или перепрыгнуть через соседнюю справа шашку на следующую за ней клетку (если эта клетка свободна), движение влево не разрешается. При каком наименьшем N все шашки можно переставить подряд без пробелов в обратном порядке? (А. В. Шаповалов)

ДВАДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, 19 октября 2003 г.

10 – 11 классы, тренировочный вариант.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
3	1. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (где n — натуральное) возьмем наибольший нечетный делитель и сложим все эти делители. Докажите, что получится n^2. (Венгрия)
4	2. Какое наименьшее количество квадратиков 1×1 надо нарисовать, чтобы получилось изображение квадрата 25×25, разделенного на 625 квадратиков 1×1? (Д. А. Калинин)
5	3. У продавца и покупателя в сумме 1999 рублей монетами и купюрами в 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 рублей. Кот в мешке стоит целое число рублей, причем денег у покупателя достаточно. Докажите, что покупатель сможет купить кота, получив причитающуюся сдачу. (А. В. Шаповалов)
	4. На сторонах единичного квадрата как на гипотенузах построены прямоугольные треугольники (во внешнюю сторону). Пусть A, B, C, D — вершины прямых углов, а O_1, O_2, O_3, O_4 — центры вписанных окружностей этих треугольников. Докажите, что
3	а) площадь четырехугольника $ABCD$ не превосходит 2;
3	б) площадь четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ не превосходит 1. (М. А. Евдокимов)
6	5. Бумажный тетраэдр разрезали по ребрам так, что получилась плоская развертка. Могло ли случиться, что эту развертку нельзя расположить на плоскости без наложений (в один слой)? (С. В. Маркелов)

ДВАДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, 26 октября 2003 г.

8 – 9 классы, сложный вариант.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 1. Сто натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию. Возможно ли, чтобы любые два из этих чисел были взаимно простыми? (П. А. Кожевников)

5 2. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!». Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!». Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое!». Прав ли он? (А. Ю. Эвнин)

5 3. Найдите все натуральные числа k, для которых найдутся такие натуральные числа m и n, что $m(m+k) = n(n+1)$. (Б. Р. Френкин)

6 4. Какое наименьшее число клеток надо отметить на доске 15×15 так, чтобы слон, поставленный на любую клетку доски, бил не менее двух отмеченных клеток? (Слон бьет по двум диагоналям, на пересечении которых он стоит; слон, поставленный на отмеченную клетку, бьет эту клетку.) (П. А. Кожевников)

7 5. Дан квадрат $ABCD$, внутри которого лежит точка O. Докажите, что сумма углов OAB, OBC, OCD и ODA отличается от $180°$ не больше, чем на $45°$. (Фольклор)

7 6. Дана коробка (прямоугольный параллелепипед), по поверхности (но не внутри) которой ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу. Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол? (Расстоянием между точками, с точки зрения муравья, является длина кратчайшего пути между этими точками, проходящего по поверхности параллелепипеда.) (С. В. Маркелов)

8 7. Играют двое. У первого 1000 четных карточек (2, 4, …, 2000), у второго 1001 нечетных (1, 3, …, 2001). Ходят по очереди, начинает первый. Ход состоит в следующем: игрок, чья очередь ходить, выкладывает одну из своих карточек, а другой, посмотрев на нее, выкладывает одну из своих карточек; тот, у кого число на карточке больше, записывает себе одно очко, а обе выложенные карточки выбрасываются. Всего получается 1000 ходов (и одна карточка второго не используется). Какое наибольшее число очков может гарантировать себе каждый из игроков (как бы ни играл его соперник)? (А. К. Толпыго)

ДВАДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, 26 октября 2003 г, **10 – 11 классы, сложный вариант.**

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!». Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!». Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое!». Прав ли он? (А. Ю. Эвнин)
4	2.	Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде $3^{u_1} \cdot 2^{v_1} + 3^{u_2} \cdot 2^{v_2} + \ldots + 3^{u_k} \cdot 2^{v_k}$, где $u_1 > u_2 > \ldots > u_k \geq 0$ и $0 \leq v_1 < v_2 < \ldots < v_k$ — целые числа. (М. Л. Гервер)
6	3.	Дана коробка (прямоугольный параллелепипед), по поверхности (но не внутри) которой ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу. Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол? (Расстоянием между точками, с точки зрения муравья, является длина кратчайшего пути между этими точками, проходящего по поверхности параллелепипеда.) (С. В. Маркелов)
7	4.	Дан треугольник ABC. В нем H — точка пересечения высот, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Известно, что отрезки IO и BC параллельны. Докажите, что отрезки AO и HK параллельны. (П. А. Кожевников)
7	5.	Играют двое. У первого 1000 четных карточек (2, 4, ..., 2000), у второго 1001 нечетных (1, 3, ..., 2001). Ходят по очереди, начинает первый. Ход состоит в следующем: игрок, чья очередь ходить, выкладывает одну из своих карточек, а другой, посмотрев на нее, выкладывает одну из своих карточек; тот, у кого число на карточке больше, записывает себе одно очко, а обе выложенные карточки выбрасываются. Всего получается 1000 ходов (и одна карточка второго не используется). Какое наибольшее число очков может гарантировать себе каждый из игроков (как бы ни играл его соперник)? (А. К. Толпыго)
7	6.	У тетраэдра $ABCD$ сумма площадей двух граней (с общим ребром AB) равна сумме площадей двух оставшихся граней (с общим ребром CD). Докажите, что середины ребер BC, AD, AC и BD лежат в одной плоскости, причем эта плоскость содержит центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$. (С. Л. Берлов, А. А. Заславский, П. А. Кожевников)
3	7.	а) В таблице $m \times n$ расставлены знаки «+» и «−». За один ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или столбце. Докажите, что если таблица такими действиями не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат 2×2, который тоже не приводится.
6		б) В таблице $m \times n$ расставлены знаки «+» и «−». За один ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или столбце или на любой диагонали (угловые клетки тоже считаются диагоналями). Докажите, что если таблица такими действиями не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат 4×4, который тоже не приводится. (А. Быстриков)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 25-го ТУРНИРА ГОРОДОВ.

Осенний тур, тренировочный вариант.

8–9 классы.

Задача 1.

Ответ: можно.

Поверхность коробки состоит из двух граней 3×4, двух граней 3×5 и двух граней 4×5. Запишем во все клетки первых двух граней по числу a, во все клетки вторых двух граней по числу b, и во все клетки оставшихся двух граней по числу c. Тогда требование задачи будет выполнятся, если будут верны равенства $2(4a + 5b) = 120$, $2(3a + 5c) = 120$, $2(3b + 4c) = 120$. Из первых двух равенств получаем, что $4(3a + 5c) - 3(4a + 5b) = 60$, откуда $20c - 15b = 60$. Учитывая третье равенство, находим, что $b = 8$, $c = 9$, и из первого равенства находим $a = 5$. Найденные числа удовлетворяют условию.

Задача 2.

Ответ: обязательно.

Мы предполагаем, что семиугольник выпуклый. Достаточно доказать, что $A_1A_2 = A_2A_3$ — тогда, из симметрии условия, получим, что все стороны семиугольника равны.

Заметим, что треугольники $A_6A_1A_3$, $A_7A_2A_4$, $A_1A_3A_5$, $A_2A_4A_6$, $A_3A_5A_7$, $A_4A_6A_1$ и $A_5A_7A_2$ равны друг другу по третьему признаку равенства треугольников (по трем сторонам), кроме того, все эти треугольники равнобедренные. Пусть углы при основаниях этих равнобедренных треугольников равны α, а углы при вершинах, противолежащих основаниям, равны β.

Заметим, что $\angle A_2A_4A_1 = \angle A_2A_4A_6 - \angle A_1A_4A_6 = \beta - \alpha = \angle A_3A_5A_7 - \angle A_2A_5A_7 = \angle A_3A_5A_2$, откуда треугольники $A_2A_4A_1$ и $A_3A_5A_2$ равны (по двум сторонам и углу между ними). Это значит, что $A_1A_2 = A_2A_3$.

Задача 3.

Ответ: n^2.

Докажем, что набор наибольших нечетных делителей чисел $n+1, \ldots, 2n$ совпадает с набором первых n нечетных чисел от 1 до $2n - 1$. Для этого достаточно доказать, что наибольшие нечетные делители чисел от $n+1$ до $2n$ различны (так как их ровно n, и все они не превосходят $2n - 1$). Предположим противное: два каких-то наибольших нечетных делителя совпадают. Тогда числа, у которых совпадают эти делители, отличаются по крайней мере в 2 раза, что невозможно (так как оба эти числа лежат между $n + 1$ и $2n$, но уже $2(n + 1)$ больше чем $2n$). Получили противоречие. Значит, искомая сумма S есть $1+3+5+\ldots+2n-1$. Прибавив к этой сумме ее же, записанную в обратном порядке, получим, что $2S = (1 + 2n - 1) + (2 + 2n - 3) + \ldots + (2n - 1 + 1) = n \cdot 2n = 2n^2$, откуда $S = n^2$.

Задача 4.

Так как синие отрезки образуют замкнутую ломаную, и красные — тоже, из каждой точки выходит всего либо два отрезка (одного цвета), либо четыре (два синих и два красных). Возьмем любую точку: с одной стороны, она соединена со всеми остальными точками, а сдругой сторны — не более, чем с четырьмя точками. Это значит, что всего точек не больше пяти.

Случаи $N = 1$, $N = 2$ и $N = 3$ невозможны, так как всего отрезков должно быть не меньше шести — минимум по три на каждую замкнутую ломаную (мы считаем, что оба цвета присутствуют).

Случай $N = 4$ невозможен, так как из каждой точки выходит по три отрезка.

Случай $N = 5$ самый интересный. Расположим точки A_1, A_2, A_3 в вершинах равностороннего треугольника, а точки A_4 и A_5 — внутри этого треугольника, на средней линии, параллельной A_1A_2 (так, что векторы $\overrightarrow{A_4A_5}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$ сонаправлены.) Соединив последовательно синими отрезками точки A_1, A_3, A_5, A_2, A_4 и A_1, получим несамопересекающуюся ломаную. Соединив последовательно красными отрезками точки A_1, A_5, A_4, A_3, A_2 и A_1, также получим несамопересекающуюся ломаную.

Задача 5.

Ответ: 50.

Докажем сначала, что если полоска содержит менее 50 полей, то переставить шашки не удастся. В самом деле, так как шашки не могут двигаться назад, шашка 25 должна остаться на месте (если она сдвинется хоть на 1 позицию вправо, то после нее выстроятся еще 24 шашки, и всего потребуется не меньше 50 полей). Значит единственный возможный первый ход — перепрыгнуть шашкой 24 через шашку 25, причем после этого шашка 24 тоже не может сдвинуться вправо. Но тогда шашки 25 и 24 вынуждены неподвижно стоять рядом, и через них по правилам не удастся переправить ни одной шашки. Итак, полей не меньше 50.

Докажем, что при $N = 50$ все шашки можно переставить подряд без пробелов в обратном порядке. Напишем первые несколько перемещений:

```
1, 2, 3, 4, ... , 21, 22, 23, 24, 25,   ,   ,   ,   ,   , ...

1, 2, 3, 4, ... , 21, 22, 23, 24,   , 25,   ,   ,   ,   , ...

1, 2, 3, 4, ... , 21, 22,   , 24, 23, 25,   ,   ,   ,   , ...

1, 2, 3, 4, ... , 21, 22,   , 24,   , 25, 23,   ,   ,   , ...

1, 2, 3, 4, ... , 21, 22,   , 24,   , 25,   , 23,   ,   , ...
```

В результате шашки 25 и 23 уже стоят на своих (новых) местах. Следующими несколькими ходами переместим на свое место шашку 21 (она перепрыгнет через шашки 22, 24, 25, 23 и потом сместится на шаг вправо):

```
1, 2, 3, 4, ... ,   , 22,   , 24,   , 25,   , 23,   , 21, ...
```

После этого аналогично можно переместить на свое место шашку 19, затем — 17, и так далее, до фишки 1 включительно. Получим картинку:

```
 , 2,  , 4, ... ,   , 22,   , 24,   , 25,   , 23,   , 21, ... , 3,  , 1
```

Теперь легко последовательно переместить на свои места шашки 2, 4, ..., 22, 24.

Осенний тур, тренировочный вариант.

10–11 классы.

Задача 1.

См. решение задачи 3 тренировочного варианта младших классов.

Задача 2.

Ответ: 360 квадратиков.

Количество квадратиков, примыкающих к границе квадрата 25×25, равно $24 \cdot 4 = 96$. Все эти квадратики придется нарисовать (иначе мы не сможем получить границу большого квадрата).

Рассмотрим теперь внутренний квадрат 23×23. Осталось получить изображение этого квадрата, разделенного на квадратики 1×1, причем граница квадрата уже нарисована. Разделим этот квадрат на доминошки размером 2×2 так, чтобы остался один лишний квадратик (это сделать нетрудно). Каждая доминошка состоит из двух квадратиков 1×1, один из которых придется нарисовать, так как иначе мы не получим изображение отрезка, по которому граничат квадратики, составляющие эту доминошку. Всего доминошек $(23 \cdot 23 - 1)/2 = 264$, и значит необходимо еще 264 квадратика.

Покажем, что такого количества и достаточно. Разделим квадрат 23×23 на квадратики 1×1 и раскрасим их в белый и черный цвета в шахматном порядке. Тогда получим 264 квадратика одного цвета (скажем, черного) и 265 квадратиков белого цвета. Нетрудно убедиться, что достаточно нарисовать только черные квадратики, которых 264. Получаем ответ: $96 + 264 = 360$.

Задача 3.

Пусть вначале покупатель все свои деньги отдаст купцу. После этого достаточно доказать, что имея 1999 рублей монетами и купюрами по 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 рублей, можно набрать N рублей для любого натурального N от 1 до 1999 (тогда продавец сможет выплатить любую необходимую сдачу).

Решим более общую задачу. Предположим, что в хождении находятся монеты достоинством $1 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ рублей, причем для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ число a_i делится нацело на a_{i-1}. Докажем следующее общее утверждение: имея $a_n - 1$ рублей, можно набрать N рублей для любого натурального N от 1 до $a_n - 1$. Из доказанного общего утверждения последует решение задачи: достаточно положить $a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 50, a_4 = 100, a_5 = 500, a_6 = 1000, a_7 = 2000$.

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для $n = k$. Рассмотрим набор $1 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k < a_{k+1}$ такой, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, k+1$ число a_i делится нацело на a_{i-1}. Пусть у нас имеется $a_{k+1} - 1$ рублей монетами по $1, a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ рублей. Заметим, что достоинство любой монеты, кроме монет по 1 рублю, делится на a_1, а общая сумма имеющихся денег дает остаток $a_1 - 1$ при делении на a_1. Это означает, что у нас имеется хотя бы $a_1 - 1$ монет по одному рублю, причем оставшееся количество монет по 1 рублю делится на a_1. Отложим $a_1 - 1$ монет по одному рублю, а остальные монеты по 1 рублю объединим в группы по a_1 монет и в дальнейшем каждую такую группу будем считать одной монетой в a_1 рублей (от этого набирать станет только тяжелее). Таким образом, считаем, что у нас ровно $a_1 - 1$ монет по одному рублю, а оставшиеся $a_{k+1} - a_1$ рублей набраны монетами по $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ рублей. Приняв a_1 рублей за 1 у.е., можно считать, что $\frac{a_{k+1}}{a_1} - 1$ у.е. набраны монетами по $1 = \frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_{k+1}}{a_1}$ у.е. По предположению индукции можно набрать любое количество у.е. от 1 до $\frac{a_{k+1}}{a_1} - 1$.

Пусть N — произвольное натуральное число от 1 до $a_{k+1} - 1$, дающее остаток $r \le a_1 - 1$ при делении на a_1. Возьмем r монет по 1 рублю, осталось набрать $N - r$ рублей, что равно $\frac{N-r}{a_1} \le \frac{a_{k+1}}{a_1} - 1$ у.е. По доказанному, такое количество у.е. набрать можно.

Задача 4.

Докажем сначала вспомогательный факт: площадь четырехугольника $KLMN$, лежащего в круге радиуса R, не превосходит $2R^2$.

Пусть O — центр нашего круга. Рассмотрим треугольники OKL, OLM, OMN и ONK. Площадь каждого из них равна половине прозведения сторон на синус угла между ними, и тем самым не превосходит $R^2/2$, так как стороны не превосходят R, а синусы не превосходят 1. С другой стороны, 4 указанных треугольника, очевидно, покрывают четырехугольник $KLMN$, откуда его площадь не больше $2R^2$.

(Другое доказательство факта: пусть φ — угол между диагоналями KM и LN, тогда площадь четырехугольника $KLMN$ равна $(KM \cdot LN \sin\varphi)/2$, что не превосходит $(2R \cdot 2R)/2$.)

Перейдем теперь к решению самой задачи. Пусть O — центр квадрата $ABCD$.

а) Пусть S — середина стороны квадрата, на которой построен треугольник с вершиной A. Тогда OA не превосходит $OS + SA = 0,5 + 0,5 = 1$ (по неравенству треугольника). Аналогично, OB, OC и OD не превосходят 1, откуда четырехугольник $ABCD$ лежит в круге с центром в O и радиусом 1, а значит его площадь не превосходит 2.

б) Пусть $XYZT$ — данный в условии единичный квадрат. Рассмотрим окружность γ, описанную вокруг этого квадрата (ее радиус равен $(\sqrt{2})/2$). Докажем, что точка O_1 лежит на этой окружности. Пусть XY — сторона квадрата, на которой построен прямоугольный треугольник с вершиной A. Тогда O_1 — точка пересечения биссектрисс треугольника XAY, откуда $\angle XO_1Y = 180^\circ - 0,5(\angle AXY + \angle AYX) = 135^\circ$. Но угол XZY равен 45°, откуда точки X, O_1, Y, Z лежат на одной окружности, но это и есть окружность γ (так как она содержит точки X, Y и Z). Аналогично доказывается, что точки O_2, O_3 и O_4 лежат на окружности γ, то есть четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ лежит в круге радиуса $(\sqrt{2})/2$, и значит его площадь не превосходит $2((\sqrt{2})/2)^2 = 1$.

Задача 5.

Ответ: могло.

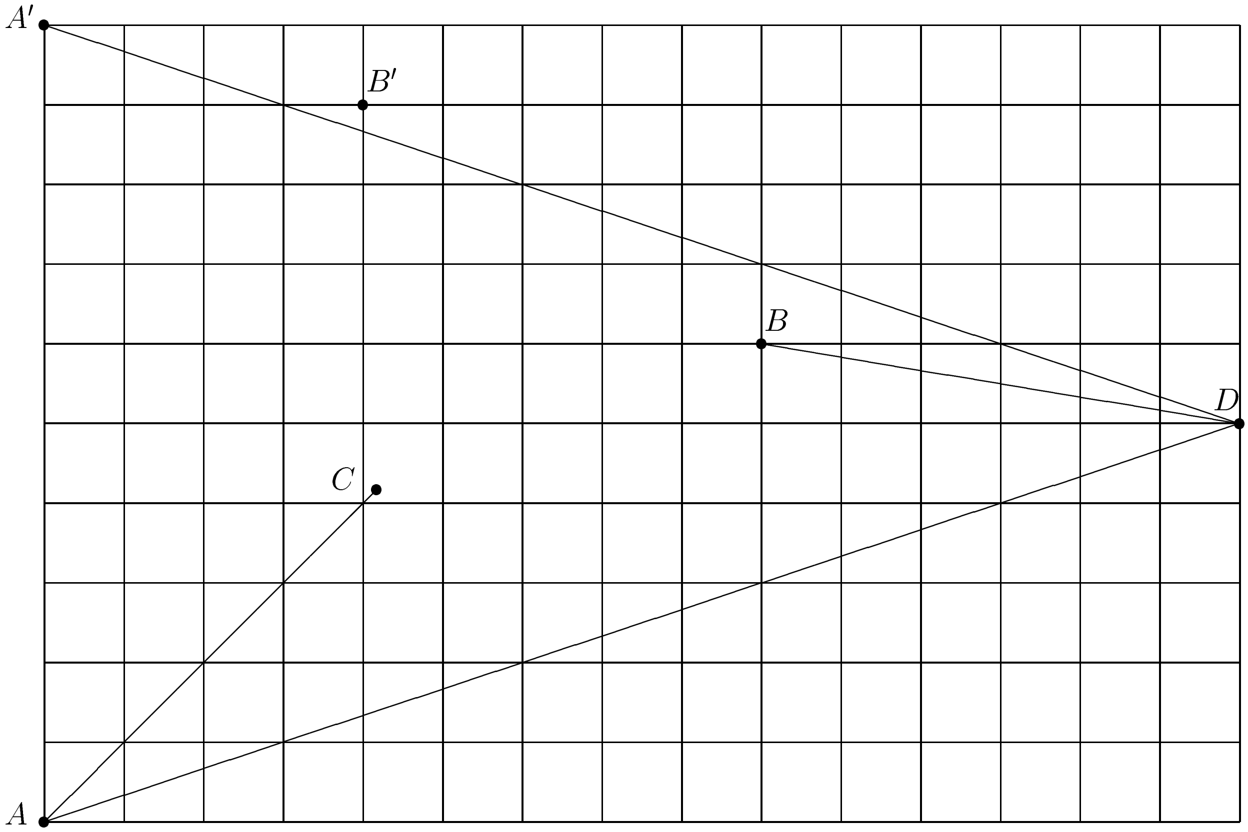
Приведем пример тетраэдра, одну из разверток которого нельзя расположить на плоскости без наложений (в один слой).

Мы приведем сначала пример развертки, а потом покажем, как склеить из нее тетраэдр. Для доказательства того, что тетраэдр действительно удастся склеить, нам понадобится следующая очевидная

Лемма. Из точки O плоскости выходят четыре отрезка OK, OL, OM и ON (именно в таком порядке, если смотреть по часовой стрелке). Пусть $OK = ON$, и среди углов LOM, KOL и MON сумма любых двух углов больше третьего. Тогда можно вырезать из плоскости фигуру $OKLMN$ (по отрезкам OK, KL, LM, MN и NO) и склеить из этой фигуры тетраэдр с тремя бумажными гранями и дыркой вместо четвертой грани (перегнув для этого фигуру по отрезкам OL и OM и совместив отрезки OK и ON).

(В случае, если школьник использует эту лемму в своей работе без доказательства, оценка за решение не снижается.)

Укажем теперь развертку. Введем на плоскости декартову систему координат. Отметим на плоскости точку A с координатами $(0;0)$, точку A' с координатами $(0;10)$, точку B с координатами $(9;6)$, точку B' с координатами $(4;9)$, точку C с координатами $(25/6;25/6)$ и точку D с координатами $(15;5)$.



Проведем отрезки AB', $B'C$, CB, BA', $A'D$, DA — эти отрезки составляют границу развертки тетраэдра. Проведем также отрезки AC и CD.

Перечислим грани нашего тетраэдра: $AB'C$, ACD, CBD и $BA'D$.

Заметим, что $AD = A'D$, $B'C = BC$ и $AB' = A'B$ (это легко проверить, зная координаты точек).

Мы видим, что развертка имеет самоналожения (грани $AB'C$ и $BA'D$ перекрываются), и самоналожений нельзя избежать.

Но можно ли из полученной развертки склеить тетраэдр?

Чтобы исследовать этот вопрос, проделаем сначала небольшую подготовительную работу.

Проведем через середину отрезка BB' прямую l, перпендикулярную этому отрезку. Для любой точки X на этой прямой будет выполняться условие $XB' = XB$. Пусть X — точка пересечения прямой l и биссектрисы угла ADA'. Рассмотрим новую развертку, в которой вместо точки C взята точка X (и соответствующим образом изменены ребра).

Заметим, что из новой развертки склеить тетраэдр нельзя, поскольку сумма углов $A'DB$ и BDX равна углу XDA (так как треугольник $A'DA$ равнобедренный, XD — его биссектриса).

Сдвинем теперь немного точку X по прямой l в направлении к точке C и рассмотрим соответствующую развертку. Она по-прежнему будет иметь самоналожения, которых нельзя избежать.

Докажем, что из полученной развертки уже можно будет склеить тетраэдр.

Для этого совместим вершины A и A', перегнув развертку по отрезкам XD и BD так, чтобы совместились (равные по длине) отрезки AD и $A'D$. Это удастся сделать в силу леммы, поскольку теперь сумма углов $A'DB$ и BDX будет уже больше угла XDA, сумма углов BDX и XDA будет больше угла $A'DB$ (так как эта сумма больше половины угла $A'DA$, а угол $A'DB$ — меньше), и наконец сумма углов XDA и $A'DB$ будет больше угла BDX (поскольку мы сдвинули точку X немного, так что даже угол XDA все еще больше угла BDX).

Осталось перегнуть грань $AB'X$ по ребру AX и совместить эту грань с дырой ABX в недоклеенном тетраэдре (это возможно, так как треугольники $AB'X$ и ABX равны по трем сторонам).

Мы получили тетраэдр $AXBD$, что уже является решением задачи. Можно показать (проделав небольшие вычисления), что из исходной развертки (с точкой C) также можно склеить тетраэдр (то есть, точку X можно сдвигать по прямой l вплоть до точки C), но, поскольку задача уже решена, мы этого делать не будем.

Осенний тур, сложный вариант.

8–9 классы.

Задача 1.

Ответ: возможно.

Например, числа $1 + 100!$, $1 + 2 \cdot 100!$, $1 + 3 \cdot 100!$, $\ldots$, $1 + 100 \cdot 100!$ образуют арифметическую прогрессию. Докажем, что любые два из этих чисел взаимно просты. С одной стороны, все они взаимно просты с числом $100!$, а значит и с числами вида $l \cdot 100!$, где l — любое натуральное число, не превосходящее 100. С другой стороны, наибольший общий делитель любых двух чисел нашей прогресии $1+m\cdot 100!$ и $1+n\cdot 100!$ делит их разность $(m-n)\cdot 100!$, где $|m-n|$ не превосходит 100, а это значит (по предыдущему), что он равен 1.

Задача 2.

Смотрите решение задачи 1 сложного варианта старших классов.

Задача 3.

Ответ: решение существует для всех k, кроме 2 и 3.

Покажем, что для $k = 2$ и $k = 3$ решений не существует.

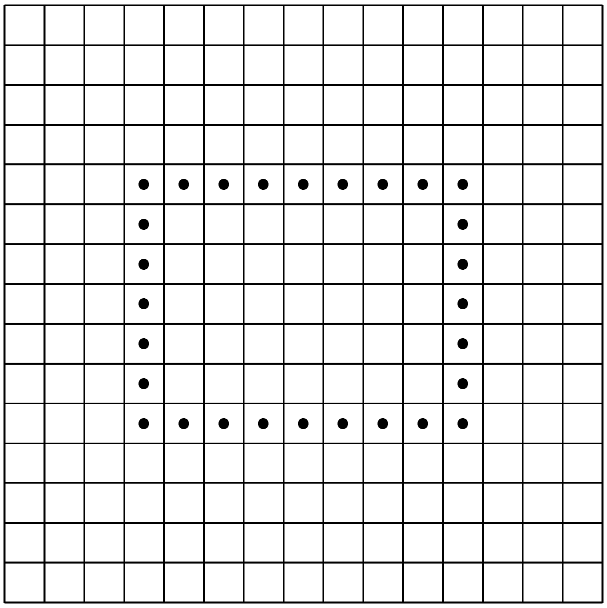
Очевидно, что при $k > 1$ число m не может быть больше, чем $n-1$ (иначе $m(m+k)$ будет больше, чем $n(n+1)$). Но при $m \le n-1$ (и $k \le 3$) получаем $m(m+k) \le (n-1)(n+2) < n(n+1)$, и снова равенство невозможно.

Теперь покажем, как найти хотя бы одно решение для остальных k. Рассмотрим уравнение $n(n+1) = m(m+k)$ как квадратное относительно n. Его дискриминант равен $D = 1 + 4m(m+k)$. Число n будет целым тогда и только тогда, когда D будет полным квадратом, поскольку $n = (-1+\sqrt{D})/2$, а число $-1+\sqrt{D}$, очевидно, чётное. Попробуем в качестве D взять число вида $(2m+2l+1)^2$, где l — натуральное. Тогда $(2m+2l+1)^2 = 1 + 4m(m+k)$, откуда после несложных вычислений получаем, что $mk = m(2l+1) + l(l+1)$. Расмотрим решения $m = l(l+1)/2$ и $m = l(l+1)$, получим $k = 2l+3$ и $k = 2l+2$ соответственно, где l можно выбрать любым натуральным. Так получаются решения для всех $k > 3$. Осталось заметить, что для $k = 1$ существует решение $m = n = 1$.

Задача 4.

Ответ: 28.

Вот пример, отмеченные клетки обозначены кружком:



Глядя на рисунок, легко убедиться, что слон, поставленный на любую клетку, будет бить не менее двух отмеченных клеток.

Покажем, что меньшим числом отмеченных клеток не обойтись. На границе квадрата 56 клеток. Каждый слон, который будет стоять на границе доски, должен бить хотя бы две отмеченные клетки. Но каждая отмеченная клетка бьётся не более, чем четырьмя слонами, стоящими на границе доски. Значит, отмеченных клеток должно быть не менее $56 \cdot 2/4 = 28$.

Задача 5.

Пусть диагонали квадрата пересекаются в точке S. Не умаляя общности можно считать, что O лежит в треугольнике ASB. Тогда $OD > OB$, $OC > OA$. Так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то $\angle OBS \geq \angle ODS$, $\angle OAS \geq \angle OCS$, а значит $\angle OBS - \angle ODS \geq 0$ и $\angle OCS - \angle OAS \leq 0$. Тогда
$\angle OBC + \angle OCD + \angle ODA \geq (\angle OBS + \angle SBC) + \angle SCD + (\angle ADS - \angle ODS) =$
$(\angle OBS - \angle ODS) + 3 \cdot 45^\circ \geq 180^\circ - 45^\circ$. С другой стороны
$\angle OAB + \angle OBC + \angle OCD + \angle ODA \leq (\angle SAB - \angle OAS) + \angle ABC + (\angle OCS + \angle SCD) + \angle SDA =$
$(\angle OCS - \angle OAS) + 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ + 45^\circ \leq 180^\circ + 45^\circ$.

Задача 6.

Ответ: не обязательно.

Возьмём коробку 2 *см* $\times$ 2 *см* $\times$ 10 *см*. Рассмотрим развертку параллелепипеда, на которой противоположные вершины параллелепипеда являются противоположными сторонами прямоугольника $(2 + 2)$ *см* $\times$ 4 *см* (развернули две соседние грани по ребру длиной 10 *см*). Ясно тогда, что противоположная от муравья вершина находится на расстоянии не более $\sqrt{(2+2)^2 + 10^2} = \sqrt{116}$ *см* по поверхности.

Докажем теперь, что центр противоположной муравью грани 2 *см* $\times$ 2 *см* дальше от муравья (по поверхности), чем противоположная вершина.

Чтобы попасть в этот центр, муравей должен сначала достигнуть границы противоположной грани $2\ см \times 2\ см$. Для этого ему придется проползти не меньше $10\ см$, так как сама эта грань находится на расстоянии $10\ см$ от муравья. От границы этой грани до её центра — еще не меньше $1\ см$. Значит от муравья до центра противоположной грани $2\ см \times 2\ см$ не меньше $11\ см = \sqrt{121}\ см$ (по поверхности), что больше $\sqrt{116}\ см$.

Смотрите также решение задачи 3 сложного варианта старших классов.

Задача 7.

Ответ: первый может обеспечить себе 499 очков, второй — 501.

Будем говорить, что один набор карт (назовем его первым) "не меньше" другого (назовем его вторым), если каждой карте второго набора можно сопоставить карту первого, которая не меньше (при этом разным картам второго набора должны соответствовать разные карты первого набора).

Будем говорить, что один набор карт (назовем его первым) "строго больше" другого (назовем его вторым), если каждой карте второго набора можно сопоставить карту первого, которая строго больше (при этом разным картам второго набора должны соответствовать разные карты первого набора).

Заметим, что если в некоторый момент игры набор карт одного из игроков заменить на "не меньший", то этот игрок сможет сыграть не хуже, чем имея незамененный набор (то есть сможет набрать не меньше взяток).

Поэтому верны следующие два утверждения.

Во-первых, если на данном ходу игрок собирается бить выложенную соперником карту, то он может бить ее наименьшей из своих карт, которые больше карты соперника, и в итоге может сыграть не хуже, чем при другом способе взятия карты соперника. Это ясно потому, что при таком способе взятия карты соперника у игрока остается набор карт, который "не меньше" наборов при других вариантах взятия.

Во-вторых, если игрок на данном ходу собирается положить карту, которая меньше выложенной соперником карты (то есть отдать на этом ходу очко сопернику), то он может выложить наименьшую из всех своих карт.

Поэтому можно считать, что оба игрока действуют именно так.

Докажем сначала, что второй игрок сможет обеспечит себе 501 очко. Рассмотрим первые 1000 ходов. Пусть второй игрок на тех ходах из них, когда он начинает, будет выкладывать свою наименьшую карту, а на тех ходах из них, когда от выкладывает карту вторым, будет бить карту соперника (наименьшей возможной картой).

Заметим, что сначала набор карт второго игрока без наименьшей карты "строго больше", чем набор карт соперника. При изложенной выше стратегии второго игрока это свойство будет сохраняться (проверьте!), и поэтому второй игрок сможет действовать по этой стратегии. При этом на первом, третьем, ..., 999-ом ходах он будет записывать себе по очку.

К 1000-му ходу у второго останется 2 карты. Пойдя с большей из них, он получит еще одно очко. Итого у него не меньше, чем 501 очко.

Докажем теперь, что первый игрок сможет обеспечит себе 499 очков. Сначала у первого игрока набор "строго больше" набора второго без самой большой карты. До того момента, как второй положит наибольшую свою карту, первый может сохранять это свойство следующим образом: на тех ходах, когда он начинает, будет выкладывать свою наименьшую карту, а на тех ходах, когда от выкладывает карту вторым, будет бить карту соперника (наименьшей возможной картой).

Если второй никогда не выложит карточку 2001, то первый, действуя по своей стратегии, наберет не менее 500 очков.

Пусть второй в какой-то момент походит карточкой 2001. В силу сделанных в начале доказательства утверждений и учитывая стратегию первого игрока, это возможно либо на последнем ходу (и тогда у первого не менее 499 очков), либо на таком (не последнем) ходу, на котором сначала выкладывает карточку второй.

Тогда первый пусть положит самую маленькую свою карту. В результате его набор станет больше, чем набор второго без наименьшей карты, а значит, продолжая действовать по своей тактике, первый при каждом ходе соперника будет брать взятку. Таким образом он возьмёт 499 взяток.

Смотрите также решение задачи 5 сложного варианта старших классов.

Осенний тур, сложный вариант.

10–11 классы.

Задача 1.

Ответ: да, математик прав.

Покажем, как можно заключить браки таким образом, чтобы каждый брюнет женился на знакомой девушке, а каждая блондинка вышла замуж за знакомого юношу.

Сначала поженим всех брюнетов на знакомых девушках (это можно сделать согласно утверждению первой свахи), а затем выдадим всех блондинок замуж за знакомых молодых людей (вторая сваха заявила, что так можно сделать). При этом, возможно, некоторые блондинки или брюнеты окажутся состоящими сразу в двух браках. Теперь покажем, как исправить это.

Будем обозначать брюнетов буквами A, блондинок — буквами B. Несложно понять, что все множество брюнетов и блондинок разбивается на множество *непересекающихся* (поскольку каждый состоит не более, чем в двух браках) цепочек вида $A_1B_1A_2B_2\ldots A_nB_n$ (каждый состоит в браке со своими соседями; те, кто стоят на концах цепочки, имеют только одного мужа-брюнета (жену-блондинку)). Если каждая цепочка имеет длину 2, т.е выглядит так: A_1B_1, то все браки и так уже заключены необходимым образом. Посмотрим, как быть, если есть цепочка длины не меньше 3. Для этого рассмотрим несколько случаев:

1) Цепочка не замкнута, а брюнетов и блондинок в ней поровну, т.е она начинается с брюнета, а заканчивается блондинкой (или наоборот: очевидно, эти случаи ничем не различаются). Тогда цепочка имеет вид $A_1B_1A_2B_2\ldots A_nB_n$ или $B_1A_1B_2A_2\ldots B_nA_n$. В этом случае разорвем некоторые браки, оставив только следующие: между A_1 и B_1, между A_2 и B_2, …, между A_n и B_n. Возможно также, те, кто стоят на краях цепочки, состояли в браке с кем-то "со стороны" (т.е. *не* блондином или брюнеткой). Эти браки мы также разорвем. Всё, с данной цепочкой разобрались: теперь в ней каждый состоит ровно в одном браке, причем со своим знакомым.

2) Цепочка не замкнута, а брюнетов и блондинок в ней не поровну: без ограничения общности положим, что брюнетов на одного больше (очевидно, количество брюнетов и блондинок не может отличаться больше, чем на 1). Тогда цепочка имеет вид $A_1B_1A_2B_2\ldots A_nB_nA_{n+1}$. В этом случае либо A_1, либо A_{n+1} имеет супругу "на стороне": ведь блондинок в этой цепочке меньше, чем брюнетов, а мы женили брюнетов согласно утверждению первой свахи, т.е. так, что все они имеют разных жен. Никто из A_2, A_3, …, A_{n-1} не может иметь жены "со стороны", т.к. каждый из них взял в

жены одну из соседок по цепочке (а другая соседка сама выбрала его). Для определенности предположим, что у A_{n+1} есть жена C "на стороне" (несложно показать, что A_1 в этом случае не может иметь брак "на стороне"). Тогда разорвем некоторые браки, оставив только следующие: между A_1 и B_1, между A_2 и B_2, ..., между A_n и B_n, между A_{n+1} и C. С этой цепочкой мы также разобрались.

3) Цепочка замкнута (тогда, очевидно, брюнетов и блондинок в ней поровну). Тогда она имеет вид $A_1B_1A_2B_2\dots A_nB_nA_1$. Браков "на стороне" нет, поскольку каждый и так уже женат (замужем) дважды. Тогда оставим только следующие браки: между A_1 и B_1, между A_2 и B_2, ..., между A_n и B_n. И с этой цепочкой мы разобрались.

Перейдя к следующей цепочке, "обработаем" и ее, и так далее, пока у нас не останется ни одной цепочки длины не меньше 3.

Задача 2.

Докажем утверждение задачи, используя метод математической индукции. Обозначим за N число, которое требуется представить в виде

$$3^{u_1}\cdot 2^{v_1}+3^{u_2}\cdot 2^{v_2}+\ldots+3^{u_k}\cdot 2^{v_k} \qquad (1)$$

1) База индукции. $N=1$. Это число представимо в требуемом виде: $1=2^0\cdot 3^0$.

2) Индуктивный переход. Предположим, все натуральные числа от 1 до N можно предствить в виде (1). Рассмотрим число $N+1$.

а) если $N+1$ делится на 2, то $N+1=2P$, где P — натуральное. Поскольку $P=\frac{N+1}{2}\le N$, то по предположению индукции P можно представить в виде (1):

$$P=3^{u_1}\cdot 2^{v_1}+3^{u_2}\cdot 2^{v_2}+\ldots+3^{u_k}\cdot 2^{v_k}$$

Тогда

$$N+1=2P=3^{u_1}\cdot 2^{v_1+1}+3^{u_2}\cdot 2^{v_2+1}+\ldots+3^{u_k}\cdot 2^{v_k+1}$$

Очевидно, что это представление удовлетворяет условию задачи.

б) если $N+1$ не делится на 2, но делится на 3, то аналогичным образом получим: $N+1=3Q$, где Q — натуральное, $Q=\frac{N+1}{3}<N$. Тогда

$$Q=3^{u_1}\cdot 2^{v_1}+3^{u_2}\cdot 2^{v_2}+\ldots+3^{u_k}\cdot 2^{v_k},$$

$$N+1=3Q=3^{u_1+1}\cdot 2^{v_1}+3^{u_2+1}\cdot 2^{v_2}+\ldots+3^{u_k+1}\cdot 2^{v_k}$$

в) предположим, $N+1$ не делится ни на 2, ни на 3. В этом случае найдем максимальное число a такое, что $3^a\le N+1$. Тогда $N+1=3^a+R$, где $0\le R<2\cdot 3^a$ (второе неравенство следует из того, что $N+1<3^{a+1}$). Если $R=0$, то мы тем самым получили требуемое представление числа $N+1$: $N+1=3^a\cdot 2^0$. Если же $R>0$, то, поскольку ни $N+1$, ни 3^a не делятся на 2, то R, как их разность, является четным числом: $R=2T$, где T — натуральное. $T=\frac{R}{2}<3^a\le N+1$, поэтому T представимо в виде (1):

$$T=3^{u_1}\cdot 2^{v_1}+3^{u_2}\cdot 2^{v_2}+\ldots+3^{u_k}\cdot 2^{v_k}$$

Тогда

$$N+1=3^a+2T=3^a\cdot 2^0+3^{u_1}\cdot 2^{v_1+1}+3^{u_2}\cdot 2^{v_2+1}+\ldots+3^{u_k}\cdot 2^{v_k+1}.$$

Докажем, что полученное представление имеет требуемый вид: очевидно, что $0<v_1+1<v_2+1<\ldots<v_k+1$. Что касается степеней тройки, то заметим, что по выбору

числа a верна оценка $3^a + 2T < 3^{a+1} = 3 \cdot 3^a$, откуда следует, что $T < 3^a$. Поэтому $u_1 < a$: иначе, предположив, что $u_1 \geq a$, мы получили бы, что $T \geq 3^{u_1} \cdot 2^{v_1} \geq 3^{u_1} \geq 3^a$ — противоречие. Следовательно, $a > u_1 > u_2 > \ldots > u_k \geq 0$, и мы получили необходимое представление числа $N + 1$.

Задача 3.

Ответ: не обязательно.

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ размером $10 \times 2 \times 2$: $AB = 10, AD = AA_1 = 2$. Нарисовав часть развертки параллелепипеда, заметим, что между его противоположными вершинами A_1 и C существует путь длины $\sqrt{10^2 + (2+2)^2} = \sqrt{116}$, проходящий по граням $A_1B_1C_1D_1$ и D_1C_1CD и пересекающий ребро C_1D_1. Таким образом, мы можем утверждать, что Расстояние с точки зрения муравья (здесь и далее мы будем называть его с большой буквы: "Расстояние", чтобы не путать с обычным расстоянием в трехмерном пространстве) между точками A_1 и C не превышает $\sqrt{116}$.

Обозначим теперь центр грани BCC_1B_1 за K и докажем, что Расстояние между A_1 и K больше, чем $\sqrt{116}$. В самом деле, чтобы муравью добраться из точки A_1 до точки K, ему необходимо:

а) добраться из точки A_1 до некоторой точки Q, лежащей на границе грани BCC_1B_1;

б) добраться из точки Q до точки K.

Заметим, что Расстояние от A_1 до Q не меньше 10, т.к. Расстояние между двумя точками не меньше обычного расстояния между этими точками, а обычное расстояние между A_1 и Q не меньше, чем расстояние от A_1 до плоскости BCC_1B_1 (поскольку точка Q лежит в этой плоскости), которое равно 10.

Что касается Расстояния от K до Q, то оно не меньше 1, поскольку 1 — это наименьшее Расстояние между точкой K и точками, расположенными на границе грани BCC_1B_1.

Таким образом, Расстояние между точками A_1 и K не меньше, чем $10 + 1 = 11 > \sqrt{116}$, т.е. K с точки зрения муравья находится от A_1 на большем Расстоянии, чем C.

Смотрите также решение задачи 6 сложного варианта младших классов.

Задача 4.

1) Вначале докажем полезное вспомогательное утверждение: для произвольного треугольника ABC выполнено равенство $AH = 2OA_1$, где O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, A_1 — середина стороны BC. В самом деле, пусть B_1 — середина стороны AC, C_1 — середина стороны AB. Тогда $\triangle A_1B_1C_1$ подобен $\triangle ABC$ с коэффициентом $\frac{1}{2}$. O — ортоцентр $\triangle A_1B_1C_1$, в самом деле: $OA_1 \perp BC$, как серединный перпендикуляр, а $BC \parallel B_1C_1$. Таким образом, точка O лежит на высоте $\triangle A_1B_1C_1$, опущенной на сторону B_1C_1, поскольку $AO_1 \perp B_1C_1$. Аналогично доказывается, что она лежит на двух других высотах. Тогда из подобия треугольников и следует, что $\frac{OA_1}{AH} = \frac{1}{2}$.

2) Перейдем к нашей задаче. $AH = 2OA_1$, а $OA_1 = IK$, поскольку OA_1KI, очевидно, является прямоугольником. Таким образом, отрезок AH равен диаметру вписанной в $\triangle ABC$ окружности (поскольку IK — ее радиус). Обозначим точку этой окружности, диаметрально противоложную K, за M. $AH = KM$, $AH \parallel KM$ — следовательно, $AHKM$ является параллелограммом, откуда $AM \parallel HK$. Если мы теперь докажем, что точка O лежит на прямой AM, то отсюда будет следовать, что $AO \parallel HK$.

3) Проведем через точку M касательную к вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Она

отсекает от $\triangle ABC$ маленький $\triangle AST$, подобный $\triangle ABC$ (поскольку эта касательная параллельна BC) и получающийся из него гомотетией с центром в точке A. Вписанная в $\triangle ABC$ окружность будет вневписанной по отношению к $\triangle AST$. Построим аналогичную вневписанную окружность для $\triangle ABC$, касающуюся BC в некоторой точке X. В силу гомотетичности $\triangle ABC$ и $\triangle AST$ точки X и M касания вневписанных окружностей со сторонами BC и ST лежат на одной прямой с центром гомотетии A.

4) Докажем, что $BX = CK$. В самом деле, пусть вневписанная окружность $\triangle ABC$ касается продолжений сторон AB и AC в точках U и V соответственно, а вписанная в $\triangle ABC$ окружность касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно.

Из равенства общих внешних касательных к окружностям $PU = QV$, или $PB + BU = QC + CV$. С учетом того, что $PB = BK$, $BU = BX$, $QC = CK$, $CV = CX$, имеем: $BK + BX = CK + CX$, или $(BC - CK) + BX = CK + (BC - BX)$, откуда $2BX = 2CK$.

5) Покажем теперь, что точка O лежит на MX. Действительно, возьмем в прямоугольном $\triangle MKX$ серединный перпендикуляр к KM — прямую OI и серединный перпендикуляр к XK, который совпадает с серединным перпендикуляром к BC в силу соотношения $BX = CK$. Поскольку точка O лежит на этих двух серединных перпендикулярах, она совпадает с серединой гипотенузы MX.

6) Итак, $O \in MX$, а поскольку согласно пункту 3) A, M и X лежат на одной прямой, то $O \in AM$, откуда и следует, согласно пункту 2), что $AO \parallel HK$, что и требовалось доказать.

Задача 5.

Предложим для каждого из игроков свою стратегию, позволяющую первому игроку гарантированно набрать 499 очков, как бы не играл его соперник, а второму — гарантированно набрать 501 очко.

<u>Стратегия первого игрока.</u>

Пусть в некоторый момент времени у первого игрока имеются карточки с числами $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ ($i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{n-1} < i_n$); у второго игрока имеются карточки с числами $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{n+1}$ ($j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_n < j_{n+1}$).

Первый игрок должен по возможности действовать так, чтобы после любого четного числа ходов между числами на карточках, имеющихся в наличии у игроков, существовала следующая зависимость:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
i_1 & < & i_2 & < & i_3 & < & \ldots & < & i_{n-1} & < & i_n & & \\
\vee & & \vee & & \vee & & & & \vee & & \vee & & \\
j_1 & < & j_2 & < & j_3 & < & \ldots & < & j_{n-1} & < & j_n & < & j_{n+1}
\end{array} \qquad (1)$$

Заметим, что в начальный момент такая зависимость существует: $i_m = 2m$ ($1 \leq m \leq 1000$), $j_m = 2m - 1$ ($1 \leq m \leq 1001$).

Теперь покажем, как должен ходить первый игрок. Для этого рассмотрим серию из двух подряд идущих ходов, в первом из которых начинает первый игрок, а во втором — второй.

Первым ходом первый игрок должен выложить карточку i_1, на что второй ответит некоторой карточкой j_p. Следующим ходом второй игрок выкладывает произвольную карточку j_m, а первый отвечает карточкой i_m и тем самым зарабатывает хотя бы 1 очко (поскольку $i_m > j_m$; а если еще и $i_1 > j_p$, то первый игрок получит сразу 2 очка за два этих хода). Схема снова примет вид (1):

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
& & i_2 & < & i_3 & < & i_4 & < \ldots < & i_{p-1} & < & i_p & < & i_{p+1} & < \ldots < & i_{m-1} & < & i_{m+1} & < \ldots < & i_{n-1} & < & i_n & & \\
& & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
& & j_1 & < & j_2 & < & j_3 & < \ldots < & j_{p-2} & < & j_{p-1} & < & j_{p+1} & < \ldots < & j_{m-1} & < & j_{m+1} & < \ldots < & j_{n-1} & < & j_n & < & j_{n+1}
\end{array}$$

(Это для случая $p < m$; при $p > m$ схема будет выглядеть аналогично).

Однако при $m = n + 1$ возникнет особый случай: ведь на ход второго игрока карточкой j_{n+1} первый не может ответить карточкой i_{n+1} (такой карточки у него просто нет). В этом случае ему следует ответить карточкой i_p и смириться с тем, что за эти два хода он, возможно, не получит ни одного очка. Схема теперь примет новый вид (2):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
& & i_2 & < & i_3 & < & i_4 & < \ldots < & i_{p-1} & < & i_{p+1} & < \ldots < & i_{n-1} & < & i_n \\
& & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
j_1 & < & j_2 & < & j_3 & < & j_4 & < \ldots < & j_{p-1} & < & j_{p+1} & < \ldots < & j_{n-1} & < & j_n
\end{array} \tag{2}$$

Теперь первый игрок сможет действовать так, чтобы после очередной пары ходов схема сохраняла вид (2), а он за эти два хода набирал бы по крайней мере 1 очко. Для этого ему надо действовать следующим образом:

Первым ходом первый игрок должен выложить карточку i_2, на что второй ответит некоторой карточкой j_p, а следующим ходом выложит произвольную карточку j_m. Здесь придется рассмотреть несколько случаев:

1) $p > 2$. Первый игрок отвечает карточкой i_m.
2) $p = 2$, $m = 1$. Первый игрок отвечает карточкой i_3.
3) $p = 2$, $m \geq 3$. Первый игрок отвечает карточкой i_m.
4) $p = 1$, $m = 2$. Первый игрок отвечает карточкой i_3.
5) $p = 1$, $m \geq 3$. Первый игрок отвечает карточкой i_m.

За второй ход первый игрок получит 1 очко.

Нетрудно показать, что в любом случае схема сохранит вид (2) (изобразим ее, например, для случая 1 и $p < m$):

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
& & i_3 & < & i_4 & < \ldots < & i_{p-1} & < & i_p & < & i_{p+1} & < \ldots < & i_{m-1} & < & i_{m+1} & < \ldots < & i_{n-1} & < & i_n \\
& & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
j_1 & < & j_2 & < & j_3 & < \ldots < & j_{p-2} & < & j_{p-1} & < & j_{p+1} & < \ldots < & j_{m-1} & < & j_{m+1} & < \ldots < & j_{n-1} & < & j_n
\end{array}$$

Итак, за каждую пару ходов (кроме, может быть, одной, когда произошел переход со схемы (1) на схему (2)) первому игроку удавалось зарабатывать хотя бы 1 очко. Таким образом, поскольку всего ходов было сделано 1000, первый игрок набрал как минимум 499 очков.

<u>Стратегия второго игрока.</u>

Пусть в некоторый момент времени у первого игрока имеются карточки с числами $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ ($k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_{n-1} < k_n$); у второго игрока имеются карточки с числами $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_{n+1}$ ($l_1 < l_2 < l_3 < \ldots < l_n < l_{n+1}$).

Второй игрок должен по возможности действовать так, чтобы после любого нечетного числа ходов между числами на карточках, имеющихся в наличии у игроков, существовала следующая зависимость:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & k_1 & < & k_2 & < & k_3 & < \ldots < & k_{n-1} & < & k_n \\
& & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\
l_0 & < & l_1 & < & l_2 & < & l_3 & < \ldots < & l_{n-1} & < & l_n
\end{array} \tag{3}$$

Заметим, что в начальный момент такая зависимость существует: $k_m = 2m$ ($1 \le m \le 1000$), $l_m = 2m+1$ ($0 \le m \le 1000$).

Теперь покажем, как должен ходить второй игрок.

Пусть первый игрок первым ходом выложил карточку с числом k_m. Тогда второй игрок отвечает числом l_m и зарабатывает 1 очко (поскольку $k_m < l_m$). Очевидно, структура схемы (3) сохранится (из нее лишь исчезнут расположенные одно под другим числа k_m и l_m). Итак, после первого в игре хода между числами на карточках игроков существует зависимость (3), а второй игрок имеет одно очко.

Далее рассмотрим серию из двух подряд идущих ходов, в первом из которых начинает второй игрок, а во втором — первый. Покажем, как второй игрок может добиться того, чтобы после этих двух ходов схема снова имела вид (3), а он за эти два хода набрал бы по крайней мере 1 очко.

Первым ходом второй игрок должен выложить карточку l_1, на что первый ответит некоторой карточкой k_p. Следующим ходом первый игрок выкладывает произвольную карточку k_m, а второй отвечает карточкой l_m и тем самым зарабатывает хотя бы 1 очко (поскольку $l_m > k_m$; а если еще и $l_1 > k_p$, то второй игрок получит сразу 2 очка за два этих хода). Схема снова примет вид (3). Например, при $p > m$ имеем (для случая $p < m$ все будет аналогично):

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & k_1 & < & k_2 & < & \ldots & < & k_{m-2} & < & k_{m-1} & < & k_{m+1} & < & \ldots & < & k_{p-2} & < & k_{p-1} & < & k_{p+1} & < & \ldots & < & k_{n-1} & < & k_n \\
 & & \wedge & & \wedge & & & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & & & \wedge & & \wedge \\
l_0 & < & l_2 & < & l_3 & < & \ldots & < & l_{m-1} & < & l_{m+1} & < & l_{m+2} & < & \ldots & < & l_{p-1} & < & l_p & < & l_{p+1} & < & \ldots & < & l_{n-1} & < & l_n
\end{array}$$

Если же $m = 1$, то второй игрок должен ответить на ход k_m карточкой l_p (несложно проверить, что и в этом случае он заработает как минимум 1 очко, а схема сохранит вид (3)). Таким образом, за 999 ходов второй игрок набрал 500 очков (1 очко за первый ход и по одному очку за каждые два последующих хода). После 999 ходов схема, как было показано выше, будет иметь вид (3), а карточек у игроков останется всего три:

$$\begin{array}{ccc}
 & & k_1 \\
 & & \wedge \\
l_0 & < & l_1
\end{array}$$

И, выложив карточку l_1, второй игрок гарантирует себе 501-е очко.

Смотрите также решение задачи 7 сложного варианта младших классов.

Задача 6.

Присвоим для удобства номера граням тетраэдра: грани ABC — номер 1, ABD — 2, BCD — 3, ACD — 4. Площади граней обозначим соответственно за S_1, S_2, S_3, S_4; по условию можно положить $S_1+S_2 = S_3+S_4 = S$. Объем тетраэдра $ABCD$ обозначим за V.

Обозначим середины ребер AB, CD, AD, BC, AC, BD — за K, L, M, N, P, Q соответственно. PN является средней линией $\triangle ACB$, поэтому $PN \parallel AB$. Аналогично $MQ \parallel AB$, как средняя линия $\triangle ADB$. По транзитивности параллельных прямых $PN \parallel MQ$, откуда следует, что M, N, P и Q лежат в одной плоскости, которую мы обозначим α. Также $NQ \parallel PM$, поэтому $MPNQ$ — параллелограмм.

Докажем что объемы V_1 и V_2 частей, на которые тетраэдр $ABCD$ делится плоскостью α, равны. Отрезки MN и PQ делятся их точкой пересечения G пополам.

Аналогично, отрезки KL и MN делятся их точкой пересечения пополам, т. е. три отрезка KL, MN и PQ пересекаются в точке G и делятся ей пополам. Следовательно, пирамиды $KMPNQ$ и $LMPNQ$ симметричны относительно точки G. Каждый из тетраэдров $AKMP$, $BKNQ$, $CLNP$, $DLMQ$ гомотетичен тетраэдру $ABCD$ с коэффициентом $1/2$. Отсюда $V_1 = V_{KMPNQ}+V_{AKMP}+V_{BKNQ} = V_{LMPNQ}+V_{CLNP}+V_{DLMQ} = V_2$, что и требовалось.

Далее, пусть биссекторная плоскость двугранного угла при ребре AB пересекает плоскость α по некоторой прямой u, а биссекторная плоскость двугранного угла при ребре CD пересекает плоскость α по некоторой прямой v. Обозначим точку пересечения u и v за I, а расстояния от нее до граней 1, 2, 3, 4 — соответственно за r_1, r_2, r_3, r_4. По построению $r_1 = r_2 = r$, $r_3 = r_4 = r'$. Осталось показать, что $r = r'$; отсюда будет следовать, что I совпадает с центром вписанной сферы.

Поскольку средняя линия отрезает от треугольника площади S_0 треугольник площади $S_0/4$, имеем: $S_{APNB} = 3S_1/4$, $S_{AMQB} = 3S_2/4$, $S_{BNQ} = S_3/4$, $S_{AMP} = S_4/4$. Запишем равенство объемов: $V_1 = V_{IAPNB} + V_{IAMQB} + V_{IBNQ} + V_{IAMP} = \frac{1}{6}(3S_1r_1/4 + 3S_2r_2/4 + S_3r_3/4 + S_4r_4/4) = \frac{1}{24}(3r(S_1 + S_2) + r'(S_3 + S_4)) = \frac{S}{24}(3r + r')$. Аналогично, $V_2 = \frac{S}{24}(r + 3r')$. Из равенства $V_1 = V_2$ вытекает, что $3r + r' = r + 3r'$, откуда $r = r'$.

Задача 7.

Назовем таблицу или любую ее часть *приводимой*, если она путем некоторого конечного количества ходов приводится к таблице из одних плюсов.

а) Покажем, что если в данной таблице любой квадрат 2×2 приводим, то и вся таблица приводима (это утверждение равносильно содержащемуся в задаче).

Для начала заметим, что квадрат 2×2 приводим в том и только том случае, если в нем четное число плюсов (доказывается этот факт простым перебором всех возможных случаев). Предположим, любой квадрат 2×2 в нашей таблице приводим. Покажем, как в этом случае можно привести всю таблицу.

Приведем квадрат, расположенный в верхнем левом углу таблицы, т.е состоящий из ячеек $(11, 12, 21, 22)$ (первое число в индексе ячейке — номер строки, второе — номер столбца). Квадрат $A = (12, 13, 22, 23)$ тоже приводим. Т.к. в ячейках 12 и 22 уже стоят плюсы, то в ячейках 13 и 23 стоят в силу приводимости квадрата A либо два плюса (и в этом случае квадрат A уже приведен), либо два минуса (тогда мы приводим A, поменяв все знаки в третьем столбце). Продолжая так дальше, мы приведем все квадраты 2×2, расположенные в верхних двух строках таблицы.

Действуя, как и раньше, приведем квадрат $B = (21, 22, 31, 32)$ (рассуждая аналогично: ведь в ячейках 21 и 22 уже стоят плюсы – значит, знаки в ячейках 31 и 32 одинаковы и т.д.). После этого квадрат $C = (22, 23, 32, 33)$ автоматически оказывается приведенным: ведь в ячейках 22, 23, 32 стоят плюсы, а всего плюсов в квадрате C четное количество. Значит, в ячейке 33 тоже должен находиться плюс. Продолжая дальше, получим таким образом, что и все остальные квадраты 2×2, расположенные во второй и третьей строках, уже приведены.

Действуя так и дальше (двигаясь по строке слева направо, а затем спускаясь на следующую строку), приведем всю таблицу.

б) Квадрат 4×4 приводим в том и только том случае, если в клетках, расположенных вдоль его границы, но не являющихся угловыми (назовем эти клетки *ключевыми*), находится четное число плюсов. Для доказательства этого факта следует заметить, что четность числа плюсов в ключевых клетках является инвариантом, т.е. не меняется при разрешенных преобразованиях строк, столбцов и диагоналей таблицы; следовательно, если в квадрате нечетное число плюсов, то привести его невозможно, т.к. в приведенном квадрате в ключевых клетках должно находиться четное число плюсов — 8. Если же в квадрате изначально четное число плюсов, то нетрудно указать алгоритм приведения этого квадрата.

Рассуждая, как и в пункте "а", покажем, как можно привести всю таблицу, если любой ее квадрат 4×4 приводим (квадрат, как и раньше, будем задавать указанием четырех его углов).

Приведем квадрат $(11, 14, 41, 44)$. Квадрат $A = (12, 15, 42, 45)$ тоже приводим — следовательно, в ячейках 25 и 35 знаки одинаковы. Изменим, если надо, все знаки 5-го столбца так, чтобы в этих двух ячейках появились плюсы. Если в ячейке 15 оказался минус, то поменяем все знаки на диагонали $(15; 26; 37; \ldots)$. Минус в ячейке 45 можно исправить, поменяв все знаки на диагонали $(\ldots 54; 45; 36; \ldots)$. Теперь квадрат A приведен. Продолжая так дальше, мы приведем все квадраты, расположенные в первых четырех строках таблицы. Перейдем к рассмотрению квадратов, занимающих строки 2 — 5.

Квадрат $(21, 24, 51, 54)$ приводим. Значит, знаки в ячейках 52 и 53 одинаковы. Изменим, если надо, знак 5-й строки так, чтобы эти знаки превратились в плюсы. Если в ячейке 51 стоит минус, то поменяем все знаки на диагонали $(51; 62; 73; \ldots)$.

Квадрат $B = (22, 25, 52, 55)$ приводим. Значит, и в ячейках 53 и 54 знаки одинаковы. Но в ячейке 53 стоит плюс (ведь она содержится в квадрате B, который мы уже привели) — следовательно, и в ячейке 54 тоже. Рассмотрев квадрат $(23, 26, 53, 56)$, убедимся аналогичным образом, что и ячейка 55 содержит плюс. Так мы дойдем до ячейки $5, n-1$, а знак ячейки $5, n$ можно при необходимости исправить, сменив все знаки на диагонали $(5, n;\ 6, n-1;\ 7, n-2; \ldots)$.

Продолжая аналогичное рассуждение (двигаясь по строке слева направо, а затем спускаясь на следующую строку), приведем всю таблицу.

Как ставились оценки.

Как всегда, "+" ставится за любое правильное решение, "+−" за решение с существенным, но легко восполнимым пробелом, "−+" — за неверное решение, однако с существенным продвижением, "−" за неверное решение. "0" ставится, если задача не записана. Оценки "+.", "−." (варианты "+" и "−") ставятся в случае менее существенных недостатков (продвижений), чем "+−" и "−+". Оценка "+/2" ставится в отдельных случаях, когда в тексте присутствует правильная идея, недостаточно развитая, чтобы считать задачу решенной. Эта оценка ставится и в том случае, если задача естественно распадается на две половины, из которых одна решена. Если жюри хочет обратить внимание на необычное достижение учащегося (краткость, красота, усиление результата и т.п.), — это отмечается знаком "+!".

При массовой проверке работ возникают типичные случаи, в которых требуются уточнения, считать ли недостаток (продвижение) существенным. Эти случаи описаны ниже. Предлагаемые критерии составлены на основе проверки части работ, которая попала в поле зрения Жюри в первые дни после проведения осеннего тура Турнира городов.

Осенний тур, тренировочный вариант, 8–9 классы.

Задача 1.

+	Правильный рисунок или объяснение, где какие расставить числа (проверка правильности не требуется).
−	Неверный пример (в том числе пример с неправильно решенной системой).

Задача 2.

	Никак не оцениваются рассуждения, сделанные в предположении того, что семиугольник невыпуклый. Оценка не снижается за использование выпуклости (в том числе без явной ссылки). Оценка не снижается, если есть утверждение типа "четырехугольники $A_1A_3A_5A_6$ и соответствующие равны", но нет подробного доказательства.
±	Утверждается равенство углов, опирающихся на стороны, но в доказательстве этого факта не хватает упоминания равенства углов, опирающихся на большие диагонали (или равенства соответствующих треугольников).

Задача 3.

	Равенство $1+3+...+2n-1=n^2$ считается общеизвестным: использование без доказательства не снижает оценку, доказательство никак не оценивается.
±	Присутствует идея соответствия, до полного решения не хватает утверждения типа "среди $n+1, \ldots, 2n$ есть ровно одно число с данным наибольшим нечетным делителем" (например, счета количества четных чисел среди $n+1$, $\ldots$, $2n$ с наибольшими нечетными делителями из данного множества).
±	Решение типа "разделим все четные числа на 2, потом все получившиеся четные еще раз на 2 и т.д., получим все нечетные числа от 1 до $2n-1$", не хватает доказательства того, что все полученные числа различны и/или того, что получатся все нечетные числа.

$\mp$	Сформулирована идея соответствия наибольших нечетных делителей четных чисел с первыми n нечетными числами, объяснения нет.
$-$	Разобраны только частные случаи.

Задача 4.

	Соображения по поводу $n = 1, 2, 3$ (равно как и их отсутствие) никак не оцениваются.
$\pm$	Оценка $n < 6$ и пример $n = 5$, но не разобран случай $n = 4$.
$\frac{+}{2}$	Доказано, что никакие n, кроме $n = 5$, не подходят, но нет примера.
$\frac{+}{2}$	Пример для $n = 5$ и больше ничего.
$\frac{+}{2}$	Пример для $n = 5$ и доказательство того, что n нечетно.
$\mp$	Только оценка $n < 6$.
$-$	Доказано, что n нечетно, и больше ничего.

Задача 5.

	Доказательство оценки $N \geq 49$ не повышает оценку за задачу. Примеры для $N > 50$ не повышают оценку за задачу. Пример для меньшего количества шашек, из которого видно, как строится пример для 25 шашек, оценивается как пример для 25 шашек.
$\pm$	Пример $N = 50$, доказательства оценки нет.
$\mp$	Доказательство оценки $N \geq 50$, примера нет.

Осенний тур, тренировочный вариант, 10–11 классы.

Задача 1.

	оценка не снижается, если без доказательства используется тот факт, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2
$\pm$	есть идея сделать соответствие с первыми n нечетными числами, доказательство такое: "уже есть все нечетные числа от $n+1$ до $2n$, поделим четные числа от $n+1$ до $2n$ на 2, те из них, которые остались четными, снова поделим на 2, и т.д." Далее без объяснения утверждается, что получатся первые n нечетных чисел
$\mp$	есть идея сделать соответствие с первыми n нечетными числами, но нет объяснения

Задача 2.

$+.$	правильное рассуждение, но при подсчете числа квадратиков сделаны арифметические ошибки (получен неверный ответ)
$\mp$	только за правильный ответ и пример

Задача 3.

$\frac{+}{2}$	объяснено, что достаточно решить задачу в случае, когда на руках есть набор из 4 монет по 1 руб, 1 монеты в 5 руб, 4 монет по 10 руб, 1 монеты в 50 руб, 4 монет по 100 руб, 1 монеты в 500 руб, 1 монеты в 1000 руб, но для этого случая решение не найдено
$\frac{+}{2}$	приводится только правильное решение в предположении, что на руках есть набор из 4 монет по 1 руб, 1 монеты в 5 руб, 4 монет по 10 руб, 1 монеты в 50 руб, 4 монет по 100 руб, 1 монеты в 500 руб, 1 монеты в 1000 руб, но нет объяснения, почему достаточно решить такую задачу
$\mp$	есть идея вначале отдать все деньги купцу, и задача сводится к доказательству того, что всеми имеющимися деньгами можно заплатить любую сумму от 1 до 1999 руб., но решение не получено

Задача 4.

оценка не снижается, если в доказательстве используются общеизвестные геометрические факты (например: "площадь четырехугольника, вписанного в окружность радиуса R, не превосходит $4R^2$")

Задача 5.

$\pm$	правильная четкая плоская картинка (например, нарисованная на решетке, вершины — в узлах решетки) без обоснования (ни слова о пространственной реализации)
$\frac{+}{2}$	правдоподобная плоская картинка без обоснования, (ни слова о пространственной реализации)
$-.$	только правильный ответ (без примера)

Осенний тур, сложный вариант, 8–9 классы.

Задача 1.

оценка не снижается, если в доказательстве или при построении примера используются без доказательства общеизвестные факты типа "простых чисел бесконечно много", и т.п.

Задача 2.

$\mp$ есть идея построения графа знакомств и поиска цепей вида "брюнет-блондинка-брюнет-блондинка-…", но решение не найдено

$-$ только правильный ответ

Задача 3.

$\mp$ доказано, что уравнение имеет решение при всех четных $k \geq 4$

$\mp$ доказано, что уравнение имеет решение при всех нечетных $k \geq 5$

$-.$ только правильный ответ

Задача 4.

оценка не снижается, если при верном решении нет обоснования правильности примера с 28 отмеченными клетками (есть только рисунок)

$\frac{+}{2}$ правильный пример с 28 отмеченными клетками, но нет доказательства, что меньшим числом клеток обойтись нельзя

$\frac{+}{2}$ получена оценка (есть доказательство того, что меньшим чем 28 числом клеток обойтись нельзя), но нет правильного примера с 28 отмеченными клетками

$-.$ есть идея в примере располагать клетки в виде прямоугольника, но нет примера с 28 клетками (клеток 30 и т.п.)

Задача 5.

$\mp$ в квадрате проведены диагонали, и доказано, что указанная в условии сумма углов отличается от 180° не более чем на 90°

Задача 6.

от $\pm$ до $\frac{+}{2}$ построен правильный пример параллелепипеда, указана более удаленная от вершины точка, но нет полного доказательства (например, разобраны не все случаи)

$\mp$ только правильный ответ

Задача 7.

$\frac{+}{2}$ приведена правильная стратегия для одного из игроков, найдено верное максимальное число очков, которое может гарантировать себе этот игрок, и доказано, что он может это число очков гарантировать, но нет доказательства максимальности (что этот игрок не может гарантировать себе большее число очков)

$\mp$	приведены без доказательства правильные стратегии для игроков, получен правильный ответ
$-.$	только правильный ответ

Осенний тур, сложный вариант, 10–11 классы.

Задача 1.

$\mp$	есть идея построения графа знакомств и поиска цепей вида "брюнет-блондинка-брюнет-блондинка-…", но решение не найдено
$-$	только правильный ответ

Задача 2.

$\pm$	есть идея разделить данное число на 2 и 3 в максимально возможной степени (после чего задачу достаточно решить для чисел, взаимно простых с 2 и 3), и есть также идея из нечетного числа выделять наибольшую степень тройки (то есть представлять его в виде $3^a + r$, где $0 \le r < 2 \cdot 3^a$), но решение не закончено
$\frac{+}{2}$	есть только идея из нечетного числа выделять наибольшую степень тройки, то есть представлять его в виде $3^a + r$, где $0 \le r < 2 \cdot 3^a$
$\mp$	есть только идея разделить данное число на 2 и 3 в максимально возможной степени, после чего задачу достаточно решить для чисел, взаимно простых с 2 и 3

Задача 3.

от $\pm$ до $\frac{+}{2}$	построен правильный пример параллелепипеда, указана более удаленная от вершины точка, но нет полного доказательства (например, разобраны не все случаи)
$-.$	только правильный ответ

Задача 4.

пока критериев нет

Задача 5.

$\frac{+}{2}$	приведена правильная стратегия для одного из игроков, найдено верное максимальное число очков, которое может гарантировать себе этот игрок, и доказано, что он может это число очков гарантировать, но нет доказательства максимальности (что этот игрок не может гарантировать себе большее число очков)
$\mp$	приведены без доказательства правильные стратегии для игроков, получен правильный ответ

$-$.   только правильный ответ

Задача 6.

-.   доказано, что середины ребер лежат в одной плоскости

Задача 7 а).

$\mp$ замечено только (возможно, без доказательства), что если квадрат 2×2 приводим, то в нем всегда четное число плюсов (и наоборот)

Задача 7 б).

$\mp$ замечено только (возможно, без доказательства), что если квадрат 4×4 приводим, то в нем на "ключевых" позиции (см. рис.) всегда четное число плюсов (и наоборот)

Рисунок к задаче 7б ("ключевые" позиции отмечены знаком "$*$"):

```
0 * * 0
* 0 0 *
* 0 0 *
0 * * 0
```