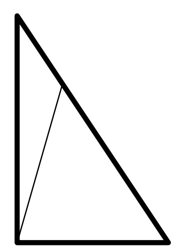
Конкурс по математике — ответы и решения.

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача; решать задачи более старших классов также разрешается.

1. (6–9) Есть три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Саша взял себе один треугольник, а Боря — два оставшихся. Оказалось, что Боря может приложить (без наложения) один из своих треугольников к другому, и получить треугольник, равный Сашиному. Какой из этих треугольников взял Саша?

Решение. «Лобовое» решение задачи состоит в том, чтобы перебрать возможные способы приложить один треугольник к другому так, чтобы получился треугольник, выбрать из них подходящие под условие задачи, и получить ответ. Однако, лучше, заметив, что в этом случае Саша может разрезать одной прямой свой треугольник на два, равных Бориным, перебирать именно способы разрезать треугольник на два. При этом один из концов отрезка расположен в вершине исходного треугольника, а другой — на противоположной стороне.

Допустим сначала, что Саша взял остроугольный треугольник. Посмотрим на сторону, которую пересёк разрез. Если разрез перпендикулярен этой стороне, получится два прямоугольных треугольника. Иначе получится один остроугольный и один тупоугольный треугольник. Ни один из этих вариантов не соответствует условию задачи, поэтому Саша не мог взять остроугольный треугольник.



Допустим теперь, что Саша взял тупоугольный треугольник. Посмотрим опять на сторону, которую пересёк разрез. Если разрез перпендикулярен этой стороне, получится два прямоугольных треугольника. Иначе один из получившихся треугольников — тупоугольный. В любом случае условие задачи не выполнено, а значит этот случай невозможен.

Поэтому Саша *мог* взять прямоугольный треугольник. Соответствующий пример приведён на рисунке.

2. (6–9) На станции «Лукоморье» продают карточки на 1, 5 и 20 поездок. Все карточки стоят целое число золотых монет. Пять карточек на одну поездку дороже, чем одна на 5 поездок, а 4 карточки на 5 поездок дороже одной карточки на 20 поездок. Оказалось, что самый дешёвый способ проезда для 33-х богатырей — это купить карточек на 35 поездок, потратив на это 33 золотые монеты. Сколько стоит карточка на 5 поездок?

Решение. В условии сказано, что самый дешёвый способ проезда для 33-х богатырей — это купить карточек на 35 поездок. Выясним, какие карточки выгоднее всего покупать, чтобы набрать эти 35 поездок. Поскольку и 5, и 20, и 35 делятся на 5, то число купленных карточек на одну поездку делится на 5. А значит, если такие карточки есть, мы можем заменить их на в 5 раз меньшее число карточек на 5 поездок. Следовательно, при самом выгодном способе набрать 35 поездок карточек на одну поездку брать не надо.

Осталось два способа: 7 карточек на 5 поездок или 3 карточки на 5 поездок и одну карточку на 20 поездок. Поскольку 4 карточки на 5 поездок дороже одной карточки на 20 поездок, выгоднее всего брать 3 карточки на 5 поездок и одну на 20.

Таким образом, три карточки на 5 поездок и одна карточка на 20 поездок стоят 33 рубля. Поскольку четыре карточки на 5 поездок дороже одной на 20, семь карточек на 5 поездок дороже 33 рублей. Следовательно, карточка на 5 поездок стоит как минимум 5 рублей ($4 \cdot 7 = 28 < 33$). С другой стороны, по условию задачи, 35 поездок покупать выгоднее, чем две карточки по 20 поездок, а значит, три карточки на 5 поездок дешевле одной на 20. Следовательно, шесть карточек на 5 поездок дешевле 33 рублей, то есть одна карточка на 5 поездок не дороже 33 рублей, откуда одна карточка на 5 поездок не может быть дороже 5 рублей ($6 \times 6 = 36 > 33$). Итак, одна карточка на 5 поездок не может стоить ни дешевле 5 рублей, ни дороже 5 рублей. Проверку того, что она может стоить 5 рублей, мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Ответ: 5.

3. (7–11) На доске было написано несколько натуральных чисел, причём разность любых двух соседних чисел равна одному и тому же числу. Коля заменил в этой записи разные цифры разными буквами, а одинаковые цифры — одинаковыми буквами. Восстановите исходные числа, если на доске написано: Т, ЕЛ, ЕК, ЛА, СС

Решение. Заметим, что все эти числа можно определить, если знать первое число и разность d двух соседних. Посмотрим на первое число. Про него можно сказать только что оно однозначное. А что можно сказать про разность d? Посмотрев на первое и вторское, можно сказать только, что $d < 90$. Зато, так как у второго и третьего чисел совпадают первые цифры, они лежат в одном десятке, и их разность (равная d), не превосходит 9. А значит, прибавив d к первому (однозначному) числу, мы можем получить только двузначное число, начинающееся на 1, то есть Е $= 1$. Аналогично, Л $=$ 2, С $=$ 3. Получаем запись: Т, 12, 1К, 2А, 33. Заметим, что (1К) $-$ 12 $=$ (2А) $-$ (1К) $=$ 33 $-$ (2А) $= d$, откуда $33 - 12 = 3d$, $d = 7$. Мы восстановили последнее число и разность. Дальше легко восстановить запись: 5, 12, 19, 26, 33.

4. (9–11) Решите задачу № 3 для надписи: A, BC, DEF, CGH, CBE, EKG

Решение. Аналогично предыдущей задаче, посмотрим на первые два числа. Первое число однозначное, а второе — двузначное. Следовательно, их разность меньше 100. Следовательно, цифра, стоящая в разряде сотен, каждый раз увеличивается не более, чем на 1, откуда D $= 1$, C $= 2$, E $= 3$. Получаем запись: A, B2, 13F, 2GH, 2B3, 3KG. Аналогично предыдущей задаче, $3d =$ (2B3) $-$ (B2) $= 201$, $d = 67$. Дальше легко восстановить запись: 5, 72, 139, 206, 273, 340.

5. (10–11) Маленький Петя подпилил все ножки у квадратной табуретки и четыре отпиленных кусочка потерял. Оказалось, что длины всех кусочков различны и что табуретка после этого стоит на полу, пусть наклонно, но по-прежнему, касаясь пола всеми четырьмя концами ножек. Дедушка решил починить табуретку, однако нашёл только три кусочка с длинами 8, 9 и 10 см. Какой длины может быть четвёртый кусочек?

Решение. Пусть A, B, C, D — концы исходных ножек табуретки, а A', B', C' и D' — подпиленных. Докажем, что $AA' + CC' = BB' + DD'$. Поскольку табуретка стоит, касаясь пола четырьмя ножками, точки A', B', C' и D' лежат в одной плоскости. Табуретка квадратная, значит плоскости $ABA'B'$ и $CDC'D'$ параллельны. Следовательно, $A'B' \parallel C'D'$. Аналогично, $B'C' \parallel A'D'$. Таким образом, четырёхугольник $A'B'C'D'$ — параллелограмм, и его диагонали пересекаются в общей середине O'. Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Заметим, что отрезок OO' — средняя линия как в трапеции $ACC'A'$, так и в трапеции $BDD'B'$, а значит $AA' + CC' = 2OO' = BB' + DD'$.

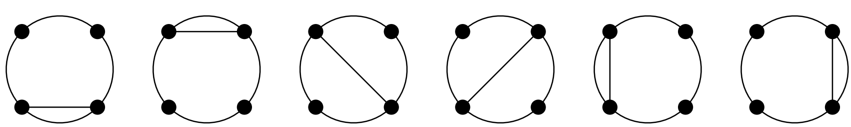
Это утверждение можно доказать, заметив, что уравнение плоскости линейно. Также это утверждение можно было получить, воспользовавшись методом координат.

Теперь переберём возможные длины отпиленной части, расположенной по диагонали от потерянной. При этом получим, что длина отпиленной части удовлетворяет одному из равенств $8 + x = 9 + 10$, $9 + x = 8 + 10$, $10 + x = 8 + 9$, откуда $x = 7$, $x = 9$ или $x = 11$. Поскольку длины всех кусочков различны, $x \neq 9$, и остаются только варианты 7 и 11.

Ответ: 7, 11.

6. (10–11) На окружной железной дороге n станций. Иногда дежурные по станциям связываются друг с другом по радио. В каждый момент времени сеанс связи ведут только два человека. За сутки между каждыми двумя станциями произошёл ровно один радиосеанс. Для каждой станции (если учесть только её сеансы) оказалось, что она общалась с другими станциями по очереди в порядке их расположения на железной дороге (по или против часовой стрелки, у разных станций эти направления могут быть разными), начиная с одной из соседних и заканчивая другой. Чему может равняться n? (Разбор случаев $n = 4$ и $n = 5$ учитывается как частичное решение задачи.)

Решение. Порядок, в котором могут связываться по радио четыре станции, изображён на рисунке.



Докажем теперь, что 5 станций уже не могут общаться указанным в задаче способом. Занумеруем станции по кругу. Заметим, что первыми могут поговорить только две соседние станции. Пусть это станции 1 и 2. Для следующего разговора есть всего два варианта: 4-я станция с 5-й и 3-я станция с 4-й. А третий разговор уже невозможен.

Допустим, n может равняться какому-нибудь числу, большему 5. Посмотрим на какие-нибудь 5 станций из этих n. Эти станции говорили между собой способом, удовлетворяющим условию, что невозможно. Следовательно, число n не может быть больше 5.