XXXI Турнир им. М. В. Ломоносова 28 сентября 2008 года

Конкурс по математике. Ответы и решения. Черновик, версия 18.11.2008, 10.01.2009.

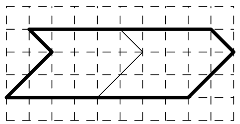
В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (причём не обязательно решать абсолютно все задачи своего класса); решать задачи более старших классов также разрешается.

1. (6–7) Танины часы отстают за каждый час на 5 минут. В полдень к Тане придут гости. Сейчас 6 часов утра. На какое время ей надо поставить стрелки часов, чтобы в полдень часы показывали правильное время?

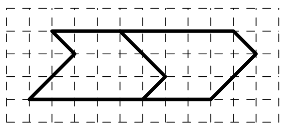
Ответ. Ей надо поставить часы на 6:30.

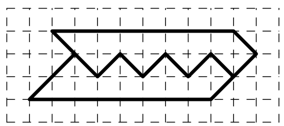
Решение. Полдень наступит через 6 часов. За это время Танины неисправные часы отстанут на 5 минут $\cdot\, 6 = 30$ минут. Чтобы в полдень показания часов оказались верными, сейчас (в 6 часов утра) нужно добавить лишние полчаса, то есть поставить часы на 6 часов 30 минут.

2. (6–8) Петя разрезал фигуру на две равные части, как показано на рисунке. Придумайте, как разрезать эту фигуру на две равные части другим способом.



Решение. Приведём ещё два возможных варианта разреза, кроме приведённого в условии.





Замечание. Рассмотренная в задаче фигура является примером несимметричной фигуры (не имеющей ни центра, ни оси симметрии), которую можно разрезать на две равных фигуры тремя различными способами. Интересно было бы ответить на следующий вопрос: существует ли несимметричная фигура, которую можно разрезать на две равные четырьмя или большим числом способов? Если вам удастся придумать пример такой фигуры, напишите, пожалуйста, об этом жюри Турнира им. Ломоносова по адресу turlom@mccme.ru

3. (6–9) Мальвина дала Буратино задание: «Сосчитай кляксы в своей тетрадке, прибавь к их числу 7, раздели на 8, умножь на 6 и отними 9. Если сделаешь всё правильно, получишь простое число». Буратино всё перепутал. Кляксы он подсчитал точно, но потом умножил их количество на 7, вычел из результата 8, затем разделил на 6 и прибавил 9. Какой ответ получился у Буратино?

Ответ. Буратино получил $18\frac{1}{6}$.

Решение. Рассмотрим вычисления по плану Мальвины. Соседние операции «раздели на 8» и «умножь на 6» заменим на одну операцию умножения на $6/8 = 3/4$. Если бы после умножения на $3/4$ получалось дробное число, то, вычтя из него 9, мы бы снова получили дробное число, а должны получить простое (т. е. целое), значит при умножении на $3/4$ мы получаем целое число. Причём это число будет делиться на 3 (при умножении на $3/4$ тройке «не с чем сократиться»). Тогда после вычитания 9 получится число, также делящееся на 3. И известно, что это число простое. Единственное простое число, делящееся на 3, это само число 3. Значит, по плану Мальвины в конце должно было получиться 3. Произведя операции в обратном порядке, найдём число клякс:

$$(3+9) : 6 \cdot 8 - 7 = 9.$$

Буратино получил число

$$(9 \cdot 7 - 8) : 6 + 9 = 18 + \frac{1}{6}.$$

4. (6–11) В магазине продают DVD-диски — по одному и упаковками двух видов (упаковки разных видов различаются по количеству и стоимости). Вася подсчитал, сколько требуется денег, чтобы купить N дисков (если выгоднее всего купить больше дисков, чем нужно — Вася так и делает):

N	1	2	3	4	5	6–10	11	12	13	14	15	16–20	21	22	23–25	26	27	28
Руб.	20	40	60	80	100	111	131	151	171	191	211	222	242	262	265	285	305	325

Сколько дисков было в упаковках и по какой цене упаковки продавались? Какое количество денег необходимо Васе, чтобы купить не менее 29 дисков?

Ответ. В продаже имеются:
1) одиночные диски по цене 20 рублей;
2) упаковки по 10 дисков по цене 111 рублей за упаковку;
3) упаковки по 25 дисков по цене 265 рублей за упаковку.

Для покупки не менее 29 дисков необходимо 333 рубля.

Внимательно изучив и проанализировав таблицу «одним взглядом», сообразительный человек скорее всего разберётся в сути дела и получит верный ответ. Однако записать математически строгое решение этой задачи не очень просто. Приведём несколько возможных решений и соображений, которые могут помочь разобраться в задаче тем, у кого это не получилось самостоятельно.

Решение 1, которое мог бы придумать обычный покупатель. Видно, что один диск стоит 20 руб. Будем заполнять ещё одну строчку таблицы, записывая в неё стоимость покупки, при использовании уже «выявленных» упаковок.

Итак: 1 — 20; 2 — 40; 3 — 60; 4 — 80; 5 — 100; 6 — 120.

Отлично — обнаружено расхождение! Значит 6 дисков уже выгоднее покупать не по одному, а купив некоторую упаковку, ценой в 111 руб. Давайте поймём, сколько же дисков в этой упаковке за 111 руб.?

7, 8, 9, 10 дисков можно купить также за 111 руб. А вот 11 дисков можно купить уже дороже. Значит в магазине предлагают набор из 10 дисков за 111 руб.

Двигаемся дальше. 11 дисков можно купить за 131 руб. Это столько же, как и упаковка из 10 дисков за 111 руб. и ещё один диск за 20 руб, 12 дисков — 151 руб. $=$ 111 руб. $+ 2 \cdot 20$ руб., 15 дисков — 211 руб. $=$ 111 руб. $+ 5 \cdot 20$ руб. А вот 16 дисков уже обойдутся дешевле, чем упаковка в 10 дисков и ещё 6 дисков (так как мы уже знаем, что 6 дисков выгоднее покупать упаковкой в 10 дисков).

Итак, чтобы купить 16 дисков мы покупаем две упаковки по 10 дисков, всего за 222 руб. Столько же денег тратится и для покупки для 17, 18, 19, 20 дисков — всё пока совпадает с таблицей.

Двигаемся дальше. 21 диск — 242 руб. (это $2 \cdot 111 + 20$), 22 диска — 262 руб. (это $2 \cdot 111 + 2 \cdot 20$). А вот 23 диска обойдутся уже в 265 руб. Это дешевле, чем было бы при покупке упаковок по 10 дисков или «одиночных» дисков (два набора по 11 дисков и 3 диска стоят 282 руб., три набора по 11 дисков стоят 333 руб.).

Значит, в этом случае, выгоднее купить некоторую новую упаковку или несколько упаковок (в том числе и новую). Но, если среди купленных нами упаковок была бы уже известная нам упаковка в 10 дисков за 111 рублей, то мы бы могли купить $23 - 10 = 13$ дисков за $265 - 111 = 154$ рубля. А по условию 13 дисков мы можем купить минимум за 171 рубль. Аналогично, если бы мы купили не менее 23 дисков за 265 рублей при этом купив 1 диск за 20 — то мы бы могли купить не менее 22 дисков за $265 - 20 = 245$ рублей, чего по условию мы сделать не можем. Значит, покупая 23 диска, мы использовали только новую упаковку.

Сколько же в ней дисков? Покупка и 24 и 25 дисков стоит те же 265 руб., а вот 26 дисков уже дороже. Значит, в упаковке 25 дисков, и стоит она 265 руб. (Если бы эти 265 рублей стоила не одна, а несколько одинаковых упаковок, то в сумме они бы тоже составляли 25 дисков, значит это была бы упаковка на 5 дисков по цене 53 рубля, которой у нас нет).

Итак, мы нашли цену и количество дисков в обеих предлагаемых в магазине упаковках: это упаковка из 10 дисков по 111 руб. и упаковка из 25 дисков по 265 руб.

Тогда 29 дисков дешевле всего купить, купив 3 упаковки по 10 дисков за $111 \cdot 3 = 333$ рубля. (Это выгоднее, чем покупать одну упаковку на 25 дисков и ещё 4 диска всего за $265 + 80 = 345$ рублей.)

Решение 2, которое мог бы придумать покупатель-математик. Если наиболее выгодная покупка состоит из нескольких предметов (дисков по отдельности и упаковок), то диски, содержащиеся в любом предмете или любом наборе этих предметов, были куплены способом, который нельзя «улучшить» (сделать более выгодным) — иначе, «улучшая» способ оплаты части дисков, мы бы смогли сделать более выгодной и всю покупку целиком.

Из этого следует, что если мы использовали для покупок какую-то упаковку, то для покупки такого количества дисков, какое содержится в этой упаковке, по минимальной цене можно покупать одну эту упаковку.

Из таблицы видно, что диски в количестве 1, 2, 3, 4, 5 покупались по отдельности по цене 20 рублей за диск.

Покупка не менее 6 дисков такой цене не соответствует, значит, в этом случае была куплена хотя бы одна упаковка. Но что-то ещё, кроме этой упаковке, куплено быть не могло, так как тогда получилось бы, что такая упаковка оптимизирует способ покупки менее чем 6 дисков. Но тогда мы бы и воспользовались таким способом при покупке такого (меньшего 6) количества.

При покупке 7 дисков должна была использоваться такая же упаковка, так как разделить покупку 7 дисков на несколько предметов по аналогичным причинам нельзя. То же последовательно (используя каждый раз ранее полученную информацию) мы устанавливаем для 8, 9 и 10 дисков.

Цена покупки 11 дисков больше, чем 10. Значит, в этой упаковке только 10 дисков. Таким образом, мы узнали параметры одной из упаковок: содержит 10 дисков и стоит 111 рублей.

Теперь заметим, что цена покупки 24 и 25 дисков — одинаковая, а для покупки 26 — другая.

При покупке 25 дисков мы не могли использовать одиночных дисков (так как иначе, отказавшись от одного одиночного диска, мы могли бы купить 24 диска на 20 рублей дешевле, чем 25 дисков, а в таблице для этих количеств стоит одинаковая цена). А набрать 25 дисков упаковками по 10 дисков невозможно. Значит, мы установили ещё один тип упаковки: она содержит 25 дисков и стоит 265 рублей. Содержать более 25 дисков такая упаковка не может, так как тогда 26 дисков стоили бы столько же.

Итак, мы установили 2 типа упаковок:
1) 111 рублей за 10 дисков (11,1 рублей за диск);
2) 265 рублей за 25 дисков (10,6 рублей за диск).

Поскольку по условию должно быть только 2 типа упаковок, получается, что мы определили все возможные варианты этих упаковок.

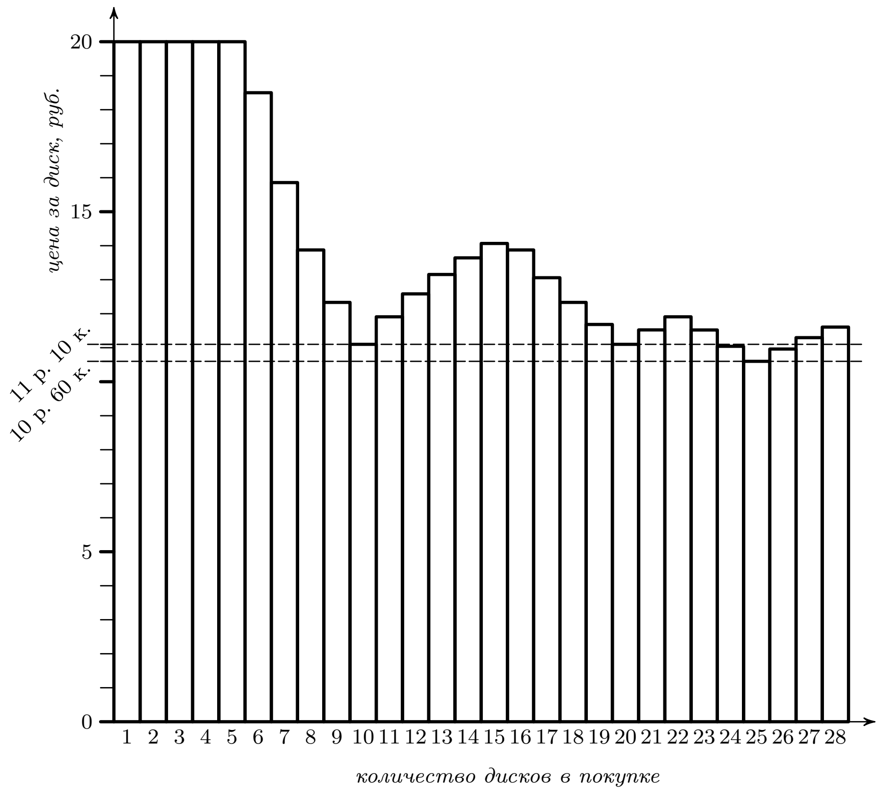
Выясним оптимальную цену покупки 29 дисков. Эту покупку можно разбить на 20 дисков (оптимальная цена по условию 222 рубля) и 9 дисков (оптимальная цена по условию 111 рублей), итого оптимальная цена не более 333 рублей. Эта цена может быть реализована покупкой трёх упаковок по 10 дисков.

Покупать одиночные диски нерационально. В самом деле, как только мы купим один одиночный диск (за 20 рублей), нам останется купить 28 дисков, оптимальная цена которых по условию составляет 325 рублей. Итого получится 345 рублей.

Покупать упаковку из 25 дисков также нерационально. Если мы её купим, нам останется докупить 4 диска. Из таблицы в условии понятно, что дешевле всего их покупать поштучно. Но, как мы только что выяснили, покупка 29 дисков с хотя бы одним одиночным диском является нерациональной.

Следовательно, первоначально рассмотренный вариант (3 упаковки по 10 дисков) действительно является самым рациональным.

Решение 3, которое скорее всего предложил бы покупатель–экономист. Построим график зависимости цены одного диска от количества покупаемых оптом дисков.



Мы видим на графике три «провала» — это и есть то, что нам нужно. Два первых «провала» (минимума) при этом соответствуют одной и той же цене диска 11,10 руб., то есть одному и тому же типу упаковки, а ещё один минимум — другому типу упаковки.

Этот «экономический» метод решения, разумеется, можно строго математически обосновать.

Ответ. В продаже имеются: 1) одиночные диски по цене 20 рублей; 2) упаковки по 10 дисков по цене 111 рублей за упаковку; 3) упаковки по 25 дисков по цене 265 рублей за упаковку.

Для покупки не менее 29 дисков необходимо 333 рубля.

5. (9–11) Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом — два отрицательных?

Ответ. Таких чисел не существуют.

Решение. Рассмотрим квадратный трехчлен ax^2+bx+c. Пусть x_1 и x_2 его корни. По теореме Виета

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Если оба корня положительны, то $\frac{b}{a}<0$ и $\frac{c}{a}>0$, то есть b и a — разных знаков, c и a — одного знака. Значит, если оба корня положительны, то средний коэффициент трёхчлена имеет другой знак, чем два крайних.

Если же оба корня отрицательны, то $\frac{b}{a}>0$ и $\frac{c}{a}>0$, то есть все три коэффициента a, b и c одного знака.

Поскольку из чисел одного знака в результате их перестановки нельзя получить числа разных знаков, ответ на вопрос задачи — отрицательный.

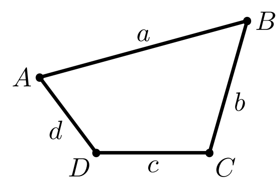
Замечание. Решение не зависит от того, допускается ли случай двух равных корней.

6. (10–11) Египтяне вычисляли площадь выпуклого четырёхугольника по формуле $(a+c)(b+d)/4$, где a, b, c, d — длины сторон в порядке обхода. Найдите все четырёхугольники, для которых эта формула верна.

Ответ. Формула верна для прямоугольников и только для них.

Решение. Раскроем скобки в «египетской» формуле. Получим

$$S=\frac{1}{4}(ac+ad+bc+bd).$$



С другой стороны, «разрезав» четырёхугольник на два треугольника по диагонали AC, и вычислив площади полученных треугольников, мы получим

$$S=\frac{1}{2}(ab\sin B+cd\sin D).$$

А разрезав по другой диагонали, получаем

$$S=\frac{1}{2}(ad\sin A+bc\sin C).$$

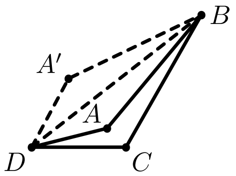
То есть

$$2S=\frac{1}{2}(ab\sin B+cd\sin D+ad\sin A+bc\sin C)$$
$$S=\frac{1}{4}(ab\sin B+cd\sin D+ad\sin A+bc\sin C)$$

Приравняв этот результат и «египетский», получаем

$$\frac{1}{4}(ac + ad + bc + bd) = \frac{1}{4}(ab \sin B + cd \sin D + ad \sin A + bc \sin C)$$

Так как синус всегда не больше единицы, то равенство достигается только тогда, когда синусы всех четырех углов равны 1. Поскольку углы выпуклого четырёхугольника находятся между 0° и 180°, получаем: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$, т. е. четырёхугольник является прямоугольником.



Заметим (это не входит в условие задачи), что и в том случае, когда четырёхугольник $ABCD$ — невыпуклый, его площадь будет меньше, чем площадь соответствующего выпуклого четырёхугольника ($A'BCD$, у которого «невыпуклая часть» развёрнута наружу), и поэтому $S(A'BCD) < S(ABCD) \leqslant \frac{1}{4}(ac + ad + bc + bd)$. Таким образом, пользуясь своей формулой в случае, когда четырехугольник не является прямоугольником, египтяне всегда завышали значение площади (и для выпуклых и для невыпуклых четырехугольников).

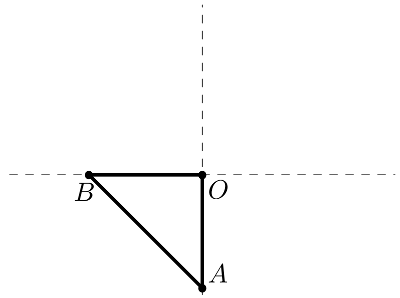
Комментарий. При решении этой задачи можно и не использовать понятие синуса. Действительно, рассмотрим треугольник, построенный на сторонах a и b. Пусть h — высота, опущенная на сторону a. Тогда $h \leqslant b$, и площадь треугольника равна $\frac{1}{2}ah \leqslant \frac{1}{2}ab$. Равенство выполнено в точности тогда, когда $b = h$, т. е. угол между сторонами a и b — прямой. Аналогичные соотношения верны для треугольников, построенных на других парах смежных сторон. Сложив их, получаем нужный результат.

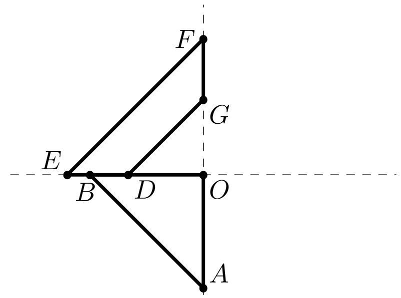
7. (10–11) Нарисуйте многоугольник и точку на его границе так, что любая прямая, проходящая через эту точку, делит площадь этого многоугольника пополам.

Решение. Пусть нужная нам точка на границе многоугольника — O. Построим сам многоугольник.

Разделим плоскость на 4 прямых угла с вершинами в точке O.

Построим равнобедренный прямоугольный треугольник AOB с вершиной в точке O и катетами, лежащими на сторонах одного из прямых углов.





Построим равнобокую трапецию $DEFG$ с боковыми сторонами $DE = FG$, лежащими на сторонах соседнего прямого угла, так, что $OD = OG$ и площадь трапеции равна площади треугольника AOB.

Из условия равенства площадей

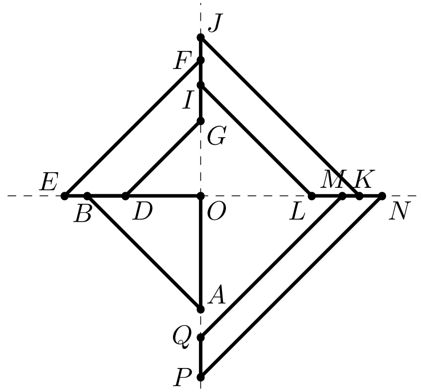
$$S(\Delta OAB) = S(DEFG) = S(\Delta OEF) - S(\Delta ODG)$$

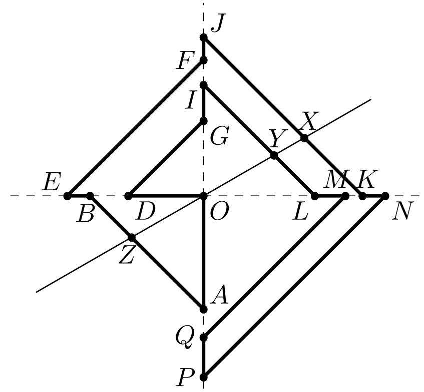
$$\frac{1}{2}OB^2 = \frac{1}{2}OE^2 - \frac{1}{2}OD^2$$

$$OE^2 = OB^2 + OD^2$$

При этом D нужно выбрать в пределах отрезка OB ближе к точке D.

Аналогичным образом построим трапеции $IJKL$ и $MNPQ$. Отрезки OA и QP при этом не должны пересекаться, что можно обеспечить соответствующим выбором расположений трапеций. На приведённом рисунке $OA = OB = 5$, $OE = OF = 6$, $OJ = OK = 7$ и $ON = OP = 8$, в том, что OA и QP не пересекаются, а остальные соседние боковые стороны треугольника и трапеций, наоборот, частично совпадают, можно убедиться с помощью непосредственных вычислений.





Полученный многоугольник $OABEFJKNPQMLIGD$ и точка O на его границе удовлетворяет условию задачи.

Покажем, что прямая XZ делит площадь нашего многоугольника на равные части. Площади трапеций $DEFG$ и $MNPQ$, расположенных по разные стороны прямой XZ, равны по построению.

Эта прямая также делит в одинаковом соотношении площади треугольника OAB и трапеции $IJKL$ (а поскольку площади этих фигур равны по построению, прямая делит каждую из них на части, площади которых соответственно равны площадям частей другой фигуры).

В самом деле, треугольники OAB и OJK подобны; кроме того, они равнобедренны, а прямая XZ проходит через вершину каждого из этих треугольников, образуя одинаковые углы с одной из боковых сторон, и, следовательно, делит их площади в одинаковом отношении. То же верно про треугольники OAB и OIL, поэтому прямая XZ делит их площади в том же отношении. Ну а площади частей трапеции $IJKL$ равны разностям площадей соответствующих частей треугольников OJK и OIL.

Итак, мы видим, что по разные стороны от прямой XZ оказались части многоугольника соответственно равных площадей, поэтому суммарные площади также равны — прямая действительно делит площадь многоугольника пополам.

В случае, если прямая пересекает трапеции $DEFG$ и $MNPQ$, доказательство строится аналогично. Случаи вертикального и горизонтального расположения секущей прямой являются тривиальными.

Как до такого решения можно догадаться? Фактически мы придумали два независимых решения, каждое — для своих двух вертикальных углов координатной плоскости. Причём одно из решений выбрали таким, чтобы нужная по условию задачи точка как раз была на его границе. А затем просто «подогнали края» — так, чтобы решения «цеплялись друг за друга» во всех местах, кроме одного.