XXXII Турнир им. М. В. Ломоносова 27 сентября 2009 года

Конкурс по математике. Решения и критерии проверки

(Предварительная версия от 24.10.2009)

Общие критерии. Оценки (в порядке убывания):
«+» (задача решена полностью),
«±» (задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения),
«∓» (задача не решена, но имеются содержательные продвижения),
«−» (задача не решена);
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставится «0».

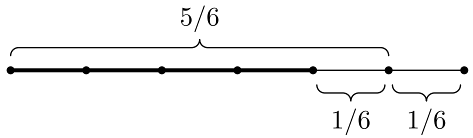
Так как по одному ответу невозможно определить, в какой степени участник решил задачу, за верный ответ без решения ставится не выше «∓» («−» если ответ типа «да–нет»); потеря случаев в переборе или рассмотрение только (содержательного) частного случая — не выше «∓».

В скобках после номера задачи указано, каким классам она предназначалась. Задачи, предназначавшиеся более младшим классам, проверяются, но не учитываются при подведении итогов.

1. (6–7) У Вани было некоторое количество печенья; он сколько-то съел, а потом к нему в гости пришла Таня и оставшееся печенье они разделили поровну. Оказалось, что Ваня съел в пять раз больше печений, чем Таня. Какую долю от всего печенья Ваня съел к моменту Таниного прихода? *(В. А. Клепцын)*

Ответ. 2/3.

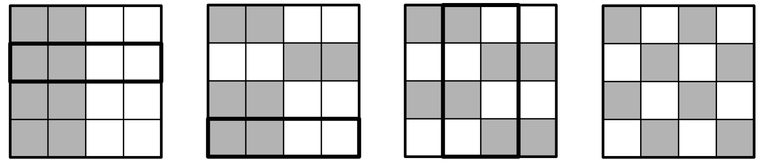
Решение. Пусть Таня съела x печений. Тогда Ваня съел $5x$ печений, из которых $5x - x = 4x$ печений он съел до прихода Тани. Так как всего печений было $5x + x = 6x$, до Таниного прихода Ваня съел $4x/6x = 2/3$ всего печенья.



Критерии. Рассмотрен только частный случай (например, «пусть всего было 30 печений») — «∓»; ответ не на тот вопрос — *не выше* «∓» (обычно «−»); только ответ — «∓».

2. (6–7) В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в чёрный цвет, а остальные — в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную? *(Т. В. Караваева)*

Решение. Одно из решений приведено ниже.



Критерии. Не указано, какие прямоугольники перекрашивались, но есть правильная последовательность раскрасок — «±».

3. (8–9) Петя и Вася играют на бирже. Некоторые дни удачные, и в такие дни капитал Пети увеличивается на 1000$, а капитал Васи — на 10%. А остальные дни неудачные — и тогда капитал Пети уменьшается на 2000$, а капитал Васи уменьшается на 20%. Через некоторое время капитал Пети оказался таким же, как был в начале. А что произошло с капиталом Васи: уменьшился он, увеличился или остался прежним? *(Б. Р. Френкин)*

Ответ. Капитал Васи уменьшился.

Решение. За один неудачный день капитал Пети уменьшается на столько же, на сколько он увеличивается за два удачных. Поскольку в итоге капитал Пети такой же, как вначале, удачных дней было в два раза больше, чем неудачных.

В удачный день капитал Васи умножается на 1,1, а в неудачный на 0,8. От перемены мест сомножителей произведение не меняется. Поэтому результат для Васи получается такой же, как если бы за каждыми двумя удачными днями шёл один неудачный. В этом случае за первые три дня капитал Васи умножится на $1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}968 < 1$, т. е. уменьшится. За следующие три дня он опять уменьшится, и т. д. Поэтому и в итоге капитал Васи уменьшится.

Критерии. Случай «два удачных, один неудачный» (без объяснения того, что удачных дней всегда в два раза больше, а все сводится к умножению, поэтому порядок, в котором идут дни, не важен) или соображения о том, что проценты отнимаются от большей суммы, а прибавляются к меньшей (без полного решения) — «∓»; только ответ — «−».

4. (8–11) Даны две картофелины произвольной формы и размера. Докажите, что по поверхности каждой из них можно проложить по проволочке так, что получатся два изогнутых колечка (не обязательно плоских), одинаковых по форме и размеру. *(Г. А. Гальперин)*

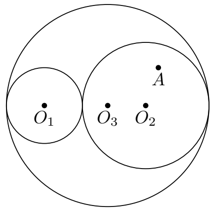
Решение. Посмотрим на поверхности картофелин как на абстрактные геометрические фигуры. Подвинем их так, чтобы они пересеклись. Возьмем маркер и нарисуем возникшую на пересечении замкнутую кривую на каждой из картофелин. Это и есть пути, по которым можно проложить проволочки.

Критерии. Разобран только случай круглых картофелин / объяснение того, как найти колечки, равные только по длине / «рассмотрим очень маленькие колечки» — «−».

5. (6–8) На левую чашу весов положили два шара радиусов 3 и 5, а на правую — один шар радиуса 8. Какая из чаш перевесит? (Все шары изготовлены целиком из одного и того же материала.)

Ответ. Правая.

Решение. Заметим, что два меньших шара, если их поставить рядом, поместятся внутрь большого. Значит, их суммарный объем меньше.



Комментарий. Хотя на картинке и видно, что два маленьких шара не вылезают за границы большого, докажем это. Пусть, например, точка A лежит внутри шара с радиусом 5. Проверим, что она попадает внутрь большого шара, т. е. что $AO_3 \leqslant 8$. Но действительно, по неравенству треугольника

$$AO_3 \leqslant AO_2 + O_2O_3 \leqslant R_1 + (R_3 - R_1) = R_3.$$

Имеется у задачи и алгебраическое решение, основанное на том, что $(R_1 + R_2)^3 > R_1^3 + R_2^3$ (см. тж. следующую задачу).

Критерии. Доказательства того, что два шара вкладываются в третий, не требуется, достаточно (внятной) картинки; правильное решение с неверным коэффициентом в формуле объема шара — «±», неверная степень R в формуле объема — «−»; только ответ — «−».

6. (9–11) На левую чашу весов положили две круглых монеты, а на правую — ещё одну, так что весы оказались в равновесии. А какая из чаш перевесит, если каждую из монет заменить шаром того же радиуса? (Все шары и монеты изготовлены целиком из одного и того же материала, все монеты имеют одинаковую толщину.) *(Г. А. Гальперин)*

Ответ. Правая.

Решение. Так как при растяжении в R раз площади меняются в R^2, а объемы в R^3 раз, площадь круга радиуса R равна V_2R^2, а площадь шара V_3R^3, где V_2 и V_3 — некоторые константы (площадь единичного круга и объем единичного шара, соответственно; на самом деле $V_2 = \pi$, а $V_3 = \frac{4}{3}\pi$, но для решения задачи это не важно).

Обозначим радиусы монет через R_1, R_2 и R_3. Вначале весы были в равновесии, поэтому $V_2R_1^2 + V_2R_2^2 = V_2R_3^2$, т. е.

$$R_1^2 + R_2^2 = R_3^2.$$

Аналогично, чтобы определить, что произошло с весами, после того как монеты заменили шарами, нужно сравнить $R_1^3 + R_2^3$ с R_3^3. Но по сравнению с равенством выше правая часть умножилась на больший радиус R_3, а два слагаемых в левой части — на меньшие радиусы R_1 и R_2:

$$R_1^3 + R_2^3 = R_1^2 \cdot R_1 + R_2^2 \cdot R_2 < R_1^2 \cdot R_3 + R_2^2 \cdot R_3 = (R_1^2 + R_2^2) \cdot R_3 = R_3^3.$$

Значит, правая чаша перевесит.

Критерии. Правильное решение с неверным коэффициентом в формуле объема шара — «±», неверная степень R в формуле объема — не выше «∓»; рассмотрен только случай одинаковых радиусов — «∓»; только ответ — «−».

7. (6–11) В ряд слева направо лежит 31 кошелёк, в каждом по 100 монет. Из одного кошелька часть монет переложили: по 1 монете в каждый из кошельков справа от него. За один вопрос можно узнать суммарное число монет в любом наборе кошельков. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно вычислить «облегчённый» кошелёк? *(А. В. Шаповалов)*

Ответ. За один.

Решение. Достаточно получить ответ на вопрос «сколько всего монет в кошельках с нечетными номерами?»

Действительно, если ответ на него «$1600 + n$» ($n > 0$), то монеты перекладывали из кошелька с четным номером, справа от которого было ровно n кошельков с нечетными номерами — т. е. из $(2n + 1)$-го справа кошелька. Если же ответ на него «$1600 - n$» ($n > 0$), то монеты перекладывали из кошелька с нечетным номером, справа от которого было ровно n кошельков с четными номерами — т. е. из $2n$-го справа кошелька.

Комментарий. Жюри имело в виду, что вопросы можно задавать только про конкретно указанные кошельки (например, «сколько монет в первом, втором и седьмом кошельках»). Но некоторые участники решили, что допустимы и вопросы вроде «сколько монет в кошельках правее облегченного?».

Бинарный (или тернарнный) поиск кошелька — «−»; только ответ — «−».

8. (10–11) Вася отвечает теорему Виета: «Сумма трёх коэффициентов квадратного трёхчлена равна одному из его корней, а произведение — другому». Экзаменатор: «Неверно». Вася: «Как же неверно? Я проверил для случайно выбранного трёхчлена, и всё получилось». Какой это мог быть трёхчлен, если его коэффициенты — целые числа? *(Б. Р. Френкин)*

Ответ. $-2x^2 + 4x$.

Решение. Пусть m — корень, равный сумме коэфициентов, n — корень, равный их произведению, a — старший коэффициент. Если коэффициенты целые, то их сумма и произведение m, n тоже целые.

Согласно настоящей теореме Виета, уравнение имеет вид

$$ax^2 - a(m+n)x + amn = 0.$$

Поэтому фактически Вася утверждает, что

$$m = a - a(m+n) + amn,$$
$$n = -a^3(m+n)mn.$$

Перепишем первое равенство в виде

$$m = a(1-m)(1-n).$$

Видим, что m делится на $1-m$. Прибавив $1-m$ к m, получаем, что 1 также делится на $1-m$, откуда m равно 0 или 2. Если $m=0$, то ввиду второго равенства $n=0$, а тогда из первого равенства $a=m=0$, что невозможно для старшего коэффициента трёхчлена.

Остаётся случай $m=2$. Если сократить во втором равенстве на n, то получим, что 1 делится на 2. Значит, сокращать на n нельзя, т. е. $n=0$. Тогда из первого равенства находим a, а затем по теореме Виета находим остальные коэффициенты. Полученный трёхчлен $-2x^2+4x$ удовлетворяет условию задачи.

Критерии. Ответ без верного обоснования — «$\mp$»; потеря одного из случаев в переборе — «$\mp$».