

6 класс

1. У первого из десяти друзей есть 5 тугриков, у второго — 10 тугриков, у третьего — 15 тугриков, и т. д., у десятого — 50 тугриков. Они сели на ковёр-самолёт, полёт на котором стоит 5 тугриков с носа. Смогут ли они честно расплатиться с ковром-самолётом, если тот не даёт сдачу и не разменивает деньги?

Ответ: Да. Последний отдаёт 50 тугриков, ему предпоследний даёт 45, и так далее вплоть до первого, который даёт второму 5 тугриков.

2. Поставьте 5 фишек на доску размером 8×8 , чтобы любой состоящий из девяти клеток квадрат содержал в точности одну фишку.

3. Решите ребус $\text{ТИК} + \text{ТАК} = \text{АКТ}$.

ОТВЕТ: $216 + 246 = 462$, $261 + 251 = 512$, $432 + 492 = 924$.

Заметим, что T четное ($K + K = T$ или $K + K = 1T$), $T > 0$ (первая цифра числа) и $T < 5$ ($T + T < 10$). Таким образом, $T = 2$ или $T = 4$. В первом случае $K = 1$ или 6 . Во втором случае $K = 2$ или 7 . Последний вариант приводит к противоречию.

4. Миша, Паша, Саша, Яша и Наташа провели турнир по настольному теннису, играя парами так, что каждые двое сыграли с каждым из двух других ровно один раз. В результате Саша проиграл 12 игр, а Яша — 6. Сколько игр выиграла Наташа? (Ничьих в теннисе не бывает.)

ОТВЕТ: 8 игр.

Поскольку Саша участвовал в 12 играх, то он все их проиграл. Яша выиграл 6 игр, которые он играл против пар, в которых участвовал Саша. Остальные 6 игр он проиграл. Значит, Наташа проиграла 3 игры, которые играла вместе с Сашей. Она выиграла 2 игры вместе с Яшей и одну проиграла. Наташа с Мишей выиграла 3 игры против всех остальных пар Аналогично, Наташа с Пашей выиграла 3 игры. Значит, всего Наташа выиграла 8 раз.

5. Шехерезада стала учительницей математики и задала школьникам на дом 1001 задачу. За каждую решённую задачу она начисляла 2 балла, за каждую неправильно решённую задачу штрафовала на один балл, а за каждую задачу, которую школьник не решал, штрафовала на пятьдесят баллов. Шахрияр правильно решил меньше 900 задач и набрал 1514 баллов. Сколько задач правильно решил Шахрияр?

ОТВЕТ. Он правильно решил 871 задачу, неправильно — 128. Шахрияр не решал 2 задачи.

Давайте заставим Шахрияра решить те задачи, которые он не решал, причем заставим решить правильно. Тогда он получит еще по 52 балла за каждую не решённую ранее задачу. Пусть в итоге он решил правильно n задач, а неправильно — $1001 - n$. Тогда он получил $2n - (1001 - n) = 3n - 1001$. Нам осталось решить уравнения $3n - 1001 = 1514$ (1), $3n - 1001 = 1514 + 52$ (2), $3n - 1001 = 1514 + 52 + 52$ (3), $3n - 1001 = 1514 + 52 + 52 + 52$ (4), $3n - 1001 = 1514 + 52 + 52 + 52 + 52$ (5), ... Заметим, что уравнения 1, 2, 4 не имеют решений в целых числах, а уравнение 5 (а значит, и все последующие) имеет решение, которое не удовлетворяет условию “Шахрияр решил правильно менее 900 задач”. Подходящее решение в целых числах имеет только третье уравнение, соответствующее случаю, когда Шахрияр не решал 2 задачи.

6. Сколько фишек может стоять на шахматной доске, если любой квадрат, состоящий из девяти клеток, содержит в точности одну фишку?

ОТВЕТ: От 4 до 9.

Квадрат можно разрезать на 4 квадрата 3×3 , 1 квадрат 2×2 и 4 прямоугольника 2×3 . Поэтому ясно, что фишек не меньше 4 (иначе один из четырех квадратов 3×3 останется без фишки) и не больше 9 (иначе в одной из 9 частей будет две фишки).

Теперь осталось построить 6 примеров.

7. Каждое из 50 изделий нужно сначала покрасить, а потом упаковать. Время окраски — 10 минут, паковки — 20 минут. После окраски деталь должна 5 минут сохнуть. Сколько необходимо нанять маляров и сколько упаковщиков, чтобы выполнить работу в кратчайшее время, если нельзя нанимать более 10 человек?

ОТВЕТ: 3 маляра и 6 монтажников. При этом работу можно выполнить за 195 минут (это легко показать). Если маляров меньше трёх, то времени на окраску тратится не меньше 250 минут; а если монтажников меньше шести, то на монтаж уйдёт не менее 200 минут. Нетрудно проверить, что если монтажников или маляров будет на одного больше, то выигрыша во времени мы не получим.