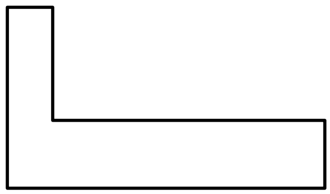
Первая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Третья Устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 3 апреля 2005 года

8 – 9 класс

1. В шестиугольнике пять углов по $\mathbf{90^\circ}$, а один угол — $\mathbf{270^\circ}$ (см. рисунок). С помощью линейки без делений разделите его на два равновеликих многоугольника.



2. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая, параллельная AB, пересекает биссектрисы углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что углы ADP и ABQ равны.

3. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $CN = BM$. Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$.

4. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB=BC$, $CD = DE$, $EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.

---

8 – 9 класс

5. В окружность вписан треугольник ABC. Постройте точку P такую, что точки пересечения прямых AP, BP и CP с данной окружностью являются вершинами равностороннего треугольника.

6. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности. C_2 — точка пересечения прямых C_1I и A_1B_1, C_3 — точка пересечения прямых CC_2 и AB. Докажите, что прямая IC_3 перпендикулярна прямой AB.

Первая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

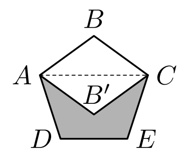
Третья Устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 3 апреля 2005 года

10 – 11 класс

1. Дан остроугольный треугольник ABC. Прямая, параллельная BC, пересекает стороны AB и AC в точках M и P соответственно. При каком расположении точек M и P радиус окружности, описанной около треугольника BMP, будет наименьшим?

2. На окружности с диаметром AB выбраны точки C и D. XY — диаметр, проходящий через середину K хорды CD. Точка M — проекция точки X на прямую AC, а точка N — проекция точки Y на прямую BD. Докажите, что точки M, N и K лежат на одной прямой.



3. $ABCDE$ — правильный пятиугольник. Точка B' симметрична точке B относительно прямой AC (см. рисунок). Можно ли пятиугольниками, равными $AB'CDE$, замостить плоскость?

4. В пирамиду, основанием которой служит параллелограмм, можно вписать сферу. Докажите, что суммы площадей ее противоположных боковых граней равны.

---

10 – 11 класс

5. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что $MA + MB + MC \leqslant \max(AB + BC, BC + AC, AC + AB)$.

6. На плоскости проведены шесть прямых. Известно, что для любых трех из них найдется четвертая из этого же набора прямых такая, что все четыре будут касаться некоторой окружности. Обязательно ли все шесть прямых касаются одной и той же окружности?