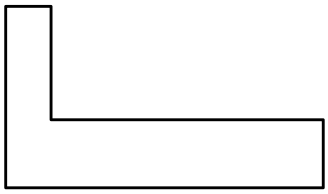
Решения

8 – 9 класс

1. (Фольклор) В шестиугольнике пять углов по $90°$, а один угол — $270°$ (см. рисунок). С помощью линейки без делений разделите его на два равновеликих многоугольника.



Первое решение. Достроим шестиугольник $ABCDEF$ до прямоугольника $ABMF$ (см. рис. 1а). Воспользуемся тем, что любая прямая, проходящая через центр симметрии фигуры, разбивает ее на две равные части. Поэтому, если провести прямую через точки пересечения диагоналей прямоугольников $ABMF$ и $CMED$, то она разделит каждый из прямоугольников на две равновеликие части. Следовательно, эта прямая разделит данный шестиугольник на два равновеликих многоугольника.

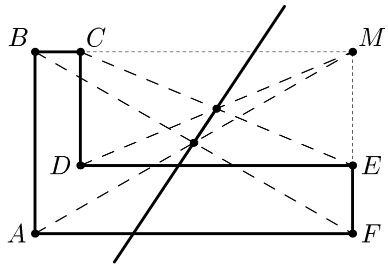


Рис. 1а

Комментарий. *Возможно еще такое «решение» (см. рис. 1б). Но для фигуры, данной в условии, при таком разбиении получаются 3 части.*

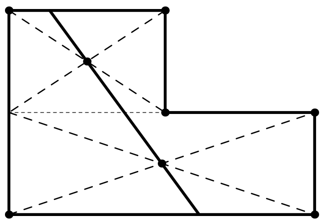


Рис. 1б

Поскольку в задаче не сказано, что разрез должен быть прямолинейным, то это «решение» несложно довести до правильного следующим образом.

Второе решение. Продолжим CD до пересечения с AF в точке G (см. рис. 1в), а ED — до пересечения с AB в точке H. Найдём центр O прямоугольника $DEFG$, проведя диагонали. Аналогично найдём центр O_1 прямоугольника $AGDH$. Прямая OO_1 пересекает DG в некоторой точке P. Остаётся найти центр O_2 прямоугольника $ABCG$ и провести прямую PO_2. По соображениям, изложенным в первом решении, отрезок XP делит прямоугольник $ABCG$ на две равные части, а следовательно, ломаная XPY разделит данный шестиугольник на две равновеликие части.

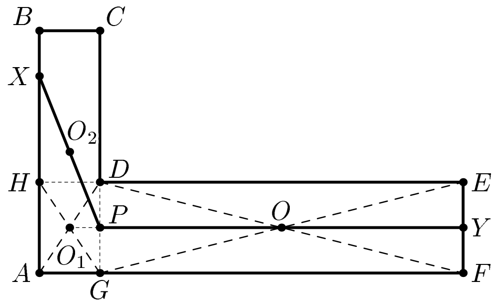


Рис. 1в

2. (А. Акопян) Дан параллелограм $ABCD$. Прямая, параллельная AB, пересекает биссектрисы углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что углы ADP и ABQ равны.

Первое решение. Рассмотрим для определенности конфигурацию, изображенную на рис. 2а. Так как CQ — биссектриса угла C, то $\angle YCQ = \angle DCQ = \angle YQC$. Следовательно, $YQ = YC = XD$. Аналогично $XP = XA = YB$. Кроме того $\angle BYQ = \angle DXQ$ в силу параллельности прямых BC и AD. Поэтому $\triangle BYQ = \triangle PXD$, откуда $\angle ADP = \angle BQY = \angle ABQ$.

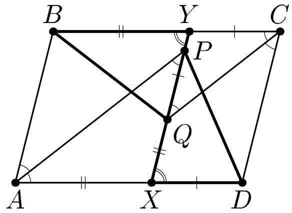


Рис. 2а

Другие случаи рассматриваются аналогично.

Второе решение. Пусть A_1 и C_1 — точки пересечения биссектрис углов A и C с прямыми CD и AB соответственно (см. рис. 2б). Тогда $\angle AA_1D = \angle A_1AD = \angle CC_1B = \angle C_1CB$, кроме того, $AD = BC$, поэтому равнобедренные треугольники ADA_1 и CBC_1 равны. Заметим, что $APQC_1$ — параллелограмм, поэтому $AP = C_1Q$. Тогда $\triangle APD = \triangle C_1QB$ по двум сторонам ($AD = C_1B$, $AP = C_1Q$) и углу между ними, откуда $\angle ADP = \angle ABQ$.

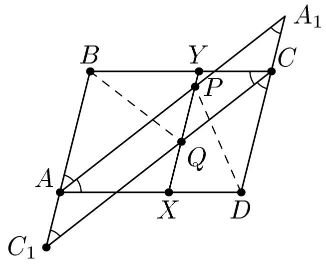


Рис. 2б

3. (И. Богданов) В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $CN = BM$. Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$.

Первое решение. Рассмотрим для определенности конфигурацию, изображенную на рис. 3а. Тогда

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}, \quad (1)$$
$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BK}, \quad (2)$$
$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BL}. \quad (3)$$

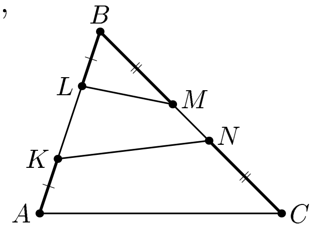


Рис. 3а

Поскольку $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NC}$, а $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{KA}$, то сложив равенства (2) и (3), получим, что $\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{LM} = (\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BM})-(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{BL}) = \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$, следовательно, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{KN}| \leqslant |\overrightarrow{LM}| + |\overrightarrow{KN}|$. Заметим, что при таком решении не существенно, как расположены точки K, L, M и N.

Второе решение. Пусть точка X такова, что $BNXL$ — параллелограмм (см. рис. 3б). Тогда NX параллельно и равно BL, а значит, и AK; аналогично LX параллельно и равно CM. Отсюда $CMLX$ и $AKNX$ — параллелограммы, поэтому $LM + KN = CX + AX \geqslant AC$.

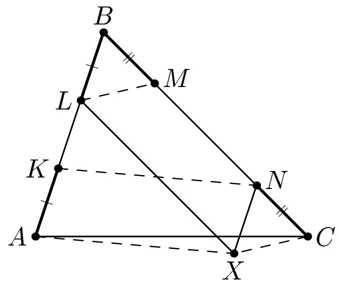


Рис. 3б

Третье решение. Рассмотрим для определенности конфигурацию, изображенную на рис. 3в. Спроектируем точки K, L, M и N на прямую AC. Проведем перпендикуляры KE и MF к прямым NN' и LL' соответственно.

Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $AK = BL = x$, $CN = BM = y$. Тогда $AK' = x\cos\alpha$, $CN' = y\cos\gamma$, $L'M' = MF = x\cos\alpha + y\cos\gamma = AK' + CN'$.

Тогда $KN \geqslant KE$, $LM \geqslant MF$, следовательно, $KN + LM \geqslant KE + MF = K'N' + L'M' = K'N' + AK' + CN' = AC$.

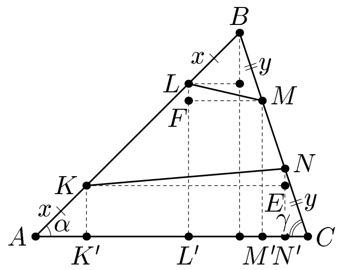


Рис. 3в

4. (Б. Кукушкин) Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB=BC$, $CD = DE$, $EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.

Первое решение.

Лемма.[1] *Диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных ребер равны.*

Необходимость условия вытекает из теоремы Пифагора. Достаточность можно доказать различными способами:

1) Пусть для сторон четырехугольника $KLMN$ выполняется равенство $KL^2 + MN^2 = LM^2 + NK^2$. Опустим перпендикуляры MX и KY на LN (см. рис. 4а). Тогда $MX^2 = LM^2 - LX^2 = MN^2 - XN^2$ и

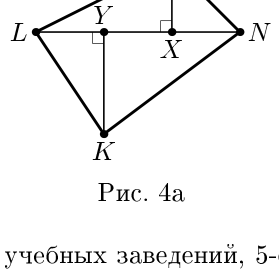


Рис. 4а

[1]В учебнике И. Ф. Шарыгин «Геометрия. 7-9 кл.» Учебник для общеобразовательных учебных заведений, 5-е изд., М.: Дрофа, 2001, стр. 219, приведено доказательство этого утверждения.

$KY^2 = KN^2 - NY^2 = KL^2 - LY^2$. Следовательно, $LY^2 - YN^2 = LK^2 - KN^2 = LM^2 - MN^2 = LX^2 - XN^2$, то есть $LN \cdot (LY - YN) = LN \cdot (LX - XN)$, следовательно, точки X и Y совпадают и $LN \perp KM$.

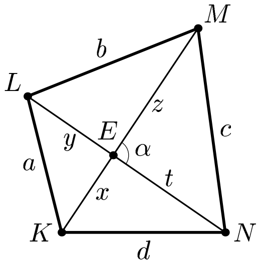


Рис. 4б

2) Пусть в четырехугольнике $KLMN$ со сторонами a, b, c и d диагонали пересекаются в точке E (см. рис. 4б). Предположим, что угол α — острый. Тогда из теоремы косинусов для треугольников KEL и MEN следует, что $a^2 < x^2 + y^2$ и $c^2 < z^2 + t^2$, то есть, $a^2 + c^2 < x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Аналогично, из теоремы косинусов для треугольников LEM и KEN следует, что $b^2 > z^2 + y^2$ и $d^2 > x^2 + t^2$, то есть, $b^2 + d^2 > x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Получили противоречие, так как по условию $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Следовательно, $LN \perp KM$.

Теперь для решения задачи достаточно применить доказанную лемму к четырехугольнику $BDEF$ (см. рис. 4в). Действительно, по теореме Пифагора для треугольников BCD и ABF

$$BD^2 + EF^2 = BC^2 + CD^2 + EF^2 = AB^2 + DE^2 + AF^2 = BF^2 + DE^2,$$

следовательно, FD и BE перпендикулярны.

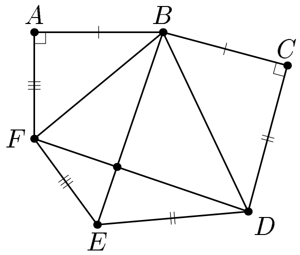


Рис. 4в

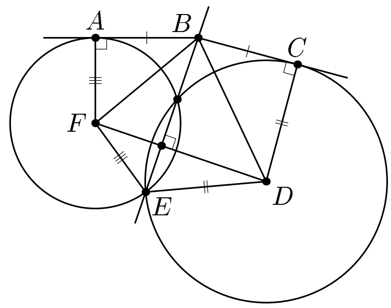


Рис. 4г

Второе решение.

Рассмотрим окружности с центрами D и F и радиусами DC и EF соответственно (см. рис. 4г). Тогда $BA = BC$ — касательные к этим окружностям, а точка E принадлежит обеим окружностям, поэтому BE — их радикальная ось, и следовательно, она перпендикулярна линии центров FD.

5. (А. Заславский) В окружность вписан треугольник ABC. Постройте точку P такую, что точки пересечения прямых AP, BP и CP с данной окружностью являются вершинами равностороннего треугольника.

Решение. Пусть искомая точка P построена и лежит внутри треугольника ABC (см. рис. 5а). Тогда $\angle CBB_1 = \angle CC_1B_1 = \beta$, $\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1 = \alpha$. Так как $\angle A_1C_1B_1 = 60°$, то $\alpha + \beta = 60°$. $\angle APB = 180° - (\angle BAP + \angle ABP) = 180° - (\angle A - \alpha + \angle B - \beta) = 180° + \alpha + \beta - (\angle A + \angle B) = 60° + \angle C$.

(Выкладки можно упростить, если использовать, что угол между хордами равен полусумме угловых величин двух противолежащих дуг, заключенных между концами хорд.)

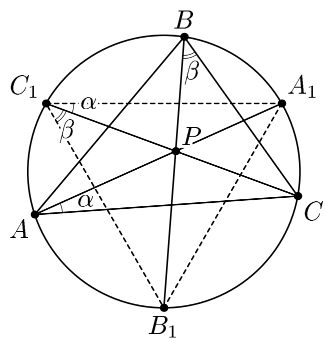


Рис. 5а

Таким образом, искомая точка P является пересечением геометрического места точек, из которых сторона AB видна под углом $60° + \angle C$, и геометрического места точек, из которых сторона BC видна под углом $60° + \angle A$ (см. рис. 5б).

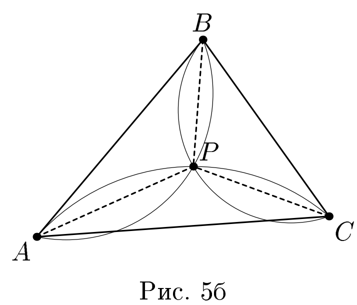


Рис. 5б

Заметим, что если мы указанным способом построим точку P, то $\angle APC = 360° - (60° + \angle A) - (60° + \angle C) = 60° + \angle B$, то есть, если P — внутри треугольника, то она единственная.

Если один из углов данного треугольника, например, $\angle A \geqslant 120°$, то искомая точка P лежит вне треугольника или на стороне BC. При этом способ построения точки P не изменится, но сторона BC будет видна из точки P под углом $300^\circ - \angle A$.

Комментарий. *Отметим также, что если зафиксировать, например, точки A и C и двигать дугу C_1A_1 по окружности, то сумма углов $\angle A_1AC$ и $\angle CC_1A$ — постоянна, то есть точка P также будет двигаться по окружности, проходящей через A и C. Следовательно, возможно и такое построение: выберем на окружности дугу A_1C_1 величиной 120°. Проведем AA_2 и CC_2, которые пересекутся в точку Q. Построим окружность, описанную около $\triangle AQC$. Аналогичное построение проделаем для стороны AB. На пересечении построенных окружностей лежит точка P.*

Второе решение. Из подобия треугольников APC и C_1PA_1 (см. рис. 5а) следует, что $\frac{AP}{AC} = \frac{C_1P}{C_1A_1}$. Аналогично, $\frac{BP}{BC} = \frac{C_1P}{C_1B_1}$. Следовательно, $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}$, то есть, точка P лежит на окружности Аполлония точек A и B.

Таким образом, построив еще одну окружность Аполлония, например, для точек A и C, на их пересечении получим искомую точку.

Комментарий. *Из второго решения следует, что верно следующее равенство: $AP \cdot BC = BP \cdot AC = CP \cdot AP$, то есть, расстояния от точки P до вершин треугольника обратно пропорциональны длинам противолежащих сторон.*

Точки, обладающие таким свойством, называются ***точками Аполлония*** *треугольника ABC. В любом треугольнике таких точек их две. Если все углы треугольника меньше 120°, то одна из точек лежит внутри треугольника, а другая вне. Если один из углов больше 120°, то обе точки лежат вне треугольника.*

Отметим следующие свойства точек Аполлония:

1. *Педальные треугольники точек Аполлония (то есть, треугольники, образованные их проекциями на стороны исходного треугольника) — правильные.*

Поэтому возможен другой вариант рассуждения, изложенного во втором решении — доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен педальному треугольнику точки P.

2. *При инверсии относительно описанной окружности точки Аполлония переходят друг в друга. Отсюда, в частности, следует, что соединяющая их прямая проходит через центр описанной окружности.*

3. *Так как $\angle PAB + \angle PCB = \angle A_1AB + \angle C_1CB = 60^\circ$, то точки P изогонально сопряжены точкам Торричелли треугольника ABC.*

6. (А. Заславский) Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности. C_2 — точка пересечения прямых C_1I и A_1B_1, C_3 — точка пересечения прямых CC_2 и AB. Докажите, что прямая IC_3 перпендикулярна прямой AB.

Первое решение. Утверждение задачи означает, что C_3 — точка касания стороны AB с окружностью, вписанной в ABC (см. рис. 6а). Так как треугольники ABC и A_1B_1C гомотетичны, то утверждение задачи равносильно тому, что C_2 — точка касания A_1B_1 и окружности, вписанной в треугольник A_1B_1C, то есть, $A_1C_2/B_1C_2 = BC_3/AC_3 = (p-b)/(p-a)$, где a, b, c — стороны треугольника ABC, а p — его полупериметр.

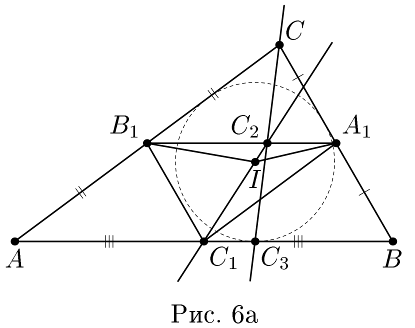


Рис. 6а

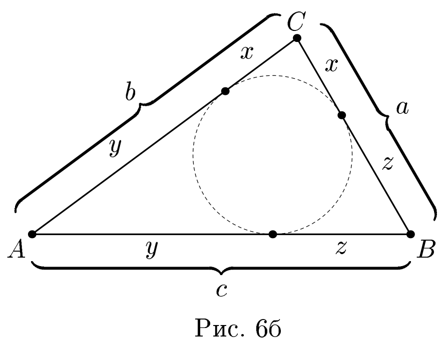


Рис. 6б

Последнее утверждение получено из того, что касательные, проведенные из одной точки, равны (см. рис. 6б), откуда следует, что $p = x + y + z$, а $z/y = (p-x-y)/(p-x-z) = (p-b)/(p-a)$.

Так как треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $1/2$, то высота B_1H в треугольнике $A_1B_1C_1$ (а следовательно и расстояние между прямыми A_1C_1 и AC) в два раза меньше высоты h_b треугольника ABC (см. рис. 6в). Следовательно, расстояние от точки I до прямой A_1C_1 равно $\frac{h_b}{2} - r$. Аналогично, расстояние от точки I до прямой B_1C_1 равно $\frac{h_a}{2} - r$.

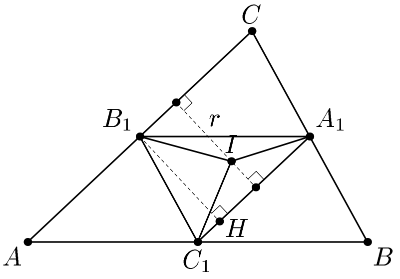


Рис. 6в

Следовательно,

$$\frac{A_1C_2}{B_1C_2} = \frac{S_{A_1IC_2}}{S_{B_1IC_2}} = \frac{S_{A_1IC_1}}{S_{B_1IC_1}} = \frac{A_1C_1(\frac{h_b}{2} - r)}{B_1C_1(\frac{h_a}{2} - r)} = \frac{b(\frac{h_b}{2} - r)}{a(\frac{h_a}{2} - r)} = \frac{b(\frac{S}{b} - \frac{S}{p})}{a(\frac{S}{a} - \frac{S}{p})} = \frac{p-b}{p-a}.$$

Комментарий. *Заметим, что C_2 — точка касания A_1B_1 с вневписанной окружностью треугольника $A_1B_1C_1$, касающейся стороны A_1B_1 и продолжений двух других сторон. Для произвольного треугольника существуют три вневписанных окружности, причем отрезки, соединяющие точки их касания с соответствующими сторонами и противоположные вершины, пересекаются в одной точке N, которая называется* **точкой Нагеля**. *Можно показать, что точка Нагеля, центр вписанной окружности I и центр тяжести M лежат на одной прямой, причем $MN = 2IM$ (см. рис. 6г). Утверждение задачи является следствием этого факта.*

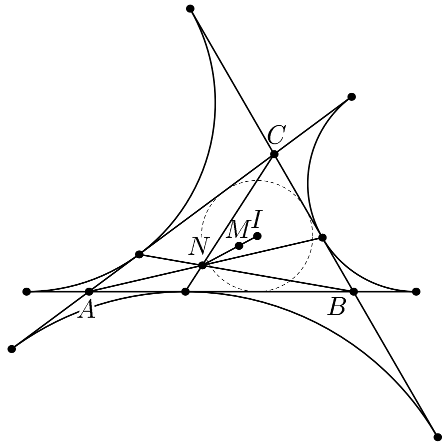


Рис. 6г

Второе решение. Пусть T и T' — точки касания вписанной ω и вневписанной ω' окружностей со стороной AB, K — точка вписанной окружности, диаметрально противоположная T (см. рис. 6д). При гомотетии с центром C, переводящей ω в ω', K переходит в T', поэтому C, K и T' лежат на одной прямой.

Докажем, что $AT' = BT$. Введем обозначения так, как показано на рис. 6е. Из равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности следует, что $k + x + y = k + t + z$, кроме того, $z + y = t + x$. Вычитая из одного равенства другое, получим, что $y = t$, значит $z = x$.

Из доказанного следует, что $C_1T = C_1T'$ и в треугольнике $KT'T$ отрезок C_1I является средней линией. Обозначив через M точку пересечения прямой C_1I с высотой треугольника ABC, опущенной из точки C, получим, что $CKIM$ — параллелограмм, поэтому $CM = KI = IT$. Тогда I и M равноудалены от средней линии A_1B_1, поэтому C_2 является серединой отрезка IM.

Следовательно, точки C и T симметричны относительно C_2, то есть, C, C_2 и T лежат на одной прямой, поэтому точка T совпадает с точкой C_3, что и требовалось.

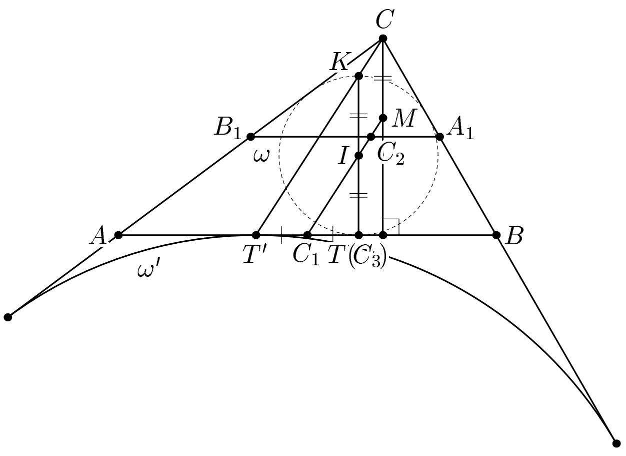


Рис. 6д

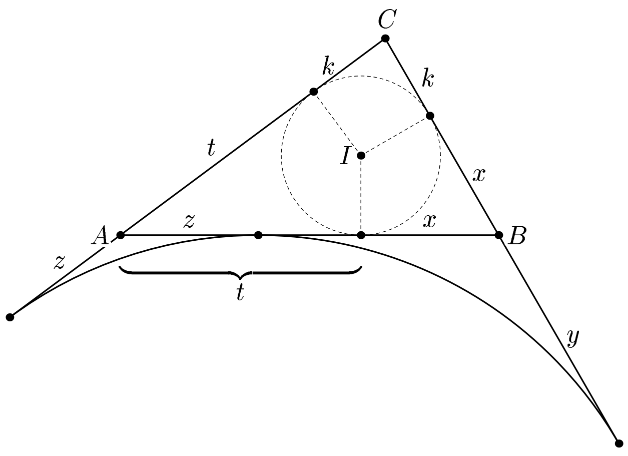


Рис. 6е

10 – 11 класс

1. (И. Шарыгин) Дан остроугольный треугольник ABC. Прямая, параллельная BC, пересекает стороны AB и AC в точках M и P соответственно. При каком расположении точек M и P радиус окружности, описанной около треугольника BMP, будет наименьшим?

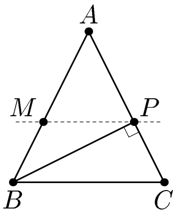


Рис. 1

Решение. При любом положении прямой MP $\angle BMP = 180^\circ - \angle B$. Используя следствие из теоремы синусов, найдем радиус окружности, описанной около $\triangle BMP$: $R = \dfrac{BP}{2\sin\angle B}$. Он принимает наименьшее значение одновременно с длиной отрезка BP, то есть, если $BP \perp AC$ (см. рис. 1).

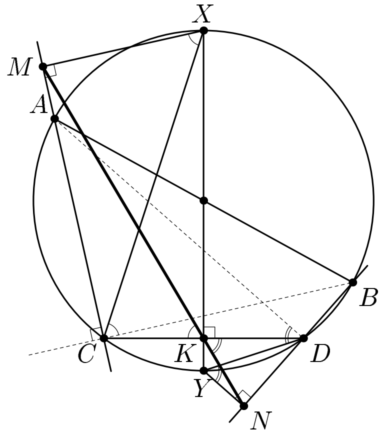
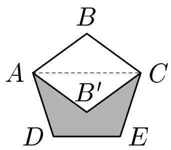


Рис. 2

2. (А. Заславский) На окружности с диаметром AB выбраны точки C и D. XY — диаметр, проходящий через середину K хорды CD. Точка M — проекция точки X на прямую AC, а точка N — проекция точки Y на прямую BD. Докажите, что точки M, N и K лежат на одной прямой.

Решение. Так как $\angle XKC = \angle XMC = 90^\circ$, то точки X, K, C и M лежат на одной окружности и $\angle MKC = \angle MXC$ (см. рис. 2). Так как $MX \perp AC$ и $BC \perp AC$, то $\angle MXC = \angle BCX$. Рассуждая аналогично, получим, что $\angle NKD = \angle ADY$. Из равенства дуг AY и BX (на них опираются равные центральные углы) следует, что $\angle ADY = \angle BCX$, откуда следует утверждение задачи.

3. (С. Маркелов) $ABCDE$ — правильный пятиугольник. Точка B' симметрична точке B относительно прямой AC (см. рисунок). Можно ли пятиугольниками, равными $AB'CDE$, замостить плоскость?



Решение. Да, можно. Например, одним из способов, показанных на рисунках 3а – в.

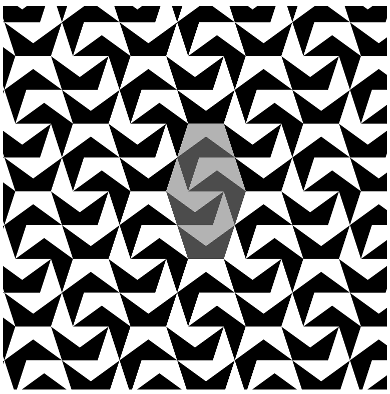


Рис. 3а

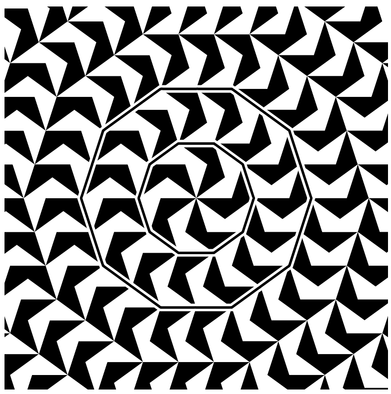


Рис. 3б

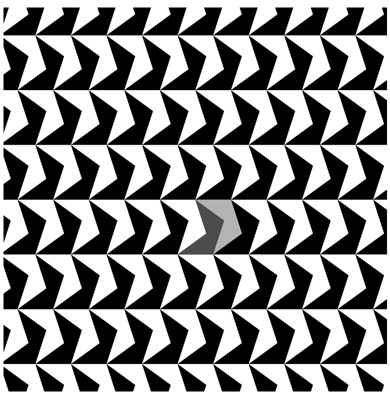


Рис. 3в

4. (М. Волчкевич) В пирамиду, основанием которой служит параллелограмм, можно вписать сферу. Докажите, что суммы площадей ее противоположных боковых граней равны.

Первое решение. Пусть $SABCD$ — данная пирамида (см. рис. 4а), K, L, M, N и P — точки касания вписанной сферы с гранями SAB, SBC, SCD, SAD и $ABCD$.

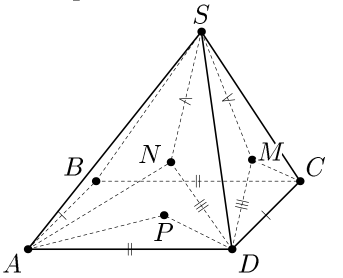


Рис. 4а

Тогда $\triangle SMD = \triangle SND$ (SD — общая, $SN = SM$ и $DN = DM$ как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки). Аналогично, $\triangle SNA = \triangle SKA$, $\triangle SKB = \triangle SLB$, $\triangle SLC = \triangle SMC$. Кроме того, $\triangle DMC = \triangle DPC$, $\triangle AND = \triangle APD$, $\triangle AKB = \triangle APB$ и $\triangle BLC = \triangle BPC$.

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то для любой внутренней точки P справедливо равенство: $S_{\triangle APD} + S_{\triangle BPC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle DPC}$, следовательно, $S_{\triangle AND} + S_{\triangle BLC} = S_{\triangle AKB} + S_{\triangle DMC}$.

Переходя от равенства треугольников к равенству их площадей, получим, что $S_{\triangle ASD} + S_{\triangle BSC} = S_{\triangle AND} + S_{\triangle BLC} + S_{\triangle SNA} + S_{\triangle SND} + S_{\triangle SLB} + S_{\triangle SLC} = S_{\triangle AKB} + S_{\triangle DMC} + S_{\triangle SKA} + S_{\triangle SKB} + S_{\triangle SMC} + S_{\triangle SMD} = S_{\triangle ASB} + S_{\triangle DSC}$, ч. т. д.

Комментарий. *Из равенства треугольников, примыкающих к боковым ребрам пирамиды, следует также, что* $\angle ASB + \angle CSD = \angle ASD + \angle BSC$.

Второе решение. Пусть $SABCD$ — данная пирамида (см. рис. 4а). Так как в четырехгранный угол $SABCD$ можно вписать сферу, $\angle ASB + \angle CSD = \angle ASD + \angle BSC$ (см. комментарий). Разрежем пирамиду по ребрам и склеим треугольники SAB и SCD по равным сторонам AB и CD, а треугольники SBC и SDA по равным сторонам BC и AD (см. рис. 4б, в).

В результате получим два четырехугольника со сторонами $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$ и $d = SD$, таких что сумма противоположных углов между сторонами a и b, c и d одного равна сумме углов между сторонами a и d, b и c другого. Равенство их площадей следует из следующей леммы.

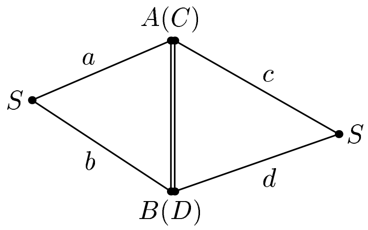


Рис. 4б

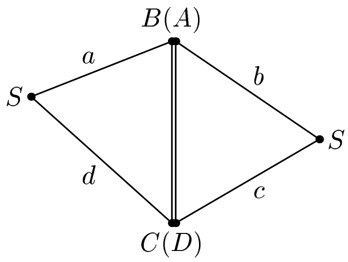


Рис. 4в

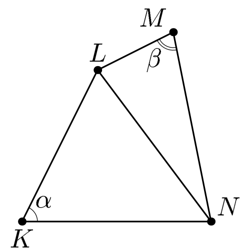


Рис. 4г

Лемма. *Площадь четырехугольника зависит только от длин его сторон (см. рис.* 4г*) и косинуса суммы любой пары противоположных углов.*

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $KLMN$ стороны KL, LM, MN и NL равны x, y, z и t соответственно, а углы K и M — α и β. Выразим удвоенную площадь четырехугольника $KLMN$: $2S = xt\sin\alpha + yz\sin\beta$. Применим теорему косинусов к треугольникам KLN и MLN: $\dfrac{x^2+t^2-y^2-z^2}{2} = xt\cos\alpha - yz\cos\beta$.

Возведем полученные равенства в квадрат и сложим их:

$$4S^2 = x^2t^2\sin^2\alpha + 2xyzt\sin^2\alpha\sin\beta + y^2z^2\sin^2\beta,$$

$$\left(\frac{x^2+t^2-y^2-z^2}{2}\right)^2 = x^2t^2\cos^2\alpha - 2xyzt\cos\alpha\cos\beta + y^2z^2\cos^2\beta,$$

$$4S^2 + \left(\frac{x^2+t^2-y^2-z^2}{2}\right)^2 = x^2t^2 + y^2z^2 - 2xyzt\cos(\alpha+\beta).$$

Получили требуемое выражение для площади, ч. т. д.

5. (Н. Седракян) Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что $MA + MB + MC \leqslant \max(AB + BC, BC + AC, AC + AB)$.

Первое решение. Пусть в треугольнике ABC, для определенности, $AB \geqslant BC \geqslant AC$. Тогда проведем через точку M прямую, паралелльную AC. Предположим, что она пересечет AB и BC в точках A_1 и C_1. Так как $\triangle A_1BC_1$ подобен $\triangle ABC$, то сохраняется соотношение между длинами сторон, следовательно, $A_1B \geqslant BC_1 \geqslant A_1C_1$ и $A_1B \geqslant BM$ (так как чевиана треугольника не длиннее большей из двух сторон, между которыми она проведена).

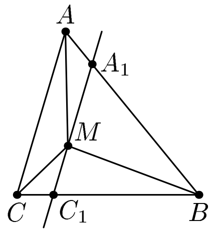


Рис. 5а

Используем неравенство треугольника для $\triangle AA_1M$ и $\triangle CC_1M$: $AA_1 + A_1M \geqslant AM$ и $CC_1 + MC_1 \geqslant CM$. Складывая соответствующие неравенства, получаем, что $AA_1 + A_1M + CC_1 + MC_1 + A_1B \geqslant AM + CM + BM$, или $A_1C_1 + CC_1 + AB \geqslant AM + CM + BM$, но $BC \geqslant A_1C_1 + CC_1$ (так как $BC_1 \geqslant A_1C_1$).

Следовательно, $MA + MB + MC \leqslant AB + BC$, ч. т. д.

Второе решение.

Лемма. Если в треугольнике XYZ $\angle Y > 90°$, то $XY + YZ < XZ + h_y$, где h_y — высота треугольника, проведенная к стороне XZ (см. рис. 5б).

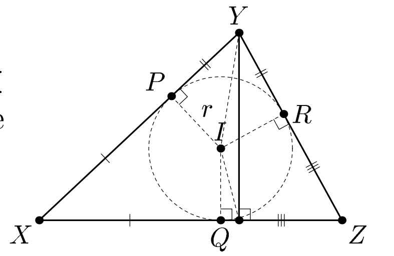


Рис. 5б

Доказательство. Пусть P, Q, R — точки касания вписанной окружности с XY, XZ, YZ соответственно, I — ее центр. Тогда в прямоугольном треугольнике IYP $\angle IYP = \frac{1}{2}\angle XYZ > 45°$, поэтому $PY < r < \frac{1}{2}h_y$, где r — радиус вписанной окружности.

Таким образом, $XY + YZ - XZ = (XP + PY) + (YR + RZ) - (XQ + QZ) = PY + RY = 2PY < h_y$. Лемма доказана.

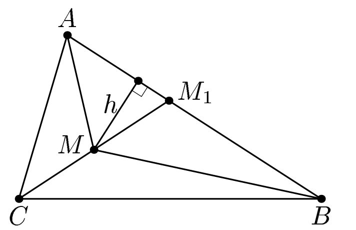


Рис. 5в

Один из трех углов $\angle AMB$, $\angle AMC$, $\angle BMC$ — тупой. Пусть, скажем, это $\angle AMB$. Обозначим через M_1 точку пересечения CM и AB. Тогда, обозначив расстояние от M до AB через h, имеем $(MA + MB) + MC < (AB + h) + MC \leqslant (AB + MM_1) + MC = AB + CM_1 \leqslant AB + \max(CA, CB)$, что и требовалось.

6. (И. Богданов) На плоскости проведены шесть прямых. Известно, что для любых трех из них найдется четвертая из этого же набора прямых, такая, что все четыре будут касаться некоторой окружности. Обязательно ли все шесть прямых касаются одной и той же окружности?

Решение. Нет, не обязательно. Приведем пример. Пусть $ABB'A'$ — квадрат, O — точка пересечения его диагоналей, ω и ω' — вписанные окружности треугольников OAB и $OA'B'$, ℓ_1 и ℓ_2 — общие внешние касательные ω и ω' (см. рис. 6).Тогда требуемая шестерка прямых — это ℓ_1, ℓ_2, $\ell_3 = AB$, $\ell_4 = A'B'$, $\ell_5 = AB'$, $\ell_6 = BA'$.

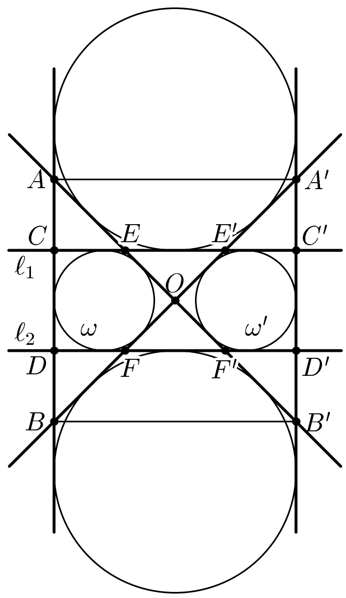


Рис. 6

Докажем это. Достаточно показать, что прямые AB, AB', $A'B$, $A'B'$, ℓ_1 касаются одной окружности. Действительно, тогда каждая из пятерок прямых с номерами $(1, 2, 3, 5, 6)$, $(1, 2, 4, 5, 6)$, $(1, 3, 4, 5, 6)$, $(2, 3, 4, 5, 6)$ (из симметрии) касается одной окружности. Заметим, что любая тройка прямых принадлежит одной из этих пятерок — иначе бы в этой тройке были прямые с номерами 4 (из-за первой пятерки), 3 (из-за второй), 2 (из-за третьей) и 1 (из-за четвертой), что невозможно.

Пусть ℓ_1 пересекает AB, AB', $A'B$, $A'B'$ в точках C, E, E', C' соответственно. Треугольники AOB и BCE' — равнобедренные прямоугольные с общей вписанной окружностью, следовательно, они равны. Тогда $EC = EO$, и поэтому $\triangle ACE = \triangle EOE'$, то есть $AE = EE'$. Аналогично, $EE' = E'A'$. Также $\angle AEE' = \angle EE'A' = 135°$, то есть точки A, E, E' и A' — вершины правильного восьмиугольника, а в него можно вписать окружность, что и требовалось.

Материалы подготовили: А. Акопян, А. Блинков, Ю. Блинков, И. Богданов, Д. Вельтищев, М. Вельтищев, М. Волчкевич, А. Горская, В. Гуровиц, А. Заславский, П. Кожевников, С. Маркелов, Н. Нетрусова, Д. Терешин, Б. Френкин, А. Хачатурян.