Вторая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Четвертая Устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 2 апреля 2006 года

Решения задач

8 – 9 класс

1. (*А. Заславский*) Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK, параллельна CD.

Решение. Угол между проведенной касательной MK и хордой BK равен углу BAK, так как угол BAK вписанный и опирается на ту же дугу (см. рис. 1). Кроме того, $\angle CDB = \angle BAK$, так как эти вписанные углы опираются на одну и ту же дугу BC. Таким образом, $\angle MKB = \angle CDB$, следовательно, $MK \parallel CD$.

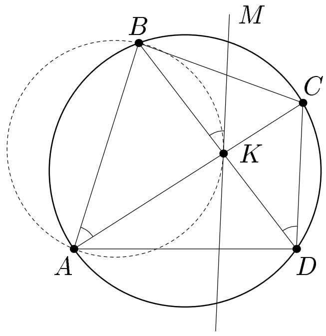


Рис. 1

2. (*М. Евдокимов*) Определите отношение сторон прямоугольника, описанного около уголка из пяти клеток (см. рисунок).

Ответ: 1 : 2.

Решение. *Первый способ.* Рассмотрим данный уголок $ABCDEF$ и описанный вокруг него прямоугольник $KLMN$ (см. рис. 2а). Проведем перпендикуляры XP, YQ, CR и ZT. Прямоугольные треугольники ALB, BPX, CRD, DME, NTZ и ETZ равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $BP = DM = NT = TE$ и $BL = RD = EM$. Также, по теореме Фалеса, $BP = PQ = QR$. Следовательно, $NM = 2DM + ME$, а $ML = 4DM + 2ME$, откуда $NM : ML = 1 : 2$.

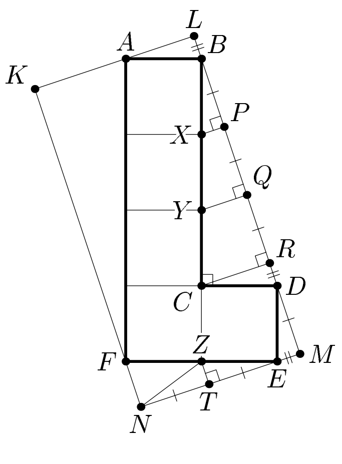


Рис. 2а

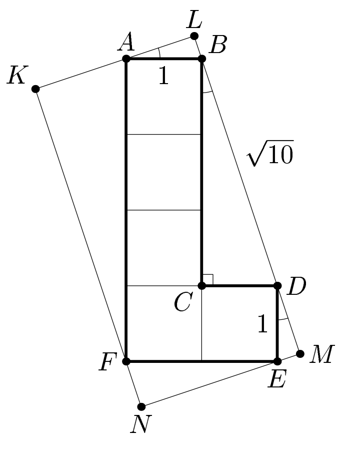


Рис. 2б

Второй способ. Рассмотрим данный уголок $ABCDEF$ и описанный вокруг него прямоугольник $KLMN$ (см. рис. 2б). Пусть сторона клетки равна 1, тогда из прямоугольного треугольника BCD сторона $BD = \sqrt{10}$. Прямоугольные треугольники BCD и DME подобны, следовательно, $\frac{\sqrt{10}}{1} = \frac{3}{DM} = \frac{1}{ME}$, откуда $DM = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ и $ME = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Также подобны и прямоугольные треугольники AKF и BCD, следовательно, $\frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{AK}{1}$, то есть, $AK = \frac{4\sqrt{10}}{10}$. Прямоугольные треугольники ALB и DME равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $AL = DM = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ и $LB = ME = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Таким образом, можем найти стороны прямоугольника: $KL = AK + AL = \frac{4\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$ и $LM = LB + BD + DM = \frac{\sqrt{10}}{10} + \sqrt{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{14\sqrt{10}}{10}$, откуда $KL : LM = 1 : 2$.

3. (*М. Волчкевич*) На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки C', A' и B' соответственно так, что угол $A'C'B'$ — прямой. Докажите, что отрезок $A'B'$ длиннее диаметра вписанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть M — середина $A'B'$. Тогда $MA' = MB' = MC'$. Отметим также, что M лежит внутри треугольника ABC. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, r — её радиус. Докажем, что в любом треугольнике ABC треугольник KLN, образованный точками касания вписанной окружности со сторонами — остроугольный. Пусть это не так, и, например, $\angle KNL \geq 90^\circ$ (см. рис. 3а). Тогда $\angle BKL = \angle KNL = \angle BLK$, то есть, в треугольнике BKL два неострых угла, что невозможно.

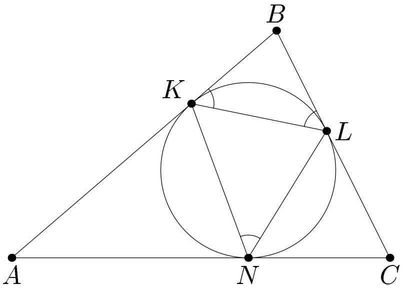


Рис. 3а

Предположим, что точки M и O совпадают. Тогда из доказанного следует, что A', B' и C' не являются точками касания вписанной окружности со сторонами. Поэтому, $MA' > r$ и утверждение задачи доказано.

Рассуждения для случая не совпадающих точек O и M, можно проводить по-разному.

Первый способ. Рассмотрим окружность с центром M и радиусом MA', которая имеет общие точки со сторонами треугольника ABC, следовательно, пересекает хотя бы одну из них. Проведем касательные к этой окружности, соответственно параллельные сторонам треугольника и лежащие вне его (см. рис. 3б). Точки попарного пересечения этих касательных образуют треугольник, подобный данному с коэффициентом, большим 1. Построенная окружность вписана в него, следовательно, ее радиус $MA' > r$, что и требовалось доказать.

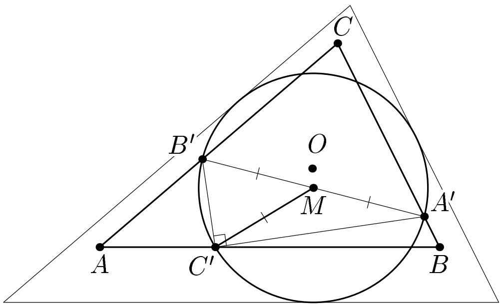


Рис. 3б

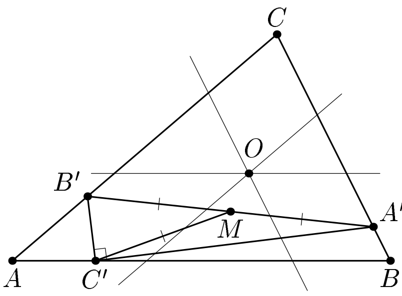


Рис. 3в

Второй способ. Проведём через O прямые, параллельные сторонам треугольника ABC. Они разделят его на три параллелограмма и три треугольника (см. рис. 3в). При любом положении точки M найдётся сторона треугольника ABC, которая лежит в разных полуплоскостях с точкой M относительно прямой, параллельной этой стороне (для точек любого параллограмма это сторона треугольника, не параллельная его сторонам, для внутренних точек любого из маленьких треугольников — любая сторона, не содержащая его сторону). Пусть, например, BC — такая сторона, тогда MA' больше, чем расстояние между этой стороной и параллельной ей прямой, то есть, больше, чем r.

4. (*М. Волчкевич*) Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, проходящую через вершину B и делящую его на два треугольника, радиусы вписанных окружностей которых равны.

Решение. Пусть BD — искомая прямая, O_1, O_2, I — центры окружностей, вписанных в треугольники ABD, BCD и ABC (см. рис. 4). Тогда O_1 лежит на отрезке AI, O_2 — на отрезке CI, $O_1O_2 \parallel AC$ и $\angle O_1BO_2 = \dfrac{\angle B}{2}$. Отсюда вытекает следующее построение.

Построим дугу, из точек которой отрезок AC виден под углом $\dfrac{\angle B}{2}$, и найдем точку P ее пересечения с лучом IB. Прямые, проходящие через B и параллельные PA и PC, пересекают IA и IC, соответственно, в точках O_1, O_2. Действительно, треугольники PAC и BO_1O_2 гомотетичны с центром I, следовательно $\angle O_1BO_2 = \dfrac{\angle B}{2}$. Искомая прямая симметрична BA относительно BO_1.

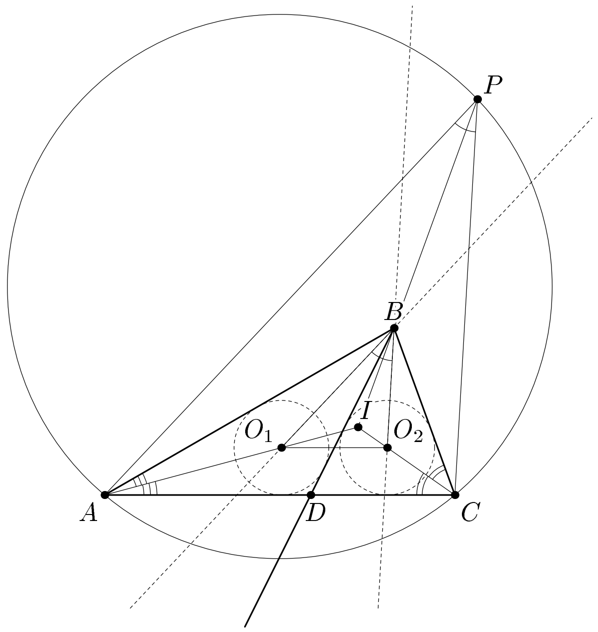


Рис. 4

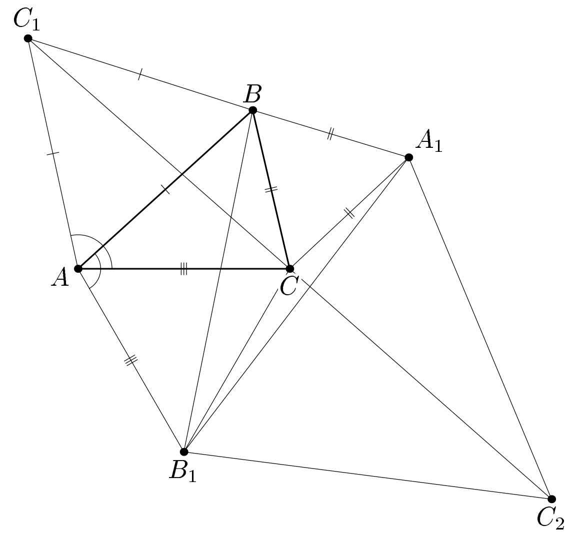


Рис. 5

5. (*А. Заславский*) На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. На отрезке A_1B_1 во внешнюю сторону треугольника $A_1B_1C_1$ построен правильный треугольник $A_1B_1C_2$. Докажите, что C — середина отрезка C_1C_2.

Решение. *Первый способ.* Поскольку $AB = AC_1$, $AB_1 = AC$ и $\angle BAB_1 = 60^\circ + \angle BAC = \angle C_1AC$, то $\triangle ABB_1 = \triangle AC_1C$ (см. рис. 5). Аналогично доказывается равенство треугольников A_1BB_1 и CA_1C_2. Следовательно $CC_1 = BB_1 = CC_2$. Осталось доказать, что точки C, C_1 и C_2 лежат на одной прямой.

Покажем, что $\angle C_1CB + \angle BCA_1 + \angle A_1CC_2 = 180^\circ$. Заметим, что $\angle BCA_1 = 60^\circ$, кроме того: $\angle A_1CC_2 = \angle A_1BB_1 = 60^\circ + \angle CBB_1 = 60^\circ + \angle CBA - \angle ABB_1 = \angle C_1BC - \angle ABB_1 = \angle C_1BC - \angle AC_1C$. Поэтому, $\angle C_1CB + \angle BCA_1 + \angle A_1CC_2 = \angle C_1CB + 60^\circ - \angle AC_1C + \angle C_1BC = \angle C_1CB + \angle CC_1B + \angle C_1BC = 180^\circ$.

Второй способ. Рассмотрим композицию поворотов: первый — с центром A, переводит C_1 в B, второй — с центром A_1, переводит B в C. Эта композиция переводит C_1 в C, а C в C_2. Поскольку углы поворотов противоположны, то их композиция является параллельным переносом, то есть, $\overline{C_1C} = \overline{CC_2}$. Это и означает, что C — середина отрезка C_1C_2.

6. (*А. Заславский*) В остроугольном треугольнике один из углов равен 60°. Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан треугольника, отсекает от него равносторонний треугольник.

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около данного треугольника ABC, M — точка пересечения медиан этого треугольника (см. рис. 6). Тогда OM — прямая Эйлера для треугольника ABC, поэтому она проходит через его ортоцентр H и $MH = 2MO$. Так как треугольник ABC — остроугольный, то точки O и H лежат внутри него. Проведем OL перпендикулярно AB. Тогда $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle AOL$, откуда $OL = R\cos\angle ACB$, следовательно, $CH = 2OL = 2R\cos\angle ACB$.

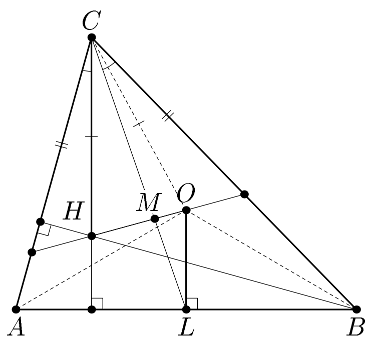


Рис. 6

Пусть теперь в рассматриваемом треугольнике ABC $AC < BC$ и $\angle ACB = 60^\circ$, тогда $CH = R = CO$. Кроме того, $\angle ACH = \angle OCB$, следовательно, биссектриса угла OCH совпадает с биссектрисой угла ACB. Таким образом, эта биссектриса перпендикулярна OH, поэтому прямая OH отсекает на лучах CB и CA

равные отрезки. При этом $\angle HCA = 90^\circ - \angle CAB < \angle OCA = 90^\circ - \angle ACB$ и $\angle HAC < \angle OAC$, т. е. H лежит внутри треугольника OAC. Аналогично доказывается, что точка O лежит внутри треугольника HBC. Таким образом, прямая OH пересекая стороны AC и BC, отсекает от данного треугольника равнобедренный треугольник с углом 60°, являющийся равносторонним.

1. (*А. Блинков*) Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, разбивающую его на два многоугольника, у которых равны радиусы описанных окружностей.

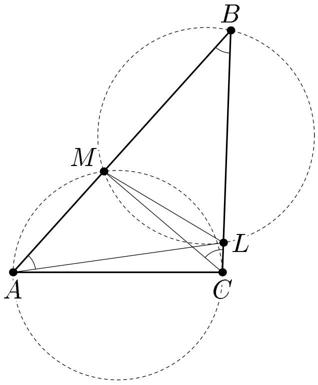


Рис. 1а

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, $\angle ABC$ — его наименьший угол (см. рис 1а). Проведем лучи AK и CM так, чтобы $\angle BAK = \angle BCM = \angle ABC = \alpha$. При этом, точки M и K лежат на сторонах треугольника. Прямая MK — искомая. Действительно, четырехугольник $AMKC$ — вписанный, так как $\angle MAK = \angle MCK$. Радиус описанной около него окружности равен $\dfrac{MK}{2\sin\alpha}$. Таким же будет и радиус окружности, описанной вокруг треугольника MBK.

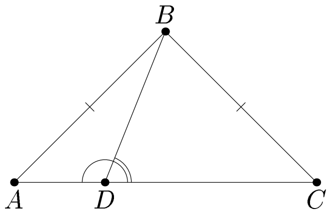


Рис. 1б

Если треугольник неравнобедренный, то решение — единственное. Если треугольник равнобедренный, то решений бесконечно много.

Действительно, пусть в треугольнике ABC $AB = BC$ (см. рис. 1б). Проведем прямую BD, где D — произвольная внутренняя точка отрезка AC. Так как $\sin\angle BDA = \sin\angle BDC$, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD И BCD, равны.

2. (*С. Маркелов*) Шесть отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?

Ответ: нет, неверно.

Решение. Рассмотрим пять отрезков длины 1 и один отрезок длины $\sqrt{3}$, удовлетворяющие условию. Пусть из них можно составить тетраэдр. Тогда две его грани ABC и BDC — равносторонние треугольники (см. рис. 2). В таком тетраэдре длина ребра AD не превосходит $\sqrt{3}$, причем равенство достигается только если точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

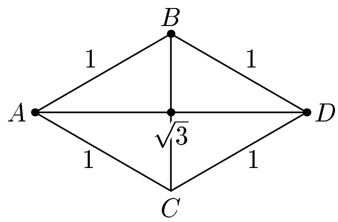
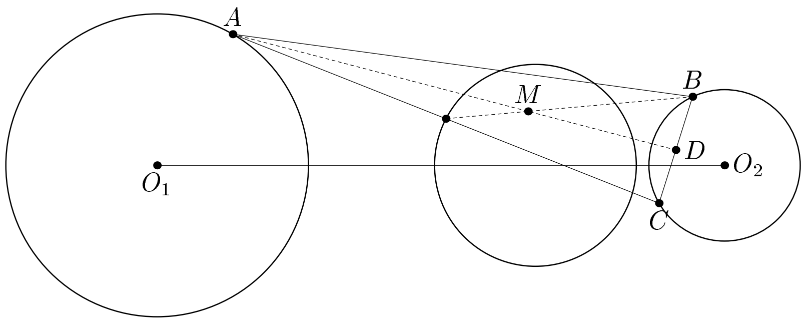


Рис. 2

3. (*Б. Френкин*) На плоскости даны две непересекающиеся окружности C_1 и C_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами $2R$ и R соответственно. Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, у которых одна вершина лежит на C_1, а две другие — на C_2.

Ответ. Внутренность круга радиуса $\dfrac{4}{3}R$ с выколотым центром, делящим отрезок O_1O_2 в отношении $2:1$.



Первый способ. Пусть вершина A треугольника ABC лежит на первой окружности, вершины B и C — на второй, D — середина отрезка BC, M — центр тяжести треугольника ABC. Когда B и C независимо пробегают вторую окружность, то D пробегает внутренность её круга. Если при этом вершина A фиксирована, то M пробегает внутренность круга, радиус которого равен $\dfrac{2}{3}R$, а центр O делит отрезок AO_2 в отношении $2:1$. Если теперь A пробегает первую окружность, то O пробегает окружность, радиус которой равен $\dfrac{2}{3}R$, а центр O_0 делит отрезок O_1O_2 в отношении $2:1$. Тогда открытые круги, составленные из различных положений точки M, заполняют внутренность круга радиуса $\frac{4}{3}R$ с выколотым центром O_0.

Второй способ. Пусть точка C лежит на окружности с центром O_2, A, B — на окружности с центром O_1, M — центр тяжести ABC, M_0 — точка, делящая отрезок O_2O_1 в отношении $2:1$. Тогда

$$\overline{M_0M} = \frac{1}{3}(\overline{M_0A} + \overline{M_0B} + \overline{M_0C}) = \frac{1}{3}(2\overline{M_0O_1} + \overline{O_1A} + \overline{O_1B} + \overline{M_0O_2} + \overline{O_2C}) = \frac{1}{3}(\overline{O_1A} + \overline{O_1B} + \overline{O_2C}).$$

Так как точки A и B различны, $|\overline{O_1A} + \overline{O_1B}| < 2R$. Так как длина вектора O_2C всегда равна $2R$, сумма трех векторов отлична от нуля. С другой стороны, длина этой суммы всегда меньше $4R$. Очевидно, что любое значение длины между 0 и $4R$, а также любое направление этого вектора получить можно. Следовательно искомым ГМТ будет внутренность круга с центром M_0 и радиусом $\frac{4}{3}R$, за исключением самой точки M_0.

4. (*А. Заславский*) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Касательные к окружности в точках A и C и прямая, симметричная BD относительно точки O, пересекаются в одной точке. Докажите, что произведения расстояний от O до противоположных сторон четырехугольника равны.

Решение. Пусть B' и D' — точки, симметричные B и D относительно центра окружности. По условию, прямая $B'D'$ проходит через точку P пересечения данных касательных (см. рисунок). Из подобия треугольников $PD'C$ и PCB' следует, что $\frac{PC}{PB'} = \frac{CD'}{CB'}$, а из подобия треугольников $PD'A$ и PAB' следует, что $\frac{PA}{PB'} = \frac{AD'}{AB'}$. Поскольку $PA = PC$, то $CD' \cdot AB' = AD' \cdot CB'$.

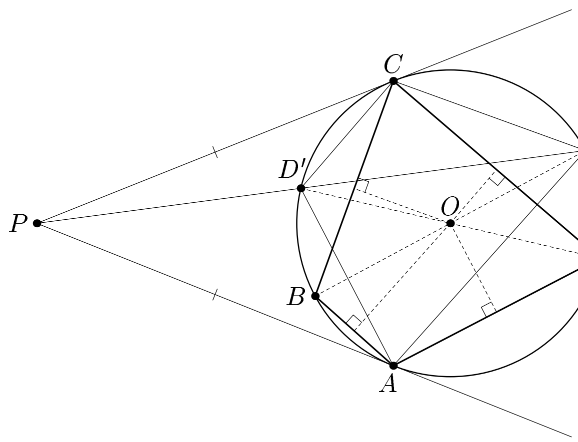


Рис. 4

Перпендикуляры, проведенные из точки O к прямым AB, BC, CD и DA, являются средними линиями треугольников ABB', CBB', CDD' и ADD' соответственно. Длины этих перпендикуляров равны соответственно $\frac{1}{2}AB'$, $\frac{1}{2}CB'$, $\frac{1}{2}CD'$ и $\frac{1}{2}AD'$, поэтому для них выполняется требуемое равенство.

5. (*М. Волчкевич*) Основанием пирамиды служит выпуклый четырехугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основания и являющееся вписанным четырехугольником?

Ответ. Да.

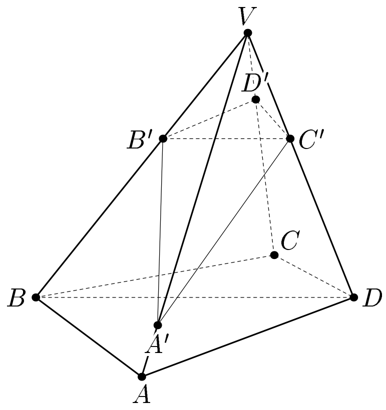


Рис. 5а

Решение. *Первый способ.* Пусть V — вершина пирамиды, $ABCD$ — её основание (см. рис. 5а). Если сумма его противоположных углов равна π, то достаточно провести сечение, параллельное основанию. В противном случае можно считать, что сумма углов A и C больше π. Возьмём точки A', B', D' на рёбрах AV, BV, DV соответственно, и пусть C' — точка пересечения плоскости $A'B'D'$ с ребром CV. Достаточно найти такие A', B', D', что сумма углов A' и C' меньше π (перетягивая такое сечение в сечение, параллельное основанию, мы в некоторый момент получим сумму углов A' и C', равную π, т.е. сечение будет вписанным четырёхугольником).

Будем брать точки B' и D' на одинаковой высоте. Так как направление отрезка $B'D'$ фиксировано, то фиксирован и его угол $\alpha > 0$ с плоскостью BCV. Угол $D'B'C'$ не меньше α. Аналогично, угол $B'D'C'$ не меньше некоторого $\beta > 0$. Поэтому угол $B'C'D'$ не больше, чем $\pi - \alpha - \beta < \pi$. Если теперь взять B' и D' близко к вершине пирамиды V, то угол $B'A'D'$ будет близок к 0 и потому его сумма с углом $B'C'D'$ будет меньше π.

Второй способ. Пусть $VABCD$ — наша пирамида (см. рис. 5б, которого пока нет). Достаточно найти плоскость, пересекающую лучи VA, VB, VC, VD в точках, являющихся вершинами вписанного четырехугольника (тогда после подходящей гомотетии с центром в V эти точки перейдут на ребра пирамиды, а не на их продолжения).

Выберем точку K на прямой пересечения плоскостей VAB и VCD (пусть для определенности V и отрезок BC лежат по разные стороны от VAD). Пусть B' — произвольная точка на луче VB, A' — точка пересечения лучей KB' и VA. Тогда длина отрезка KA' не меньше, чем расстояние от K до VA. Поэтому, выбирая B' достаточно далеко, можно добиться того, чтобы произведение $KA' \cdot KB' > 2KV^2$. При движении точки B' из этого положения к V это произведение меняется непрерывно; значит, при некотором положении точки B' оно станет равным $2KV^2$.

Аналогично, на луче VC найдется такая точка C', что $KC' \cdot KD' = KV^2$, где D' — точка пересечения лучей KC' и VD. Тогда плоскость $KB'C'$ — искомая, ибо она пересекает четырехгранный угол по четырехугольнику $A'B'C'D'$, причем $KA' \cdot KB' = KC' \cdot KD'$, где K — точка пересечения прямых $A'B'$ и $C'D'$.

6. (*А.Заславский*) Дан треугольник ABC и точка P. A_1, B_1, C_1 — вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью ABC, A_2, B_2, C_2 — точки, симметричные A_1, B_1, C_1 относительно BC, CA, AB, соответственно. Доказать, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

Решение. Докажем более сильное утверждение: треугольники PA_1B_1 и PA_2B_2 подобны. Заметим, что $\angle PBA_2 = \angle B_1BA_1 - 2\angle CBA_1 = |\angle B_1AC - \angle CBA_1| = \angle PAB_2$. Кроме того, $\dfrac{A_2B}{B_2A} = \dfrac{A_1B}{B_1A} = \dfrac{\sin\angle PAB}{\sin\angle PBA} = \dfrac{PB}{PA}$. Следовательно, треугольники PBA_2 и PAB_2 подобны, т.е. $\dfrac{PA_2}{PB_2} = \dfrac{PB}{PA} = \dfrac{PA_1}{PB_1}$ и $\angle A_2PB = \angle APB_2$. Последнее равносильно тому, что $\angle A_2PB_2 = \angle B_1PA_1$, откуда следует нужное утверждение.