

Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Малый мехмат
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования
Центр образования №218 г. Москвы
Гимназия №1543 г. Москвы

ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
6-Х И 7-Х КЛАССОВ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Москва
10 декабря 2006 года

Результаты Городской устной математической олимпиады будут размещены в сети Интернет на сайтах

<http://www.mccme.ru/ustn/>
<http://mmmf.math.msu.su/>

Варианты составили:

E. A. Чернышева, A. C. Горская

Городская устная математическая олимпиада.
Задачи и решения.

* * *

Рисунки: *A. Горская, Д. Смирнова, Е. Чернышева*

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

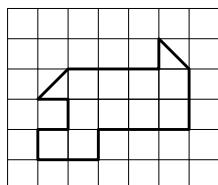
6 класс

Первый тур

(каждая задача оценивается в 5 баллов)

1. В примере на сложение под звёздочками скрываются все десять цифр по одному разу. Найдите хотя бы один такой пример.

$$\begin{array}{r} & * & * \\ + & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}$$



2. Добавьте к фигуре, изображенной на рисунке слева, две клетки (по линиям сетки) так, чтобы после этого ее можно было разрезать по линиям сетки на две равные части.

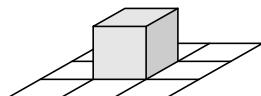
3. Пятеро друзей скинулись на покупку. Может ли оказаться так, что любые два друга в сумме внесли менее трети стоимости покупки?

Второй тур

(каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. По кругу было записано 8 чисел. Затем между каждыми соседними числами записали их сумму, а старые числа стерли. Могло ли оказаться так, что теперь по кругу записаны числа: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18?

5. Дан кубик с ребром 1. Одну из его граней склеили с центральной клеткой квадрата 3×3 (см. рисунок). Объясните, как завернуть кубик в этот лист бумаги, если разрешается (только по линиям сетки) делать надрезы и сгибать лист.



6. Выступая на арене с 10 львами и 15 тиграми, дрессировщик Паша потерял над ними контроль, и звери начали пожирать друг друга. Лев насытится, если съест трех тигров, а тигр — если съест двух львов. Определите, какое наибольшее количество хищников могло насытиться, и как это могло произойти?

Третий тур

(каждая задача оценивается в 15 баллов)

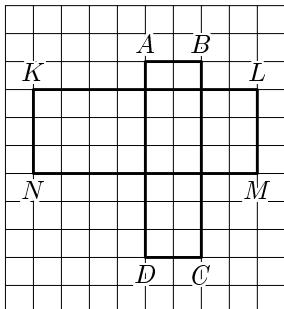
7. Илья Муромец помнит, что на то, чтобы нейтрализовать 10-голового огнедышащего дракона, достаточно четырех огнетушителей.



А для того, чтобы нейтрализовать 16-голового дракона, достаточно семь огнетушителей. Какое наименьшее количество огнетушителей нужно для того, чтобы нейтрализовать 19-голового дракона?

8. Прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ имеют соответственно параллельные стороны и расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что площади четырехугольников $ALCN$ и $KBMD$ равны.

9. По кругу лежат 13 старинных монет различного веса. За одно взвешивание можно узнать вес одной монеты. Объясните, как за шесть взвешиваний найти монету, которая тяжелее двух своих соседей.



7 класс

Первый тур

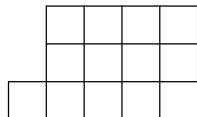
(каждая задача оценивается в 5 баллов)

1. Найдите все решения ребуса и докажите, что других нет:

$$AP^A = PAT.$$

(Однаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные).

2. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две одинаковые части тремя способами. (Резать можно только по линиям сетки).



3. В XIX и XX веках Россией правили 6 царей из династии Романовых. Вот их имена и отчества по алфавиту: Александр Александрович, Александр Николаевич, Александр Павлович, Николай Александрович, Николай Павлович и Павел Петрович. Один раз после брата правил брат, во всех остальных случаях — после отца сын. Как известно, последнего русского царя звали Николаем. Восстановите порядок правления царей. *К сожалению, жюри упорно делает вид, что не знает русской истории, и не верит ничему, кроме логических рассуждений.*

Второй тур

(каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. На площади репетировал военный оркестр. Для исполнения гимна музыканты выстроились квадратом, а для исполнения лирической

песни — перестроились в прямоугольник. При этом количество шеренг увеличилось на пять. Сколько музыкантов в оркестре?

5. На бесконечном листе клетчатой бумаги x клеток покрашены в чёрный цвет. Каждую секунду все белые клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх чёрные, становятся чёрными, а все клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх белые, становятся белыми. Остальные клетки не меняются. Может ли через несколько секунд случиться так, что на листе бумаги окажется ровно $\frac{3}{2}x$ чёрных клеток?

6. На спортивном празднике ученики 7 классов парами соревновались в беге по следующим правилам. По команде два человека начинают бежать с места старта в разные стороны по круговой дорожке стадиона. Финишем считается момент их встречи. Саша и Юра пробежали круг за 45 секунд. Две Алёны начали бежать с постоянными скоростями (не обязательно равными), но, когда им оставалось пробежать полкруга, одна Алёна увеличила скорость на 25%, а другая — на 28%. Оказалось, что первые полкруга они бежали на 5 секунд дольше, чем вторые полкруга. У кого лучше результат: у девочек или у мальчиков?

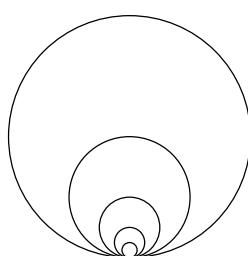
Третий тур
(каждая задача оценивается в 15 баллов)

7. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (см. рисунок). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

8. Лабиринт состоит из пяти окружностей (см. рисунок). Длины окружностей равны 10, 20, 40, 80 и 160 метров. По лабиринту с постоянной скоростью начинает ходить человек, который обходит все его окружности по часовой стрелке в порядке возрастания их длин.

Пройдя самую большую окружность, он переходит на самую маленькую и начинает все сначала. Через некоторое время по лабиринту начинает ходить еще один человек, который ходит с той же скоростью и по тому же плану, что и первый, но обходит все окружности против



часовой стрелки. Докажите, что эти два человека обязательно встретятся.

9. По кругу лежат 13 старинных монет различного веса. За одно взвешивание можно узнать вес одной монеты. Объясните, как за шесть взвешиваний найти монету, которая тяжелее двух своих соседей.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

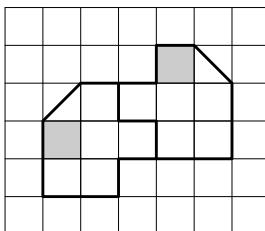
6 класс

1. Один из возможных примеров:

$$\begin{array}{r}
 & & 2 \\
 + & & 4 & 6 \\
 & 9 & 8 & 7 \\
 \hline
 1 & 0 & 3 & 5
 \end{array}$$

Остальные решения ребуса получаются перестановкой цифр 4 и 8 и перестановками цифр 2, 6 и 7.

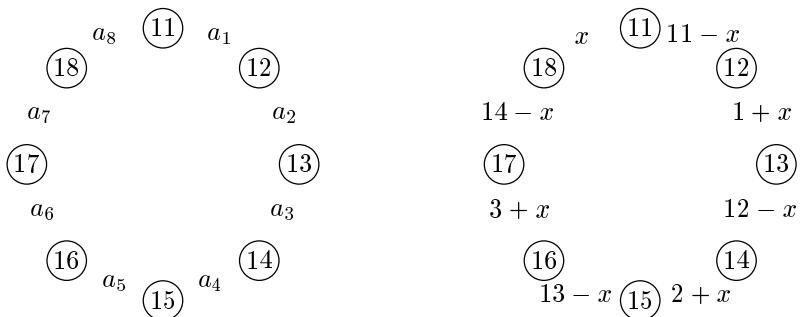
2. См. рисунок (серым закрашены добавленные клетки).



3. Нет, такого быть не может. Предположим, что первый и второй внесли в сумме менее трети стоимости, а также третий и четвертый внесли в сумме менее трети стоимости. Тогда четверо друзей внесли менее двух третей стоимости покупки. Следовательно, на долю пятого придется более трети стоимости покупки. Поэтому в сумме с любым из первых четырех друзей пятый внесет более трети стоимости покупки.

4. Нет, такие числа получиться не могли.

Первый способ. Предположим, что изначально были записаны числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ (см. рисунок слева). Подсчитаем их сумму двумя способами: $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) = 12 + 14 + 16 + 18 = 60$ и $(a_8 + a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) = 11 + 13 + 15 + 17 = 56$. Пришли к противоречию, следовательно, указанные в условии числа получиться не могли.



Второй способ. Пусть x — число, стоявшее между 18 и 11. Тогда, двигаясь по часовой стрелке, можно последовательно выразить через x все остальные числа (см. рисунок справа). Действуя таким образом, получим, что число, стоявшее между 17 и 18, равно $14 - x$. С другой стороны, это число в сумме с числом x должно быть равно 18, что не возможно. Следовательно, ситуации описанной в условии, быть не могло.

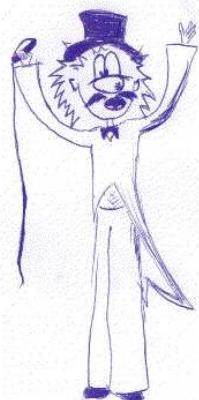


5. Разрежем лист и согнем его так, как показано на рисунке слева (жирные линии — линии разреза, пунктирные — линии сгиба). Получится фигура, изображенная на рисунке справа (серым цветом отмечены "двуслойные" клетки). В эту фигуру можно завернуть куб.

Фигура, приведенная на рисунке справа, является одной из разверток куба.

6. Наибольшее количество насытившихся хищников равно 9. Поскольку на арене было 10 львов, то наестся могли не более, чем $10 : 2 = 5$ тигров. Аналогично, могли наестся не более, чем $15 : 3 = 5$ львов. Итого — не более 10 хищников. Но тогда все животные оказались бы съедены. Такого быть не могло: на арене должен был оставаться тот, кто ел последним. Следовательно, количество насытившихся хищников не превосходит девяти.

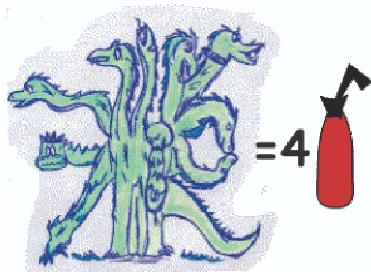
Покажем, как такое могло произойти. Сначала три тигра съедают шесть львов. Затем оставшие-



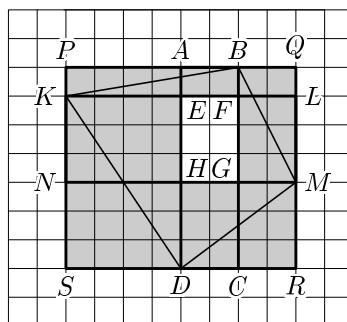
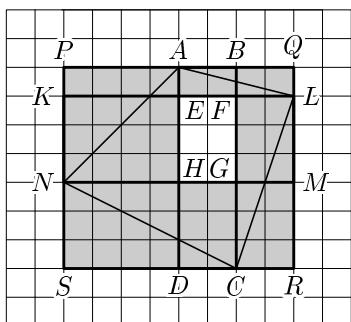
ся 4 льва съедают 12 тигров (включая трех насытившихся). Итак, на арене остались четверо сытых львов и три голодных тигра. Два тигра съедают четырех львов. Таким образом, насытились четыре льва и пять тигров, то есть, девять хищников.

7. Для нейтрализации девятнадцатиголового дракона понадобится восемь огнетушителей.

Из условия следует, что для нейтрализации 20-голового дракона хватит восьми огнетушителей. Следовательно, такого количества огнетушителей хватит и для нейтрализации 19-голового дракона. Докажем, что семи огнетушителей будет недостаточно. Предположим, что это не так, то есть, для нейтрализации 19-голового дракона семи огнетушителей хватит. Поскольку на нейтрализацию 16-голового дракона требуется не менее семи огнетушителей, то для нейтрализации трех голов должно хватить менее одного огнетушителя. Это означает, что на каждую голову тратится менее $\frac{1}{3}$ огнетушителя, то есть, на 16 голов — менее $\frac{16}{3}$, а значит и меньше, чем 6 огнетушителей.



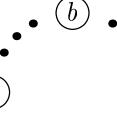
8. Нарисуем еще один прямоугольник $PQRS$ (см. рисунки). Тогда площадь четырехугольника $ALCN$ состоит из площадей четырех треугольников и прямоугольника $EFGH$ (см. рисунок слева). Площадь каждого из этих треугольников равна половине площади соответствующего прямоугольника. Следовательно, площадь $ALCN$ равна сумме половины площади серой фигуры и площади $EFGH$.



Проведя аналогичные рассуждения для четырехугольника $KBMD$ (см. рисунок справа), получим, что его площадь также складывается

из половины площади серой фигуры и площади $EFGH$. Следовательно, площади четырехугольников $ALCN$ и $KBMD$ равны.

9. Заметим сначала, что если мы нашли три монеты a , b и c (см. рисунок) таких, что вес b больше веса a и больше веса c , то среди монет,


лежащих между a и b , самой монеты b , и монет, лежащих между b и c , обязательно найдется нужная нам. Изложим алгоритм поиска монеты, которая тяжелее своих соседей, для случаев, когда по кругу лежат 3 монеты, 5 монет, 8 монет.

1) Предположим, что по кругу лежат три монеты различного веса. Тогда, для того, чтобы найти монету, которая тяжелее своих соседей, нам придется взвесить все монеты, то есть, сделать три взвешивания.

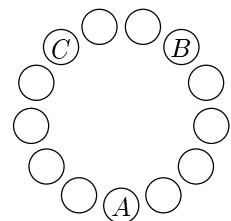
2) Предположим, что по кругу лежат пять монет различного веса. Тогда, для того, чтобы найти монету, которая тяжелее своих соседей, нам достаточно четырех взвешиваний. Сначала взвесим произвольную монету A (см. рисунок слева), затем узнаем вес монеты, обозначенной на рисунке буквой B . Предположим, что монета B тяжелее, чем A . Тогда найдем вес монеты C . Если C тяжелее B , то искомая монета — либо сама монета C , либо монета, лежащая между A и C . Четвертым взвешиванием мы узнаем ее вес, и, следовательно, найдем искомую монету (если бы C оказалась легче B , то четвертое взвешивание мы бы потратили на монету, лежащую между A и B).



3) Предположим, что по кругу лежат восемь монет различного веса. Тогда на поиск нужной монеты нам достаточно пяти взвешиваний. Сначала взвесим произвольную монету A (см. рисунок справа), затем монету B . Предположим, что монета B тяжелее, чем A . Тогда найдем вес монеты C . Если C тяжелее B , то искомая монета находится либо между A и C , либо это сама монета C , либо она среди монет, лежащих между C и B . Уберем все монеты, лежащие между A и B , а монету A положим сверху на монету B . Теперь по кругу лежат 5 монет и мы знаем вес двух из них — монеты A и монеты C . Дальше будем действовать так, как это описано в пункте 2) и тогда на поиск нужной монеты нам хватит еще двух взвешиваний. Итого — пять взвешиваний.

Случай, когда B тяжелее C , рассматривается аналогично, поскольку на дугах $A - C - B$ и $A - B - C$ поровну монет.

4) Теперь рассмотрим исходную задачу. Сначала взвесим произвольную монету A (см. рисунок), затем узнаем вес монеты, обозначенной на рисунке буквой B . Предположим, что монета B тяжелее, чем A . Тогда найдем вес монеты C . Если C тяжелее B , то искомая монета находится либо между A и C , либо это сама монета C , либо она среди монет, лежащих между C и B (случай, когда B тяжелее C , рассматривается аналогично, поскольку на дугах $A - C - B$ и $A - B - C$ поровну монет). Как и в пункте 3), уберем все монеты, лежащие между A и B , а монету A положим сверху на монету B . Теперь по кругу лежат 8 монет и мы знаем вес двух из них — монеты A и монеты C . Дальше действуем так, как это описано в пункте 3) и тогда на поиск нужной монеты нам хватит еще трех взвешиваний. Итого — шесть взвешиваний.

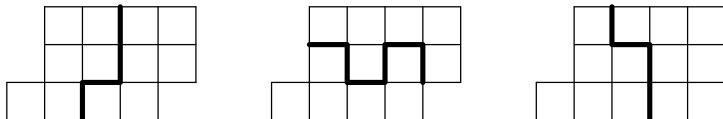


7 класс

1. Заметим, что $10^3 = 1000$, т.е. даже самое маленькое двузначное число при возведении в степень, большую двойки, не будет трёхзначным. Это значит, что A может быть единицей, двойкой или нулём. Однако любое число АР в нулевой степени — единица, а в первой степени — само число АР. Поэтому A может быть только двойкой.

Далее, поскольку $20^2 = 400$, а $30^3 = 900$, то Р (первая цифра трёхзначного числа) может быть только четвёркой, пятёркой, шестёркой, семёркой или восьмёркой. Перебрав пять двузначных чисел, получаем, что существует единственное решение $27^2 = 729$.

2. Ответ: см.рисунок.



3. Порядок правления царей такой: 1. Павел Петрович; 2. Александр Павлович; 3. Николай Павлович; 4. Александр Николаевич; 5. Александр Александрович; 6. Николай Александрович.

Докажем это. Поскольку Петров среди этих царей нет, то первым правил Павел Петрович. Последним мог править как Николай Павло-

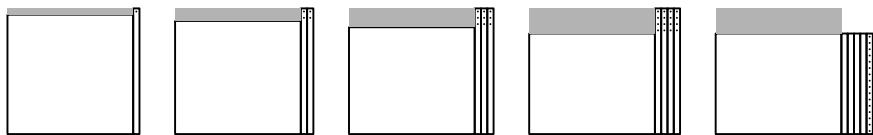
вич, так и Николай Александрович. В первом случае, поскольку, кроме Павла Петровича среди царей Павлов не было, то пятым должен был править тоже Павлович (брать Николая Павловича), но и вторым тоже должен править Павлович (сын Павла Петровича). Двух Павловичей среди оставшихся царей у нас нет, поэтому этот случай невозможен.

Итак, первым точно правил Павел Петрович, а последним — Николай Александрович. Оба оставшихся Павловича могли править только после Павла Петровича, следовательно, они были братьями. Оставшиеся два царя — отец и сын, следовательно четвертым правил Александр Николаевич, а пятым — Александр Александрович. Тогда третьим был Николай Павлович.

4. В оркестре было 400 музыкантов. Пусть во время гимна музыканты выстроились в виде квадрата $x \times x$. Очевидно, что при перестроении количество рядов уменьшилось не более чем на четыре.

Возьмём музыкантов из последнего ряда и заставим их перестроиться в шеренгу (см. рисунок). Тогда один музыкант останется лишним, а полученный прямоугольник будет иметь размер $(x - 1) \times (x + 1)$. Ясно, что из одного музыканта нельзя составить четыре шеренги.

Поэтому возьмём ещё один ряд музыкантов и заставим их перестроиться в шеренгу. При этом четыре музыканта окажутся лишними, а полученный прямоугольник будет иметь размер $(x - 2) \times (x + 2)$. Из четырёх лишних музыкантов нельзя составить три шеренги.



Тогда возьмём ещё один ряд музыкантов и заставим их тоже перестроиться в шеренгу. Теперь девять музыкантов окажутся лишними, и полученный прямоугольник будет иметь размер $(x - 3) \times (x + 3)$. Из девяти лишних музыкантов нельзя составить две шеренги.

Поэтому перестроим в шеренгу ещё один ряд музыкантов. Шестнадцать музыкантов окажутся лишними, и полученный прямоугольник будет иметь размер $(x - 4) \times (x + 4)$. Попробуем составить ещё одну шеренгу из шестнадцати «лишних» музыкантов.

Проверим, может ли $x - 4$ равняться шестнадцати: если $x - 4 = 16$, то $x = 20$, тогда всего музыкантов $20 \times 20 = 400$, а прямоугольник имеет размеры $(x - 4) \times (x + 5) = 16 \times 25 = 400$, что удовлетворяет условию задачи.

5. Такая ситуация возникнуть может, например:



6. Предположим, что обе Алёны увеличили скорость на 25%. Обозначим за x время, за которое они пробежали первые полкруга. Поскольку по нашему предположению их общая скорость возросла на 25%, т. е. в $5/4$ раза, то время, за которое они пробежали вторые полкруга, уменьшилось в $4/5$ раза и составило $\frac{4}{5}x$. По условию задачи $\frac{4}{5}x + 5 = x$, откуда $x = 25$, а общее время, за которое они пробежали бы круг, равно $25 + 25 - 5 = 45$ секунд. Но, поскольку одна из Алён увеличила скорость больше, чем на 25%, то их общая скорость увеличилась больше, чем на 25%, а значит, и времени они потратили меньше, чем 45 секунд, то есть, результат у девочек лучше.

7. Заметим, что каждый прыжок из клетки с нечётным номером обязательно будет в клетку с чётным номером, и наоборот. Поскольку Маша сначала прыгнула в клетку с нечётным номером (1), а выпрыгнула из клетки с чётным номером (10), то она должна была побывать одинаковое количество раз в клетках с чётными и нечётными номерами. В «нечётных» клетках она побывала $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ раз, а в «чётных» клетках $2 + 4 + 6 + 8 + x$, где x — количество прыжков на клетку 10. Приравняем оба выражения и получим, что на клетке 10 Маша побывала 5 раз.

8. Заметим, что если два человека окажутся в некоторый момент на одной окружности, то они встретятся, так как движутся навстречу друг другу. Рассмотрим какой-нибудь из моментов времени, когда первый человек начал путь по самой большой окружности. Соответственно, второй человек в этот самый момент должен находиться на какой-нибудь из оставшихся четырёх. Но суммарная длина четырёх маленьких окружностей — $10 + 20 + 40 + 80 = 150$, то есть, раньше, чем первый человек закончит свой путь по большой окружности, второй пройдёт все остальные и тоже пойдёт по большой окружности. Значит, они встретятся.

9. см. решение девятой задачи шестого класса.