Третья всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Пятая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 1 апреля 2007 года

Решения задач

8 – 9 класс

1. (*В. Шевяков*) Дана прямоугольная полоска размером 12×1. Оклейте этой полоской в два слоя куб с ребром 1 (полоску можно сгибать, но нельзя надрезать).

Рис. 8.1.1

Решение. Сложим полоску так, как это показано на рисунках 8.1.1 и 8.1.2 (на первом рисунке пунктиром изображены линии сгиба, а на втором серым цветом закрашена оборотная сторона полоски). Полученной фигурой можно оклеить куб в два слоя.

Для удобства пронумеруем грани кубика числами от одного до шести так, чтобы сумма чисел, записанных на противоположных гранях, равнялась семи. На развертке соответствующие грани пронумерованы также.

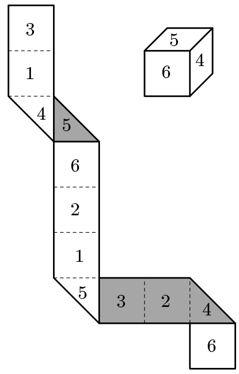

Рис. 8.1.2

2. (*Фольклор*) Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. На продолжниях катетов AB и AC за вершины B и C отложили равные отрезки BK и CL. E и F — точки пересечения отрезка KL и прямых, перпендикулярных KC и проходящих через точки B и A соответственно. Докажите, что $EF = FL$.

Решение. *Первый способ.* Достроим равнобедренный прямоугольный треугольник AKL до квадрата $AKDL$ (см. рис. 8.2.1). Пусть S и N точки пересечения прямых BE и AF с отрезком DL. Тогда $\angle AKC = \angle LAN$ и $AL = AK$, следовательно прямоугольные треугольники ALN и AKC равны по катету и прилежащему острому углу. То есть, $LN = AC = AB$. Четырехугольник $ABSN$ — параллелограмм (по определению), следовательно, $SN = AB = LN$. Поскольку прямые BS и AN параллельны, то по теореме Фалеса $EF = FL$.

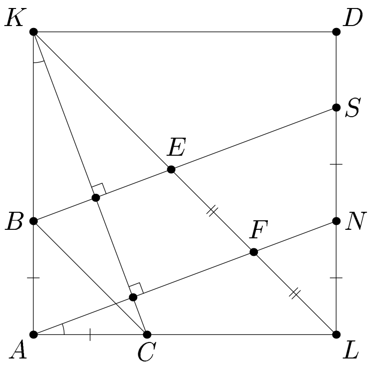

Рис. 8.2.1

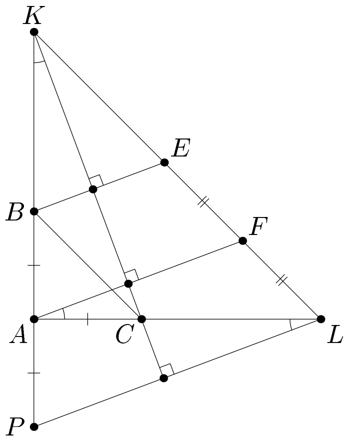

Рис. 8.2.2

Второй способ. Проведем через точку L прямую, перпендикулярную прямой KC. Пусть P — точка пересечения этой прямой и прямой AB (см. рис. 8.2.2). Тогда $\angle AKC = \angle FAC = \angle ALP$ и $AL = AK$, следовательно прямоугольные треугольники ALP и AKC равны по катету и прилежащему острому углу. То есть, $AP = AC = AB$. Поскольку прямые BE, AF и PL параллельны, то по теореме Фалеса $EF = FL$.

3. (*Фольклор*) Постройте параллелограмм $ABCD$, если на плоскости отмечены три точки: середины его высот BH и BP и середина стороны AD.

Решение. Предположим, что искомый параллелограмм $ABCD$ построен. Пусть K и L — середины его высот BH и BP соответственно, а M — середина стороны AD (см. рис. 8.3). Проведем отрезок ML. Поскольку $AM = MD$ и $BL = LP$, то ML — средняя линия трапеции $ABPD$, поэтому $ML \parallel CD$ и $ML \perp BP$. Следовательно, вершина B параллелограмма принадлежит прямой l, перпендикулярной отрезку ML. Проведем прямую KM и отложим отрезкок KN, равный отрезку KM. Так как $\triangle KBN = \triangle KHM$ (по первому признаку), то $\angle NBK = 90°$, то есть, вершина B принадлежит окружности γ, построенной на отрезке NK как на диаметре. Таким образом, вершина B является точкой пересечения прямой l и окружности γ. Дальнейшее построение очевидно.

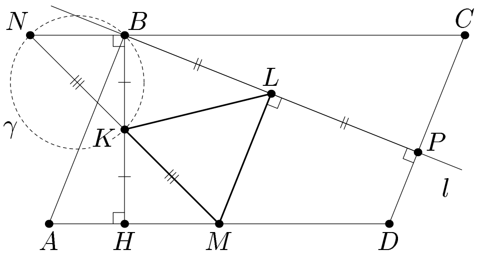

Рис. 8.3

Задача может иметь два решения, одно решение или ни одного. Это зависит от количества точек пересечения прямой l и окружности γ.

4. (*Фольклор*) Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Окружность, описанная около треугольника BIC, пересекает прямые AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что прямая EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

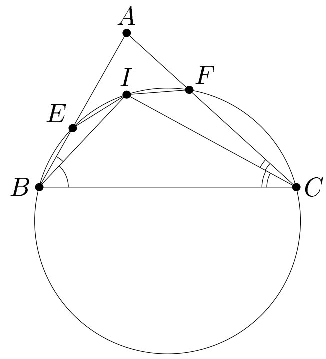

Рис. 8.4.1

Решение. Докажем, что точки E и F лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC. Предположим, что это не так.

1) Пусть точки I, E и F лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC (см. рис. 8.4.1). Поскольку BI и CI — биссектрисы, то из равенства соответствующих вписанных углов следует равенство дуг: $\smile EI = \smile IC$ и $\smile BI = \smile IF$. Поскольку $\smile IC > \smile IF$, то и $\smile EI > \smile BI$, что невозможно.

2) Пусть точки E и F лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC, а точка I — в другой (см. рис. 8.4.2). Тогда $\angle BEI = \angle ICB$, а $\angle AFI = \angle IBC$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Предположим, что $\angle ABC > \angle ACB$ (в случае равенства точки E и F совпадут с точками B и C). Но тогда $\angle AFI > \angle ICA$ и точка F лежит на луче CA.

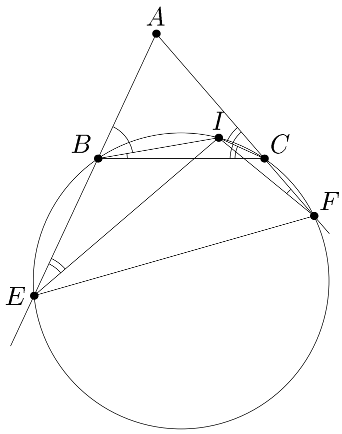

Рис. 8.4.2

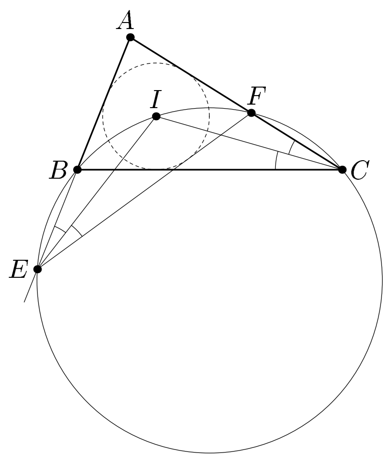

Рис. 8.4.3

Таким образом, точки E и F лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC (см. рис. 8.4.3). Используя то, что CI — биссектриса угла ACB и равенство вписанных углов, опирающихся на равные дуги, получим, что $\angle IEF = \angle ICF = \angle ICB = \angle IEB$, следовательно, треугольники ABC и AEF имеют общую вписанную окружность.

5. (*А. Заславский*) Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны его вершинам относительно противоположных сторон. C_2 — точка пересечения прямых AB_1 и BA_1, точки A_2 и B_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 параллельны.

Решение. *Первый способ.* Докажем параллельность прямых A_1A_2 и C_1C_2 (см. рис. 8.5.1). Заметим, что для этого достаточно доказать подобие треугольников BA_2A_1 и BC_1C_2.

Треугольники ABC, ABC_1, A_1BC и AB_1C равны (по свойству осевой симметрии). Поэтому $\angle BCA_2 = 180^\circ - 2\angle C$, $\angle A_2BC = 180^\circ - 2\angle B$, следовательно, $\angle BA_2C = 180^\circ - 2\angle A$.

Также $\angle C_2BA = 180^\circ - 2\angle B$ и $\angle C_2AB = 180^\circ - 2\angle A$, следовательно, треугольники BA_2C и BAC_2 подобны. Тогда $\dfrac{BC}{BA_2} = \dfrac{BC_2}{BA}$. Поскольку $BC = BC_1$ и $BA = BA_1$, то $\dfrac{BC_1}{BA_2} = \dfrac{BC_2}{BA_1}$. Кроме того, $\angle C_1BC_2 = \angle A_1BA_2$ (как вертикальные), следовательно, треугольники BA_2A_1 и BC_1C_2 подобны.

Параллельность прямых C_1C_2 и B_1B_2 доказывается аналогично.

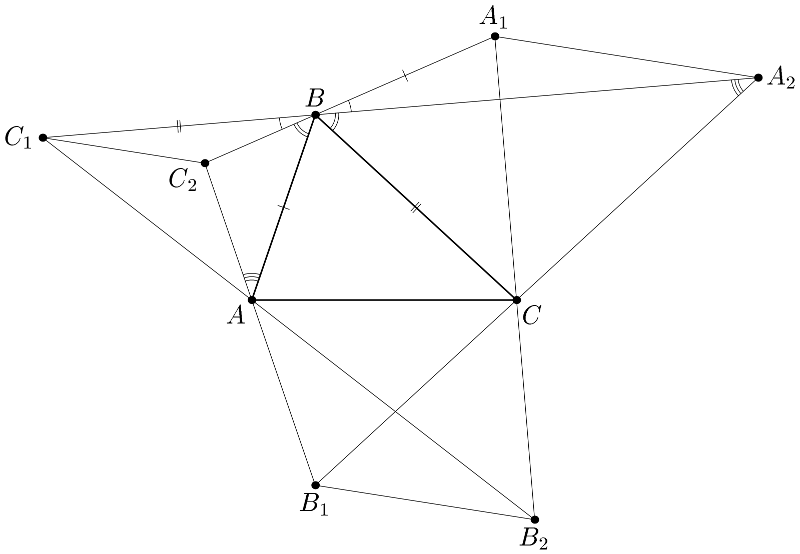

Рис. 8.5.1

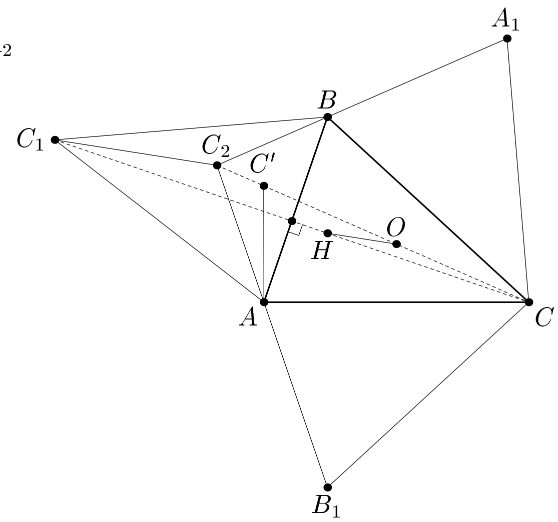

Рис. 8.5.2

Второй способ. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — его ортоцентр(см. рис. 8.5.2). Заметим, что точка C_1 лежит на CH. Докажем, что C_2 лежит на CO. Пусть C' и C'' — точки пересечения прямых AB_1 и BA_1 с прямой CO. Тогда в треугольнике CB_1C': $\angle CB_1C' = \angle B$, $\angle C'CB_1 = \angle C + \angle OCA = \angle C + \pi/2 - \angle B$ и, значит, $\angle B_1C'C = \pi/2 - \angle C$. Следовательно, по теореме синусов $CC' = \dfrac{B_1C \sin B}{\cos C} = \dfrac{2R \sin A \sin B}{\cos C}$. Аналогично, из треугольника $A_1C''C$ получим, что $CC'' = \dfrac{2R \sin A \sin B}{\cos C}$, следовательно, точки C', C'' и C_2 совпадают.

По теореме синусов из треугольника BHC следует, что $\dfrac{BC}{\sin \angle BHC} = \dfrac{CH}{\sin \angle HBC}$, то есть, $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CH}{\cos C}$, кроме того, $\dfrac{CC_1}{2BC} = \sin B$, откуда $\dfrac{2 \sin A \sin B}{\cos C} = \dfrac{CC_1}{CH}$. Следовательно, $\dfrac{CC_2}{CO} = \dfrac{CC_1}{CH}$, то есть, прямая C_1C_2 параллельна OH. Аналогично доказывается, что прямые A_1A_2 и B_1B_2 параллельны OH.

6. (*А. Заславский*) Внутри окружности зафиксирована точка P. C — произвольная точка окружности, AB — хорда, проходящая через точку P и перпендикулярная отрезку PC. Точки X и Y являются проекциями точки P на прямые AC и BC. Докажите, что все отрезки XY касаются одной и той же окружности.

Решение. Для того, чтобы доказать утверждение задачи достаточно доказать, что расстояние от точки PQ до прямой XY не зависит от выбора точки C. Выразим это расстояние через радиус окружности и произведение отрезков хорд, проходящих через точку P (и то и другое для данной конструкции постоянно).

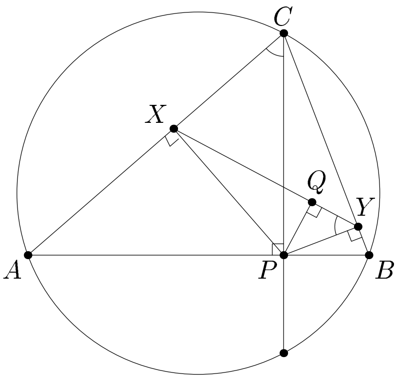

Рис. 8.6.1

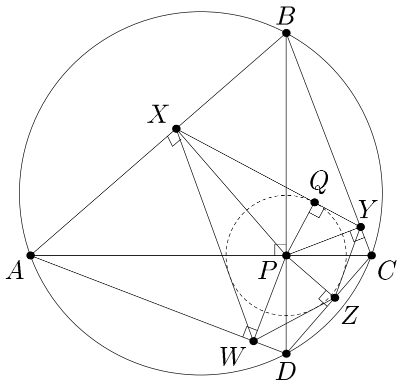

рис. 8.6.2

Первый способ. Четырехугольник $PXCY$ — вписанный (см. рис. 8.6.1), поэтому $\angle ACP = \angle PYX$. Из прямоугольного треугольника PQY получим, что $PQ = PY \cdot \sin\angle PYX = PY \cdot \sin\angle ACP$. Кроме того, из прямоугольных треугольников ACP и PBY получим, что $\sin\angle ACP = \dfrac{AP}{AC}$ и $PY = PB \cdot \sin\angle ABC$. Следовательно, $PQ = \dfrac{AP \cdot PB \sin\angle ABC}{AC}$. Также, по следствию теоремы синусов из треугольника ABC получим, что $\dfrac{\sin\angle ABC}{AC} = \dfrac{1}{2R}$, откуда $PQ = \dfrac{AP \cdot PB}{2R}$.

Второй способ. Так как треугольник PXY вписан в окружность с диаметром PC (см. рис. 8.6.1), то расстояние PQ от P до XY равно $\dfrac{2S_{PXY}}{XY} = \dfrac{PX \cdot PY}{PC}$. Из прямоугольных треугольников PCA и PCB получим, что $PX = \dfrac{PA \cdot PC}{AC}$, $PY = \dfrac{PB \cdot PC}{BC}$. Кроме того, $PC = \dfrac{2S_{ABC}}{AB} = \dfrac{AC \cdot BC \sin\angle ACB}{AB}$. Следовательно, $PQ = \dfrac{PA \cdot PB \cdot PC}{AC \cdot BC} = \dfrac{PA \cdot PB \cdot \sin\angle ACB}{AB} = \dfrac{PA \cdot PB}{2R}$.

Ту же самую задачу можно было сформулировать и по-другому: *рассмотрим вписанный четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются под прямым углом в фиксированной точке P. Опустим из точки P перпендикуляры PX, PY, PZ и PW на его стороны. Тогда четырехугольник $XYZW$ — описан около окружности с центром в точке P* (*см. рис.* 8.6.2). *При этом радиус этой окружности не зависит от выбора исходного четырехугольника $ABCD$.*

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, А. Мякишев, Д. Прокопенко, Б. Френкин.

Третья всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Пятая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 1 апреля 2007 года

Решения задач

10 – 11 класс

1. (*С. Маркелов*) Треугольник разбили на пять треугольников, ему подобных. Верно ли, что исходный треугольник — прямоугольный?

Ответ: нет, неверно.

Решение. Например, рассмотрим равнобедренный треугольник с углом 120°. Его можно разбить на пять подобных ему треугольников так, как показано на рисунке 10.1.

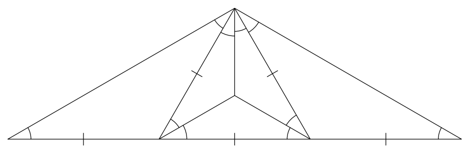

Рис. 10.1

Отметим, что решение единственное.

2. (*Д. Прокопенко*) Две окружности пересекаются в точках P и Q. Точка A лежит на первой окружности, но вне второй. Прямые AP и AQ пересекают вторую окружность в точках B и C соответственно. Укажите положение точки A, при котором треугольник ABC имеет наибольшую площадь.

Ответ: треугольник ABC имеет наибольшую площадь, когда A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку PQ.

Решение. Заметим, что при движении точки A по первой окружности (см. рис. 10.2.1) угол PAQ не меняется (поскольку опирается на фиксированную дугу PQ). Также фиксированной является дуга PQ второй окружности. Поскольку $\angle PAQ = \frac{1}{2}(\smile BC - \smile PQ)$, то угловая величина дуги BC постоянна, то есть, постоянна длина хорды BC.

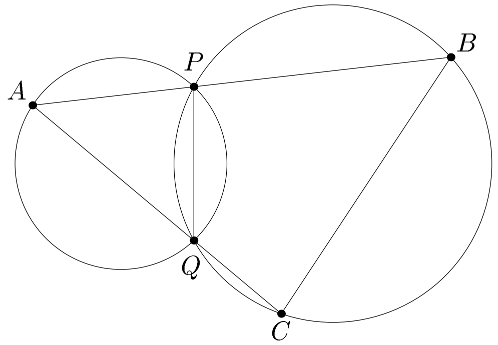

Рис. 10.2.1

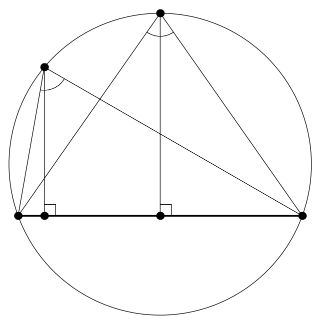

Рис. 10.2.2

Таким образом, для любого положения точки A в треугольнике ABC величина угла A и длина стороны BC постоянны. Среди всех треугольников с данными стороной и противолежащим углом наибольшую площадь имеет равнобедренный (см. рис. 10.2.2). Следовательно, $\triangle ABC$ имеет наибольшую площадь, когда A лежит на линии центров данных окружностей, которая является серединным перпендикуляром к отрезку PQ.

3. (*Фольклор*) В некоторой трапеции сумма длин боковой стороны и диагонали равна сумме длин другой боковой стороны и другой диагонали. Докажите, что трапеция равнобокая.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ ($AD||BC$) выполняется равенство $AB+BD = AC+CD$.

Первый способ. Поскольку $AB + BD = AC + CD$, то периметр треугольника ABD (обозначим его как $2p_1$) равен периметру треугольника ACD ($2p_2$) (сторона AD у них общая). Треугольники ABD и ACD равновеликие с равными периметрами, а следовательно и равными радиусами вписанных окружностей (I_1 и I_2 — центры окружностей).

Пусть K и L — точки касания этих окружностй с боковыми сторонами трапеции (см. рис. 10.3.1). Поскольку $BK = p_1 - AD$, а $CL = p_2 - AD$, и $p_1 = p_2$, то $BK = CL$, а значит, $\angle I_1BK = \angle I_2CL$ или $\angle ABD = \angle ACD$, откуда следует, что трапеция вписана в окружность, то есть, является равнобокой.

Второй способ. Введем обозначения, как показано на рисунке (10.3.2). Тогда по условию, $x+d_1=y+d_2$. Треугольники ABD и ACD имеют равные высоты и общее основание, а значит, их площади равны.

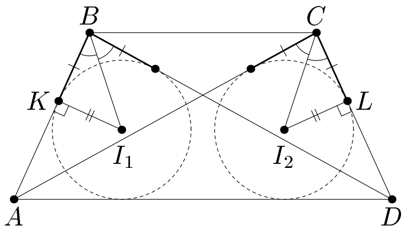

Рис. 10.3.1

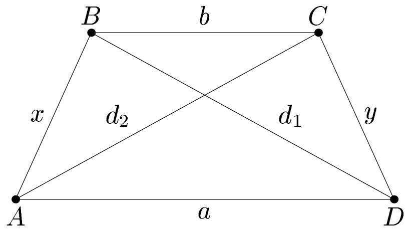

Рис. 10.3.2

Далее воспользуемся формулой Герона.

$$S_{ABD}=\sqrt{\left(\frac{x+d_1+a}{2}\right)\left(\frac{d_1+x-a}{2}\right)\left(\frac{d_1+a-x}{2}\right)\left(\frac{x+a-d_1}{2}\right)},$$

$$S_{ACD}=\sqrt{\left(\frac{y+d_2+a}{2}\right)\left(\frac{d_2+y-a}{2}\right)\left(\frac{d_2+a-y}{2}\right)\left(\frac{y+a-d_2}{2}\right)}.$$

Приравняв эти выражения, возведем обе части в квадрат, и, воспользовавшись условием, придем к равенству $(a+(d_1-x))(a-(d_1-x))=(a+(d_2-y))(a-(d_2-y))\Leftrightarrow a^2-(d_1-x)^2=$ $=a^2-(d_2-y)^2\Leftrightarrow|d_1-x|=|d_2-y|$. Таким образом (с учетом условия), мы получили две системы:

$$\begin{cases}d_1-x=d_2-y,\\ d_1+x=d_2+y,\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}d_1-x=-d_2+y,\\ d_1+x=d_2+y.\end{cases}$$

Из первой системы следует сразу (вычтем из второго уравнения первое), что $x=y$, а следовательно, трапеция равнобокая. Вторая система приводит к соотношениям $\begin{cases}x=d_2,\\ y=d_1,\end{cases}$. Это означает, что треугольники BAC и BDC — равнобедренные. Они имеют равные высоты и общее основание, поэтому точки A и D должны совпадать, что невозможно по условию.

Третий способ. Напомним, что *эллипсом* с фокусами F_1 и F_2 называют ГМТ X плоскости таких, что $F_1X+F_2X=const$. Прямая F_1F_2 и прямая, проходящая через середину отрезка F_1F_2 и перпендикулярная ему называются *главными осями эллипса* и являются его осями симметрии.

Из условия задачи следует, что вершины A и D трапеции являются фокусами некоторого эллипса (см. рис. 10.3.3), а две другие вершины лежат на этом эллипсе. Отрезок BC, параллельный AD, при симметрии относительно серединного перпендикуляра к AD, должен переходить сам в себя (так как эллипс переходит сам в себя и прямая BC также отображается на себя, следовательно, трапеция равнобокая.

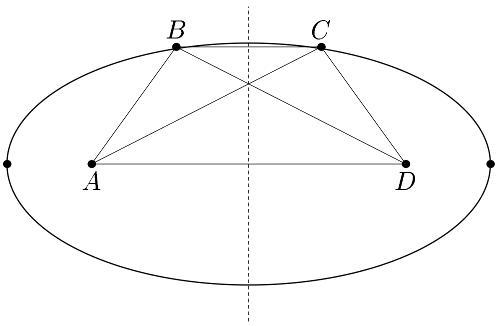

Рис. 10.3.3

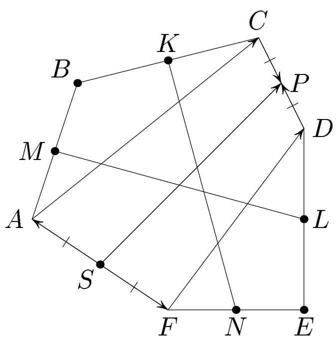

Рис. 10.4

4. (*М. Волчкевич*) Середины противолежащих сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведенные отрезки равны.

Решение. Пусть M, K, P, L, N и S — середины сторон AB, BC, CD, DE, EF и FA соответственно (см. рис. 10.4). Рассмотрим четырехугольник $ACDF$. Тогда $\overline{SP} = \overline{SA} + \overline{AC} + \overline{CP}$ и $\overline{SP} = \overline{SF} + \overline{FD} + \overline{DP}$. Поскольку SP — средняя линия этого четырехугольника, то сложив эти равенства, получим, что $\overline{SP} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{FD})$. Аналогично, $\overline{KN} = \frac{1}{2}(\overline{BF} + \overline{CE})$ и $\overline{LM} = \frac{1}{2}(\overline{DB} + \overline{EA})$.

Сложим полученные равенства: $\overline{SP}+\overline{KN}+\overline{LM} = \frac{1}{2}(\overline{EA}+\overline{AC}+\overline{CE})+\frac{1}{2}(\overline{DB}+\overline{BF}+\overline{FD}) = \overline{0}$. По условию, угол между любыми двумя из этих трех векторов равен 60°, следовательно, из отрезков SP, KN и LM можно составить равносторонний треугольник.

5. (*А. Заславский*) В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке P, и SP является высотой пирамиды. Докажите, что проекции точки P на боковые грани пирамиды лежат на одной окружности.

Решение. Пусть K, L, M и N — проекции P на плоскости SAB, SBC, SCD и SDA, а K', L', M' и N' — проекции P на AB, BC, CD и DA (см. рис. 10.5).

Первый способ. Так как четырехугольники $PK'BL'$, $PL'CM'$, $PM'DN'$, $PN'AK'$ вписанные, то $\angle PL'K' = \angle PBK'$, $\angle PL'M' = \angle PCM'$, $\angle PN'M' = \angle PDM'$ и $\angle PN'K' = \angle PAK'$. Кроме того, $\angle K'L'M' + \angle M'N'K' = 180^\circ$, следовательно, точки K', L', M' и N' лежат на одной окружности.

PK — высота треугольника SPK', следовательно, $SK \cdot SK' = SP^2$. Аналогично, $SL \cdot SL' = SP^2$. То есть, треугольники SKL и $SL'K'$ подобны и $KL = \dfrac{K'L' \cdot SP^2}{SK' \cdot SL'}$. Из этого и других таких же равенств следует, что $KL \cdot MN + LM \cdot NK = KM \cdot LN$.

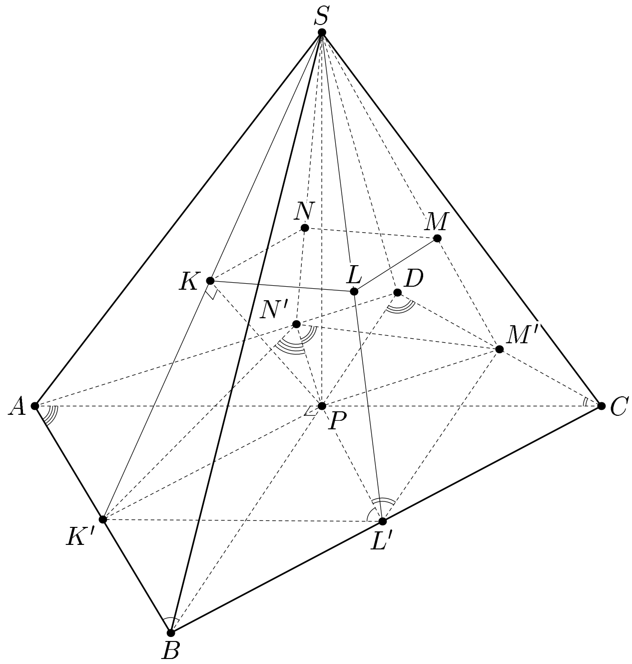

Рис. 10.5

Для любых четырех точек K, L, M и N в пространстве выполняется неравенство $KL \cdot MN + LM \cdot NK \geqslant KM \cdot LN$, в котором равенство достигается тогда и только тогда, когда эти точки лежат на одной окружности. Следовательно, точки K, L, M и N лежат на одной окружности.

Второй способ. Рассмотрим сферу с диаметром SP. Поскольку из точек K, L, M и N отрезок SP виден под прямым углом, то эти точки также принадлежат этой сфере. Преобразование, при котором $K \to K'$, $L \to L'$, $M \to M'$ и $N \to N'$, является стереографической проекцией (см. Я.П. Понарин, «Элементарная геометрия» (2 т., стр. 154)).

Стереографическая проекция является инверсией относительно сферы с центром в точке S и радиусом SP (по определению инверсии). Поскольку K', L', M' и N' лежат на окружности, не содержащей центр инверсии, то K, L, M и N также лежат на одной окружности.

6. (*А.Заславский*) Дана окружность и точка P внутри нее. Два произвольных перпендикулярных луча с началом в точке P пересекают окружность в точках A и B. Точка X является проекцией точки P на прямую AB, Y — точка пересечения касательных к окружности, проведенных через точки A и B. Докажите, что все прямые XY проходят через одну и ту же точку.

Решение. Пусть Q — точка пересечения прямых XY и OP (см. рис. 10.6.1). Докажем, что точка Q является фиксированной (для любого положения точки A). Для этого достаточно доказать, что $\dfrac{OP}{QO} = const$. Выразим это отношение через радиус окружности и произведение отрезков хорд, проходящих через точку P (и то и другое для данной конструкции постоянно).

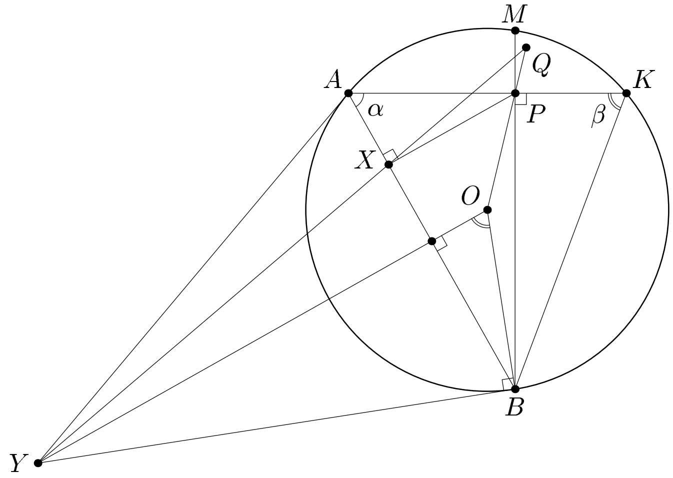

Рис. 10.6.1

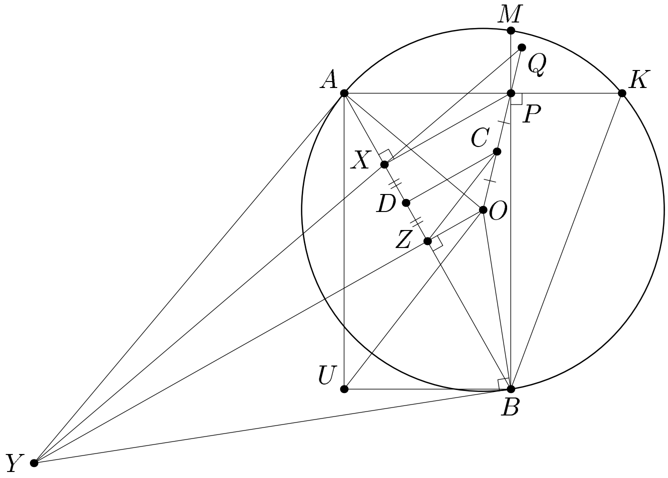

Рис. 10.6.2

Первый способ. В треугольнике APB: $PX = \dfrac{AP \cdot PB}{AB} = AP \cdot \sin\alpha$. Также, $OY = \dfrac{R}{\cos\beta}$. Выразим $\cos\beta$ из треугольника PKB: $\cos\beta = \dfrac{PK}{BK}$. Таким образом, $\dfrac{PX}{OY} = \dfrac{AP \cdot \sin\alpha\cos\beta}{R} = \dfrac{AP \cdot PK \cdot \sin\alpha}{BK \cdot R} = \dfrac{AP \cdot PK}{R} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{BK}$. По следствию из теоремы синусов, $\dfrac{\sin\alpha}{BK} = \dfrac{1}{2R}$, то есть, $\dfrac{PX}{OY} = \dfrac{AP \cdot PK}{2R^2}$.

Второй способ. Так как $OY \perp AB$, то $OY \parallel PX$ и $\dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{PX}{OY}$. Пусть Z — середина AB, C — середина OP, D — середина ZX. Так как треугольники OZB и OBY подобны, $OY \cdot OZ = R^2$. Следовательно, $\dfrac{PX}{OY} = \dfrac{PX \cdot OZ}{R^2} = \dfrac{CD^2 - (OC^2 - ZD^2)}{R^2} = \dfrac{CZ^2 - OC^2}{R^2}$. Пусть U — четвертая вершина прямоугольника $APBU$. Тогда $OP^2 + OU^2 = OA^2 + OB^2$. Значит $CZ^2 = \dfrac{OU^2}{4} = \dfrac{2R^2 - OP^2}{4}$, и $PX \cdot OZ = \dfrac{R^2 - OP^2}{2R^2}$ не зависит от выбора лучей OA, OB. Следовательно, точка Q также не зависит от выбора этих лучей.

Третий способ. Пусть перпендикулярные прямые, проходящие через точку P, пересекают окружность в точках A, B, C и D (см. рис. 10.6.3). Соседние касательные к окружности, проведенные в этих точках, образуют четырехугольник $YY_1Y_2Y_3$. X, X_1, X_2 и X_3 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны четырехугольника $ABCD$. Тогда четырехугольник $XX_1X_2X_3$ описан около окружности с центром в точке P и, согласно задаче №6 из варианта 8 – 9 класса, радиус r этой окружности не зависит от выбора прямых AC и BD. Поскольку $AO \perp YY_1$, $PX \perp AD$ и $\angle OAD = \angle X_1XP$, то $XX_1 \parallel YY_1$.

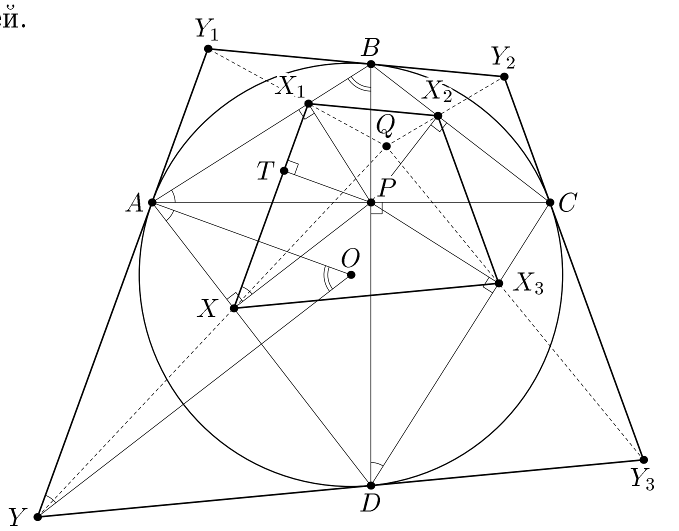

Рис. 10.6.3

Следовательно, стороны четырехугольников $XX_1X_2X_3$ и $YY_1Y_2Y_3$ соответственно параллельны. Из подобия прямоугольных треугольников AOY и TPX получим, что $YA = \dfrac{r}{R}XT$. Аналогично, $Y_1A = \dfrac{r}{R}X_1T$, следовательно, $YY_1 = \dfrac{r}{R}XX_1$. Аналогично, $Y_1Y_2 = \dfrac{r}{R}X_1X_2$, $Y_2Y_3 = \dfrac{r}{R}X_2X_3$ и $YY_3 = \dfrac{r}{R}XX_3$, то есть, четырехугольники $XX_1X_2X_3$ и $YY_1Y_2Y_3$ гомотетичны. При этом центр гомотетии лежит на прямой OP, соединяющей центры окружностей, вписанных в эти четырехугольники и коэффициент гомотетии равен $\dfrac{r}{R}$, следовательно, центр гомотетии является фиксированной точкой, независимо от выбора прямых AC и BD.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, А. Мякишев, Д. Прокопенко, Б. Френкин.