Четвертая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Шестая устная олимпиада по геометрии
г. Москва, 13 апреля 2008 года

Решения задач

8 – 9 класс

1. (*Фольклор, предложил В. Гуровиц*) На доске была нарисована система координат и отмечены точки $A(1;2)$ и $B(3;1)$. Систему координат стерли. Восстановите ее по двум отмеченным точкам.

Решение. Заметим, что треугольник с вершинами в точках $A(1;2)$, $B(3;1)$ и $O(0;0)$ — равнобедренный прямоугольный (см. рисунок 1). Поэтому восстановить начало координат мы сможем построив $\triangle ABO$.

Далее возможны различные способы построения, например:

1) Построим точку C, симметричную точке A относительно B. Ее координаты $(5;0)$ (см. рисунок 1), затем восстанавливаем ось Ox, а затем и перпендикулярную ей ось Oy.

2) Построим точку $(0;2)$. Она будет являться второй точкой пересечения окружности с центром B и радиусом BO и окружности, построенной на отрезке OA как на диаметре. Построив точку $(0;2)$, восстанавливаем ось Oy, а затем и перпендикулярную ей ось Ox.

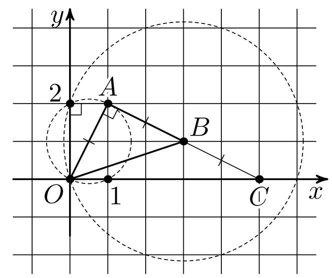


Рис. 1

2. (*Фольклор, предложил А. Мякишев*) В некотором треугольнике биссектрисы двух внутренних углов продолжили до пересечения с описанной окружностью и получили две равные хорды. Верно ли, что треугольник равнобедренный?

Ответ: нет, неверно.

Решение. Рассмотрим неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A = 60°$. Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы углов B и C соответственно (см. рисунок 2).

Заметим, что $\angle C_1AB = \angle C_1CB = \dfrac{\angle C}{2}$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Аналогично, $\angle ACB_1 = \angle ABB_1 = \dfrac{\angle B}{2}$. Тогда $\angle C_1AC = \angle A + \dfrac{\angle C}{2}$ и $\angle BCB_1 = \angle C + \dfrac{\angle B}{2}$, но поскольку $\angle A = 60°$, то $\dfrac{\angle C}{2} + \dfrac{\angle B}{2} = 60° = \angle A$, откуда $\angle C_1AC = \angle BCB_1$, следовательно, $BB_1 = CC_1$.

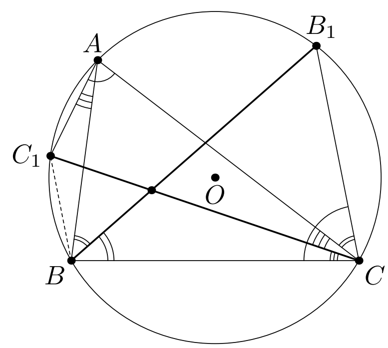


Рис. 2

Отметим, что справедливо следующее утверждение: описанные в условии задачи хорды равны тогда и только тогда, когда $\angle BAC = 60°$ или $AB = AC$.

Действительно, эти хорды равны тогда и только тогда когда углы, на них опирающиеся, равны, или в сумме дают развернутый угол. В первом случае получим равнобедренный треугольник. Во втором случае, поскольку рассуждения, приведенные выше, обратимы, получим, что $\angle BAC = 60°$.

3. (*Киевская олимпиада*) В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ на прямой AF взята точка X так, что угол XCD равен $45°$. Найдите угол FXE.

Ответ: $\angle FXE = 75°$.

Решение. Проведем отрезки AC, AE и CX (см. рисунок 3). Заметим, что $\angle DCA = \angle CAF = 90°$, поскольку главные диагонали правильного шестиугольника являются диаметрами описанной вокруг него окружности.

По условию, $\angle XCD = 45°$, то есть, $\angle ACX = 45°$, следовательно, треугольник AXC — прямоугольный равнобедренный и $AX = AC$. Кроме того, в правильном шестиугольнике равны диагонали AC и AE, откуда $AE = AX$, то есть, треугольник AEX — равнобедренный.

Поскольку $\angle EAX = 30^\circ$, то $\angle AXE = \angle AEX = \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

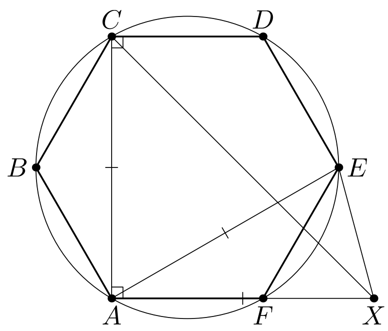


Рис. 3

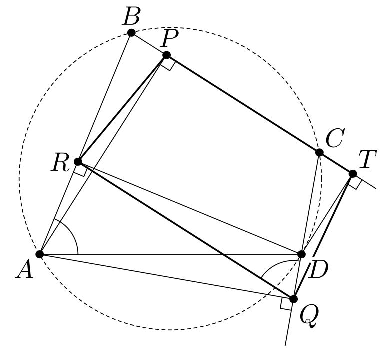


Рис. 4

4. (*А. Мякишев*) Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BC, Q — из A на DC, R — из D на AB и T — из D на BC. Докажите, что точки P, Q, R и T лежат на одной окружности.

Решение. Докажем, что $RPTQ$ — равнобокая трапеция, и следовательно, вокруг нее можно описать окружность. Четырехугольник $ARDQ$ — вписанный, поэтому $\angle RQD = \angle DAR$. Также, поскольку четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle BCD = 180^\circ - \angle DAR$. Следовательно, $\angle RQD + \angle BCD = 180^\circ$, то есть, прямые PT и RQ параллельны.

Докажем теперь, что в трапеции $RPTQ$ диагонали равны. Четырехугольник $APCQ$ вписан в окружность с диаметром AC, поэтому по следствию из теоремы синусов получим, что $PQ = AC \sin\angle BAD$. Аналогично, из вписанного четырехугольника $RBTD$ получим, что $RT = BD \sin\angle ABC$. Также, из вписанного четырехугольника $ABCD$ получим, что $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = \dfrac{BD}{\sin\angle BAD} = 2R$. Следовательно, $PQ = RT$.

5. (*А. Заславский*) Восстановите остроугольный треугольник по ортоцентру и серединам двух сторон.

Решение. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB, H — его ортоцентр.

На прямой B_1C_1 отметим точки B' и C' так, что $B_1C_1 = C_1B' = B_1C'$ (см. рисунок 5а). Тогда $B_1B'BC$ и C_1BCC' — параллелограммы. Кроме того, $\angle B'BH = \angle C'CH = 90^\circ$. Следовательно, точка B лежит на окружности w_1, построенной на отрезке $B'H$ как на диаметре, и точка C лежит на окружности w_2, построенной на отрезке $C'H$ как на диаметре.

Далее возможны два способа построения.

Первый способ. Пусть w_1' — окружность, симметричная w_1 относительно C_1, w_2' — окружность, симметричная w_2 относительно B_1. Поскольку B_1 и C_1 — середины отрезков AC и BC, то окружности w_1' и w_2' проходят через точку A. Дальнейшее построение очевидно.

Второй способ. Точки B_2 и C_2 симметричны H относительно точек B_1 и C_1 (см. рисунок 5б). Поскольку AC_2BH — параллелограмм, то $\angle ABC_2 = \angle BAH$. С другой стороны, $\angle BAH + \angle ABC = 90^\circ$ (как углы прямоугольного треугольника), следовательно, $\angle ABC_2 + \angle ABC = 90^\circ$, то есть, точка C_2 — принадлежит описанной окружности треугольника ABC и диаметрально противоположна точке C. Аналогично доказывается, что точка B_2 также принадлежит описанной окружности треугольника ABC и диаметрально противоположна точке B. Поскольку B_1C_1 — средняя линия треугольника ABC, то $B_1C_1 || BC$, следовательно, $C_2B \perp B_1C_1$. Аналогично, $B_2C \perp B_1C_1$. Следовательно, точка B — точка пересечения w_1 и перпендикуляра, опущенного из точки C_2 на отрезок $B'C'$. Аналогично, точка C — точка пересечения w_2 и перпендикуляра, опущенного из точки B_2 на отрезок $B'C'$.

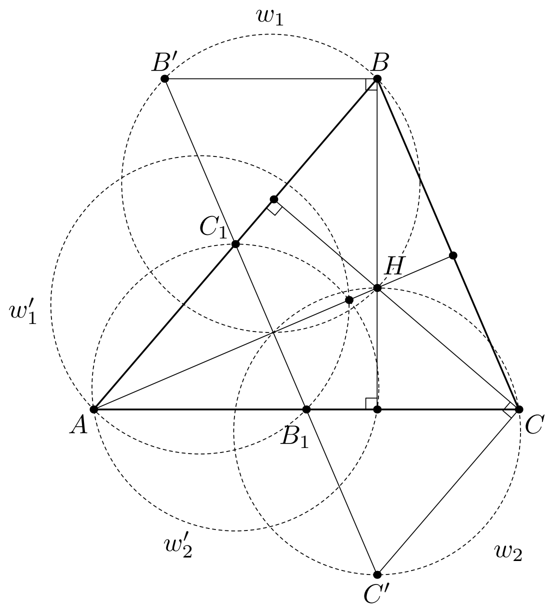


Рис. 5а

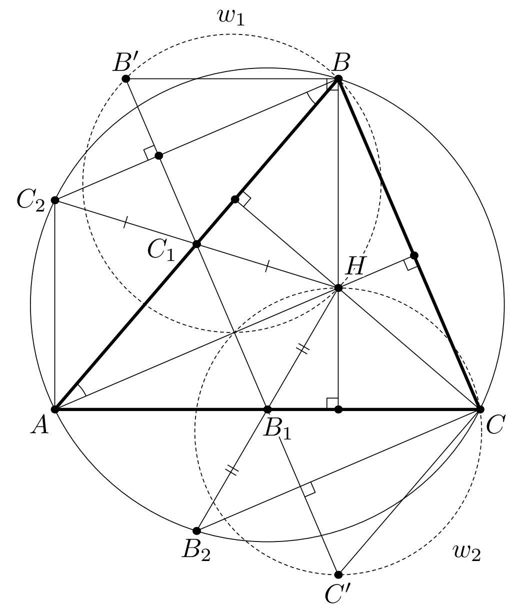


Рис. 5б

6. (*А. Заславский*) Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Назовем «высотой» такого шестиугольника отрезок с концами на прямых, содержащих противолежащие стороны и перпендикулярный им. Докажите, что вокруг этого шестиугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда его «высоты» можно параллельно перенести так, чтобы они образовали треугольник.

Решение. Пусть из отрезков, перпендикулярных сторонам шестиугольника $ABCDEF$ можно составить треугольник. Тогда этот треугольник равен треугольнику AA_1A_2, где A_1 и A_2 — проекции точки A на прямые CD и DE соответственно (см. рисунок 6а). Тогда четырехугольник AA_1DA_2 — вписанный и диаметр описанной около треугольника AA_1A_2 окружности равен AD. Аналогично получаем, что две другие главные диагонали шестиугольника равны этому диаметру, то есть $AD = BE = CF$. Следовательно, AB и DE являются основаниями равнобокой трапеции и, поэтому имеют общий серединный перпендикуляр. Этот серединный перпендикуляр совпадает с биссектрисой угла между прямыми AD и BE, то есть проходит через центр O окружности, вписанной в треугольник, образованный главными диагоналями. Серединные перпендикуляры к остальным сторонам шестиугольника также проходят через точку O, следовательно вокруг шестиугольника $ABCDEF$ можно описать окружность.

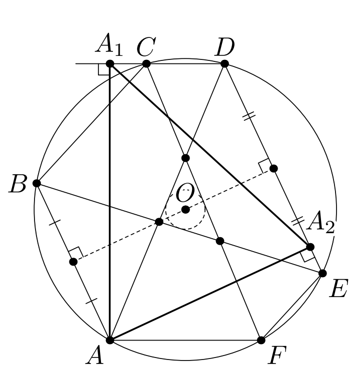


Рис. 6а

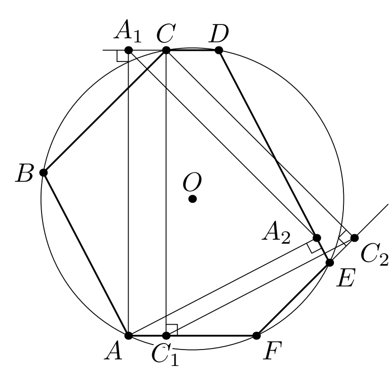


Рис. 6б

Пусть теперь $ABCDEF$ — вписанный шестиугольник (см. рисунок 6б). Вновь рассматривая вписанный четырехугольник AA_1DA_2, получаем $\angle DA_1A_2 = \angle DAA_2 = 90^\circ - \angle DAB = \angle BCD - 90^\circ$, то есть, $A_1A_2 \perp BC$. Опустим перпендикуляры CC_1 и CC_2 на прямые FE и AF соответственно. Тогда, рассуждая аналогично, получим, что $C_1C_2 \perp DE$.

Таким образом, у треугольников AA_1A_2 и CC_1C_2 соответствующие стороны параллельны друг другу и $AA_1 = CC_1$, следовательно, эти треугольники равны. Следовательно, отрезок A_1A_2 равен третьей «высоте» шестиугольника.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, В. Гуровиц, А. Заславский, А. Мякишев.

Четвертая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Шестая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 13 апреля 2008 года

Решения задач

10 – 11 класс

1. (*Д. Шноль*) Каждый из двух подобных треугольников разрезали на два треугольника так, что одна из получившихся частей одного треугольника подобна одной из частей другого треугольника. Верно ли, что оставшиеся части также подобны?

Ответ: нет, не верно.

Решение. Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ и они не являются равнобедренными. Возьмем на сторонах AB и $B'C'$ точки M и M' соответственно, так, чтобы $\angle BCM = \angle B'A'M'$. Тогда $\triangle BCM \sim \triangle B'A'M'$ по двум углам. Оставшиеся треугольники подобными быть не могут, так как $\angle MCA < \angle M'C'A'$ и по условию $\angle M'C'A' \neq \angle MAC$.

Заметим, что в качестве точек M и M' можно взять основания высот.

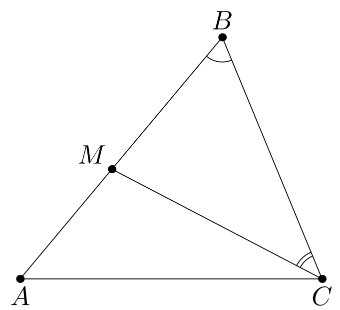


Рис. 1а

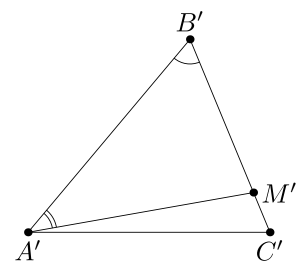


Рис. 1б

2. (*Фольклор, предложил А. Мякишев*) Даны радиусы r и R двух непересекающихся окружностей. Общие внутренние касательные этих окружностей перпендикулярны. Найти площадь треугольника, ограниченного этими касательными, а также общей внешней касательной.

Ответ: rR.

Решение. Докажем сначала два вспомогательных утверждения.

1) Пусть вневписанная окружность касается стороны $BC = a$ треугольника ABC (см. рисунок 2а), тогда $S_{\triangle ABC} = (p-a)r_a$, где p — полупериметр треугольника, а r_a — радиус этой окружности.

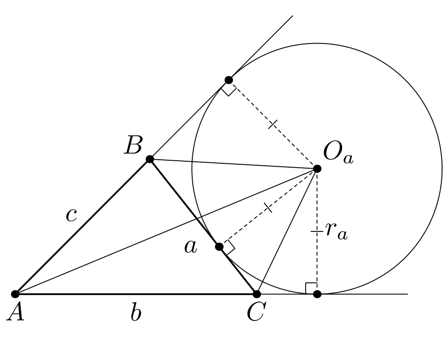


Рис. 2а

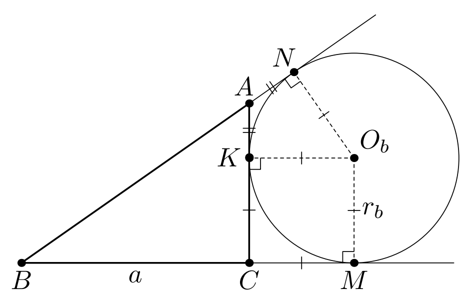


Рис. 2б

Действительно, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO_a} + S_{\triangle ACO_a} - S_{\triangle BCO_a} = \dfrac{cr_a}{2} + \dfrac{br_a}{2} - \dfrac{ar_a}{2} = (p-a)r_a$.

2) Пусть вневписанная окружность касается катета AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C (см. рисунок 2б), тогда $r_b = p - a$, где $BC = a$, а p — полупериметр треугольника.

Пусть M, N и K — точки касания рассматриваемой вневписанной окружности с прямыми BC, AB и AC. Тогда, по свойству равенства касательных к окружности, проведенных из одной точки, $CM = CK$, $AN = AK$, откуда $BN = BM = p$ и $r_b = BM - BC = p - a$.

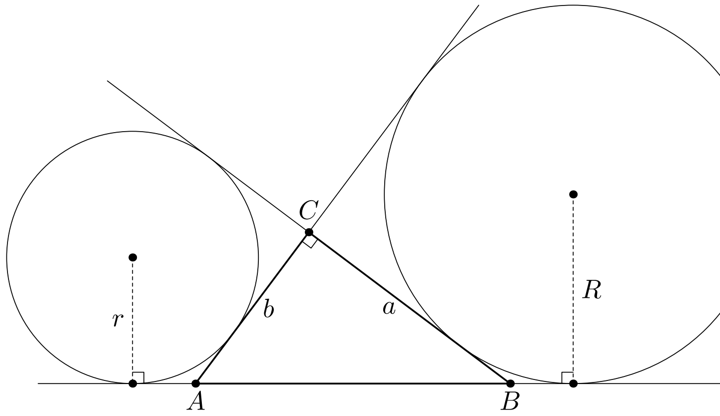


Рис. 2в

Найдем теперь искомую площадь $S_{\triangle ABC} = S$ (см. рисунок 2в). В силу первой леммы, $S = (p-a)R$ и $S = (p-b)r$. Перемножив эти равенства, получим, что $S^2 = Rr(p-a)(p-b)$. Но, согласно второй лемме, $p-a = r$ и $p-b = R$. Поэтому $S^2 = (Rr)^2$, то есть, $S = Rr$.

3. (*М. Волчкевич*) Дан четырехугольник $ABCD$. A', B', C' и D' — середины сторон BC, CD, DA и AB соответственно. Известно, что $AA' = CC'$, $BB' = DD'$. Верно ли, что $ABCD$ параллелограмм?

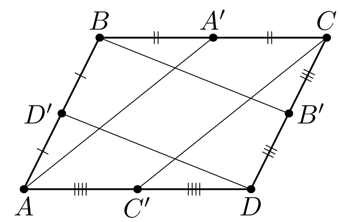


Рис. 3

Ответ: да, верно.

Решение. Так как точки A', B', C' и D' являются серединами сторон, то $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$, $\overrightarrow{BB'} = \dfrac{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}}{2}$, $\overrightarrow{CC'} = \dfrac{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}}{2}$, $\overrightarrow{DD'} = \dfrac{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}}{2}$. Складывая векторные равенства, получим, что $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{0}$. То есть, данные отрезки можно параллельно перенести так, чтобы образовался четырехугольник. Поскольку $AA' = CC'$, а $BB' = DD'$, то полученный четырехугольник является параллелограммом. Следовательно, прямые AA' и CC' параллельны и четырехугольник $AA'CC'$ — параллелограмм, откуда следует, что отрезки AC' и CA' параллельны и равны. Но тогда стороны BC и AD параллельны и равны, то есть, $ABCD$ — параллелограмм.

Отметим, что равенство $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{0}$ *можно использовать иначе. Перенесем два слагаемых в правую часть и возведем обе части полученного равенства в квадрат:*

$$(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'})^2 = (-\overrightarrow{CC'} - \overrightarrow{DD'})^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (AA')^2 + (BB')^2 + 2\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BB'} = (CC')^2 + (DD')^2 + 2\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{DD'}.$$

То есть, угол между векторами $\overrightarrow{AA'}$ *и* $\overrightarrow{BB'}$ *равен углу между векторами* $\overrightarrow{CC'}$ *и* $\overrightarrow{DD'}$. *Рассуждая аналогично, получим, что угол между векторами* $\overrightarrow{AA'}$ *и* $\overrightarrow{DD'}$ *равен углу между векторами* $\overrightarrow{BB'}$ *и* $\overrightarrow{CC'}$. *Следовательно, отрезки* AA' *и* CC' *параллельны и равны.*

4. (*В. Протасов*) В треугольнике ABC угол A равен 120°. Докажите, что расстояние от центра описанной окружности до ортоцентра равно $AB + AC$.

Решение. *Первый способ.* Утверждение задачи вытекает из следующих фактов:

Лемма 1. На окружности описанной около равностороннего треугольника взята произвольная точка. Тогда сумма расстояний от нее до двух вершин треугольника равна третьему.

Доказательство. Пусть ABC — равносторонний треугольник, а D — точка на его описанной окружности. Не теряя общности, можно считать, что D лежит на дуге BC, не содержащей точку A. Тогда, по теореме Птолемея для четырехугольника $ABDC$: $AC \cdot BD + AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Учитывая равенство сторон, получим, что $BD + CD = AD$.

Также можно использовать поворот вокруг центра окружности на угол 120°.

Лемма 2. В треугольнике с углом 60° расстояние от вершины этого угла до ортоцентра равно радиусу описанной окружности.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, $\angle A = 60^\circ$, C_1 и B_1 — основания высот, проведенных к сторонам AB и AC соответственно, H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда $\triangle AB_1C_1$ подобен $\triangle ABC$ с коэффициентом подобия $\cos\angle A = \dfrac{1}{2}$. Учитывая, что отношение радиусов окружностей подобных треугольников равно коэффициенту подобия и то, что AH — диаметр окружности, описанной около треугольника AB_1C_1, получаем требуемое.

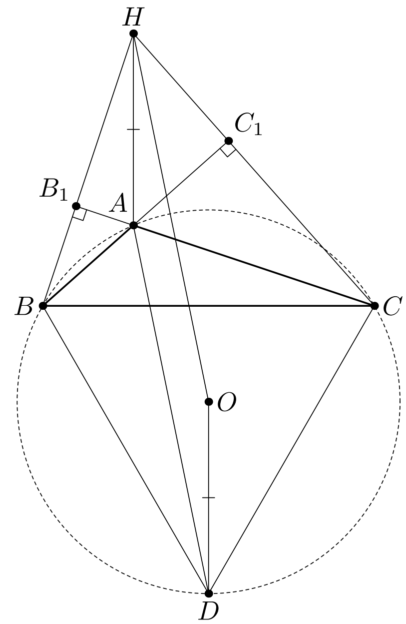
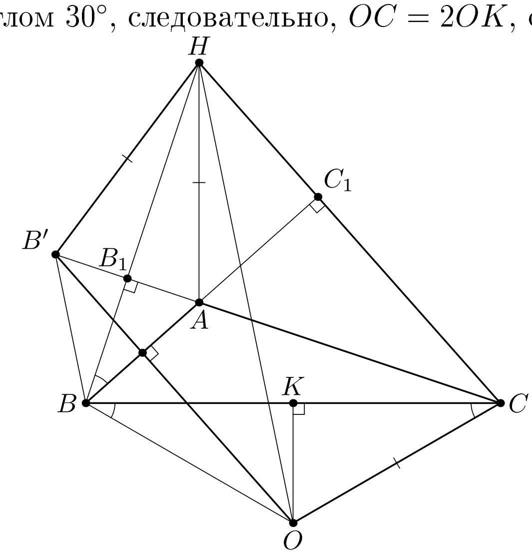


Рис. 4

Перейдем к доказательству исходного утверждения. Пусть C_1 и B_1 — основания высот треугольника ABC, проведенных к сторонам AB и AC соответственно, H — ортоцентр треугольника ABC, O — центр описанной окружности. Пусть D — середина большей из дуг BC окружности. Тогда треугольник BDC — равносторонний и по лемме 1, $AD = AB + AC$. Таким образом, теперь достаточно доказать, что $OH = AD$. Докажем, что $ODAH$ — параллелограмм. Действительно, прямые OD и AH — параллельны как перпендикуляры к BC. Кроме того, по лемме 2, $AH = OD$. Итак, $OH = AD$ как противолежащие стороны параллелограмма, откуда следует утверждение задачи.

Второй способ. На продолжении стороны AC за точку A отложим отрезок AB', равный отрезку AB. Докажем, что $OH = AB$. Для этого достаточно показать, что $OB'HC$ — равнобокая трапеция. Заметим, что $\triangle AB'B$ — равносторонний, тогда $OB' \perp AB$, поскольку точки O и B' лежат на серединном перпендикуляре к AB. Таким образом, $OB' \perp AB$ и $HC \perp AB$, следовательно, $OB' || HC$.

Так как BB_1 — высота в равностороннем треугольнике $AB'B$, то BB_1, а следовательно, и HB — серединный перпендикуляр к отрезку AB', то есть, $HB' = HA$. Пусть K — середина отрезка BC, тогда $HA = 2OK$ (в треугольнике расстояние от ортоцентра до вершины в два раза больше расстояния от центра описанной окружности до противолежащей этой вершине стороны). Поскольку $\angle BOC = 120^\circ$, то $\angle KCO = 30^\circ$, то есть, $\triangle KCO$ — прямоугольный с углом 30°, следовательно, $OC = 2OK$, откуда $OC = HB'$.



5. (*С. Маркелов*). Есть два платка: один в форме квадрата, другой — в форме правильного треугольника, причем их периметры одинаковы. Существует ли многогранник, который можно полностью оклеить этими двумя платками без наложений (платки можно сгибать, но нельзя резать)?

Ответ: да, существует.

Решение. На рисунках 5а и 5б пунктиром отмечены линии сгиба и соответствующими буквами обозначены точки, которые совместятся при склейке. На рисунке 5в и 5г изображен эскиз сложенных фигур. Треугольник сложен так, что точки G, D и E поднялись над плоскостью, то есть AG, AD и AE — это «хребты», а AF и AH — «впадины». Квадрат сложен так, над плоскостью поднялись точки D, E, F, G и H. Сложенный таким образом треугольник «положим сверху» на сложенный квадрат, совмещая соответствующие точки. На рисунке 5д приведен вид сверху получившегося многогранника.

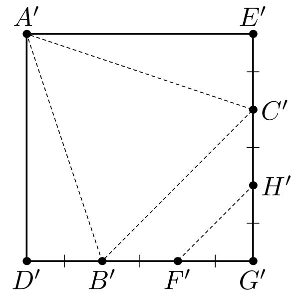


Рис. 5а

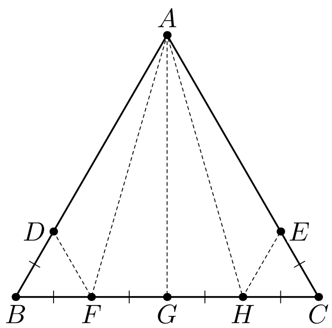


Рис. 5б

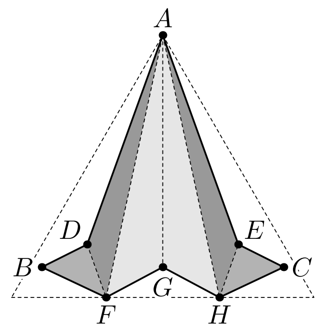


Рис. 5в

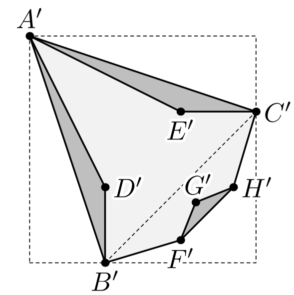


Рис. 5г

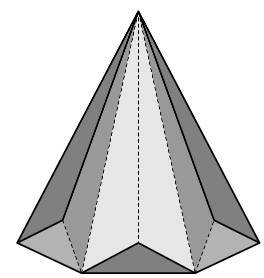


Рис. 5д

6. (*А. Заславский*) Дан треугольник ABC и точки P и Q. Известно, что треугольники, образованные проекциями P и Q на стороны ABC, подобны (соответствуют друг другу вершины, лежащие на одних и тех же сторонах исходного треугольника). Докажите, что прямая PQ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Сформулируем три вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Треугольник, образованный проекциями любой точки P на стороны треугольника ABC, подобен треугольнику, образованному вторыми точками пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью ABC.

Доказательство. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции P на BC, CA, AB; A_2, B_2, C_2 — вторые точки пересечения AP, BP, CP с описанной окружностью (см. рисунок 6а). Так как четырехугольник PA_1BC_1 вписанный, ориентированные углы PC_1A_1 и PBA_1 равны. Аналогично равны углы B_1C_1P и B_1AP. Тогда, из четырехугольника $APBC$ получим, что $\angle B_1C_1A_1 = \angle BPA - \angle BCA$. Но угол BPA равен полусумме дуг (ориентированных) BA и B_2A_2, то есть, соответствующие углы треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

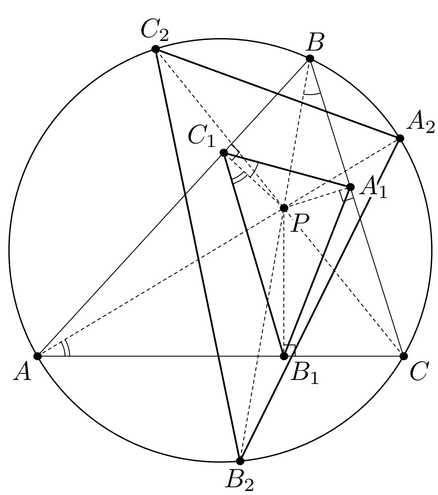


Рис. 6а

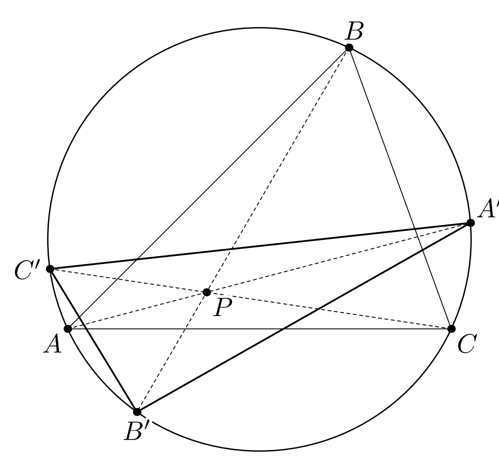


Рис. 6б

Лемма 2. В окружность вписан треугольник ABC. Пусть вписанный в ту же окружность треугольник $A'B'C'$ вращается вокруг ее центра O. Тогда существует единственное его положение, при котором прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке P (см. рисунок 6б).

Доказательство. Из доказательства предыдущей леммы следует, что, если прямые пересекаются в одной точке, то углы между прямыми AP, BP, CP равны полусуммам соответствующих дуг или суммам соответствующих углов треугольников ABC и $A'B'C'$, например, $\angle BPA = \angle BCA + \angle B'C'A'$.Так как данные углы фиксированы, то эти условия точку P определяют однозначно.

Лемма 3. Пусть $A"B"C"$ — треугольник, симметричный полученному в предыдущем пункте треугольнику $A'B'C'$ относительно прямой OP. Тогда прямые $AA"$, $BB"$ и $CC"$ пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим угол между хордами окружности, проходящими через P. В силу симметрии, $\angle APA" = \smile AA" = \angle AOA"$. Следовательно, точки $A"$, O, P и A лежат на одной окружности. Тогда по свойству вписанных углов и равнобедренного треугольника, получим, что $\angle A"PO = \angle A"AO = \angle OA"A$. Пусть $AA"$ пересекает OP в точке P'. Тогда, в силу симметричности точек A', $A"$; углы $A'OP$ и $A"OP'$ равны и углы OPA' и $OPA"$ также равны, что, в свою очередь, по доказанному, означает равенство углов OPA' и $OA"P'$. Следовательно, треугольники OPA' и $OA"P'$ подобны, т.е. $OP' = \dfrac{OA^2}{OP}$. Заметим, что положение точки P' зависит только от расположения точки P и радиуса окружности. (*Вообще говоря, P и P' инверсны относительно данной окружности*). Поэтому прямые $BB"$ и $CC"$ также проходят через P'.

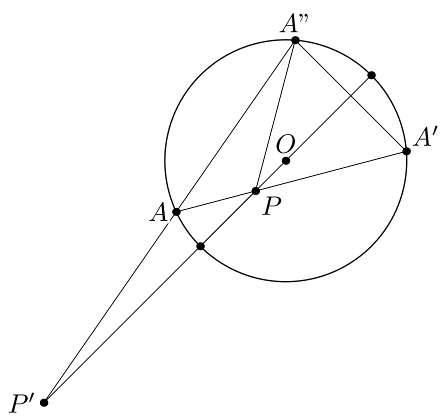


Рис. 6в

Заметим, что в процессе доказательства леммы 3 была доказана теорема о симметричной бабочке: Дана точка A на диаметре BC полуокружности w. Точки X и Y на w таковы, что $\angle XAB = \angle YAC$. Тогда прямые XY проходят через одну точку или параллельны.

Отметим, что эту теорему можно доказать, используя инверсию, или тот факт, что точка пересечения противоположных сторон вписанного четырехугольника лежит на поляре точки пересечения его диагоналей.

Докажем теперь утверждение задачи. Из леммы 1 следует, что треугольники образованные вторыми точками пересечения прямых AP, BP, CP и AQ, BQ, CQ с описанной окружностью, равны, так как они подобны и вписаны в одну окружность. Одинаково ориентированными они быть не могут, так как их можно было бы перевести друг в друга поворотом, что противоречит лемме 2. То есть, они ориентированы по-разному и вписаны в одну и ту же окружность, а значит симметричны относительно некоторой прямой, проходящей через центр описанной окружности. По лемме 3 эта прямая проходит также через точки P, Q.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, М. Волчкевич, А. Горская, А. Заславский, С. Маркелов, А. Мякишев, В. Протасов, Д. Шноль.