Шестая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Восьмая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 11 апреля 2010 года

Решения задач

8 – 9 класс

1. (*Фольклор*) Два равносторонних треугольника ABC и CDE имеют общую вершину (см.рис). Найдите угол между прямыми AD и BE.

Ответ: 60°.

Решение. *Первый способ.* Пусть P — точка пересечения AD и BE (см. рис. 1а). Заметим, что $\triangle ACD = \triangle BCE$(по двум сторонам и углу между ними), откуда следует, что $\angle DAC = \angle EBC$. Тогда $\angle APB = 180^\circ - (\angle PAB + \angle PBA) = 180^\circ - (\angle CAB + \angle CBA) = 60^\circ$.

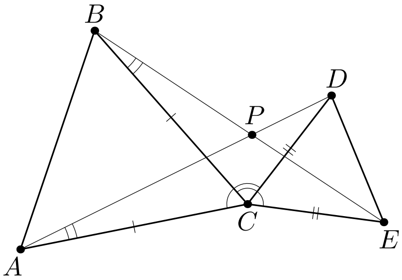

Рис. 1а

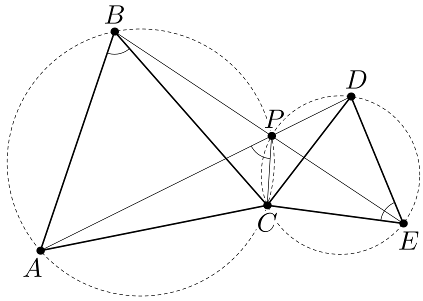

Рис. 1б

Второй способ. При повороте с центром C и углом 60° точка B переходит в A, E — в D, то есть образом прямой BE является прямая AD и угол между ними равен 60°.

Третий способ. Пусть P — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников ABC и CDE (см. рис. 1б). Тогда $\angle APC = \angle ABC = 60^\circ$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу) и $\angle DPC = 180^\circ - \angle DEC = 120^\circ$ (как вписанные, опирающиеся на дополняющие друг друга до окружности дуги). То есть точки A, P и D лежат на одной прямой. Аналогично для точек B, P и E. Тогда искомый $\angle APB = \angle ACB = 60^\circ$(как вписанные, опирающиеся на одну дугу).

2. (*Н. Андреев*) Дан квадратный лист бумаги со стороной 1. Отмерьте на этом листе расстояние 5/6 (лист можно сгибать, в том числе, по любому отрезку с концами на краях бумаги и разгибать обратно; после разгибания на бумаге остается след от линии сгиба).

Решение. *Первый способ.* Пусть дан квадрат $ABCD$ (см. рис. 2а). Разделим его стороны AB и BC на две равные части. Для этого согнем его так, чтобы точка A совпала с точкой B, а затем так, чтобы точка B совпала с точкой C. Сгибая квадрат по отрезкам CM и AK (медианам треугольника ABC), построим L — точку пересечения его медиан. Затем согнем квадрат так, чтобы точка L попала на сторону AB и при этом образ B' точки B попал на отрезок BC. Обозначим линию сгиба NN'. Тогда, поскольку $ML = \frac{1}{3}MC$, то по теореме Фалеса $BB' = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}$, следовательно, $BN = B'N = \frac{1}{6}$ и $NC = \frac{5}{6}$.

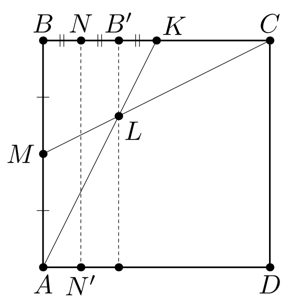

Рис. 2а

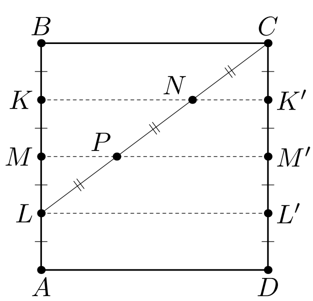

Рис. 2б

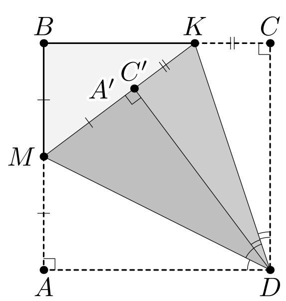

Рис. 2в

Второй способ. Пусть дан квадрат $ABCD$. Разделим его стороны AB и CD на четыре равные части. Для этого согнем его так, чтобы точка A совпала с точкой B, а точка C с точкой D, а затем аналогичным образом еще раз. Пусть KK', MM' и LL' — следы от сгибов (см. рис. 2б), $AL = LM = MK = BK = \frac{1}{4}$, аналогично для отрезков на стороне CD. Согнем квадрат по отрезку CL (диагонали прямоугольника $LBCL'$) и обозначим точки пересечения сгиба с отрезками KK' и MM' через N и P. Тогда по теореме Фалеса $LP = PN = NC$. По теореме Пифагора $CL^2 = BL^2+BC^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2+1$, следовательно, $CL = \frac{5}{4}$, тогда $CP = \frac{2}{3}CL = \frac{5}{6}$.

Третий способ. Пусть дан квадрат $ABCD$. Построим отрезок $MK = \frac{5}{6}$ так, чтобы точки M и K лежали на сторонах AB и BC соответственно. Для этого достаточно построить точку M — середину AB и точку K на стороне BC так, чтобы $BK : KC = 2 : 1$. Тогда по теореме Пифагора MK — отрезок нужной длины. Согнув лист так, чтобы A совпала с B, а C — с D, получим точку M. Перегнем лист по отрезку DM и совместим точку C и образ точки A (см. рис. 2в). Тогда получим точку K как пересечение линии сгиба с отрезком BC. Обозначив $BK = x$ по теореме Пифагора получим: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{1}{2} + 1 - x\right)^2$, то есть $x = \frac{2}{3}$.

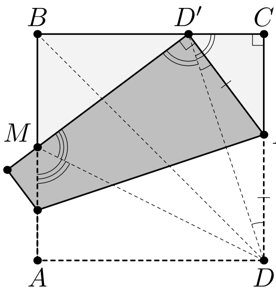

Рис. 2г

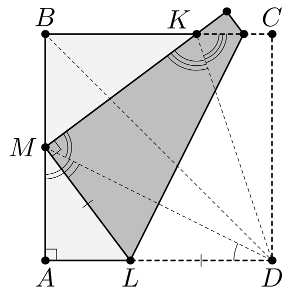

Рис. 2д

Отметим, что во всех способах мы фактически использовали то, что сгибая и разгибая бумагу, можно проводить отрезки с концами на ее сторонах. Однако, построение можно осуществить и без этого.

Например, в третьем способе решения, после того, как мы построили M — середину AB — можно было поступить иначе.

Четвертый способ. Согнем квадрат так, чтобы отрезок AD проходил через точку M, а вершина D попала на сторону BC (см. рис. 2г). Пусть D' — образ точки D. Докажем, что $BD' = \frac{2}{3}$. Для этого достаточно доказать, что квадрат можно перегнуть по отрезкам $D'D$ и DM так, что точки A и C совпадут. То есть нужно доказать, что $D'D$ и MD — биссектрисы углов $MD'C$ и $D'MA$ (см. рис. 2в). Поскольку $D'L = DL$, то $\angle LD'D = \angle LDD'$, тогда $\angle D'LC = 2\angle LD'D$ и $\angle LD'C = 90^\circ - 2\angle LD'D$. Следовательно, $\angle DD'C = 90^\circ - \angle LD'D = \angle DD'M$. То есть DD' — биссектриса угла $MD'C$. Поскольку BD — биссектриса угла B, то D — центр вневписанной окружности треугольника MBD', то есть MD — биссектриса угла $D'MA$.

Пятый способ. Согнем квадрат так, чтобы вершина D совпала с точкой M (см. рис. 2д). Пусть K — точка пересечения DC и BC. Аналогично предыдущему рассуждению, можно доказать, что $BK = \frac{2}{3}$.

3. (*Д. Швецов*) Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. К ним через точку A проводятся касательные l_1 и l_2 (соответственно). Перпендикуляры, опущенные из точки B на l_2 и l_1, вторично пересекают окружности ω_1 и ω_2 соответственно в точках K и N. Докажите, что точки K, A и N лежат на одной прямой.

Решение. Пусть M и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки B (см. рис. 3). Тогда, воспользовавшись свойством угла между касательной и хордой, получим, что $\angle MAB = \angle ANB$, а $\angle LAB = \angle AKB$. Учитывая, что $\angle MAK = 90^\circ - \angle AKB$, а $\angle NAL = 90^\circ - \angle ANB$, получим, что $\angle KAN = \angle KAM + \angle BAM + \angle BAL + \angle NAL = 180^\circ$, то есть точки K, A и N лежат на одной прямой.

Случай, когда точки K и N лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB, рассматривается аналогично.

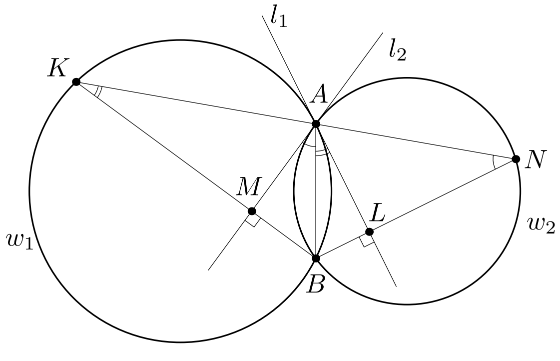

Рис. 3

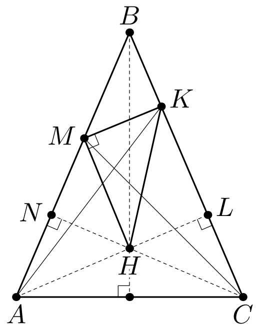

Рис. 4

4. (*М. Волчкевич*) Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. H — точка пересечения высот. На сторонах AB и BC выбраны точки M и K соответственно так, что $\angle KMH = 90^\circ$. Докажите, что из отрезков AK, CM и MK можно сложить прямоугольный треугольник.

Решение. *Первый способ.* Заметим, что достаточно доказать равенство $MK^2 = AK^2 - CM^2$ (см. рис. 4). Учитывая условие $MK^2 = KH^2 - MH^2$, докажем, что $KH^2 - MH^2 = AK^2 - CM^2$. Но последнее равенство равносильно равенству $CM^2 - MH^2 = AK^2 - KH^2$. Используя, что разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций, получим, что $CM^2 - MH^2 = CN^2 - HN^2$, а $AK^2 - KH^2 = AL^2 - HL^2$, где N и L — основания высот проведенных из точек C и A соответственно. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то $AL = CN$ и $HL = HN$, откуда следует искомое равенство.

Второй способ. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK}$ и $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HM}$. Тогда, учитывая равенства $\left|\overrightarrow{AH}\right| = \left|\overrightarrow{CH}\right|$ и $MK^2 = KH^2 - HM^2$, получим, что $\overrightarrow{AK}^2 - \overrightarrow{CM}^2 = 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK} - 2\overrightarrow{CH} \times \overrightarrow{HM} + MK^2$. Теперь достаточно доказать, что $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK} - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$.

Действительно, так как $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}$, то $\overrightarrow{AH} \cdot \left(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CK}\right) - \overrightarrow{CH} \times \left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HA} = 0$.

5. (*Ю. Блинков*) На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M соответственно, а на диагонали AC — точка L так, что $ML = KL$. Пусть P — точка пересечения отрезков MK и BD. Найдите угол KPL.

Ответ: 45° или 135°.

Решение. *Первый способ.* Пусть O — точка пересечения AC и BD; N — середина отрезка MK (см. рис. 5а). Так как середина отрезка с концами на параллельных прямых лежит на прямой, равноудаленной от них, то $ON \parallel AK$ и $\angle AON = 45^\circ$. С другой стороны, так как $LN \perp MK$, то точки L, O, N и P лежат на одной окружности, то есть $\angle LPN = 180^\circ - \angle LON = \angle AON = 45^\circ$.

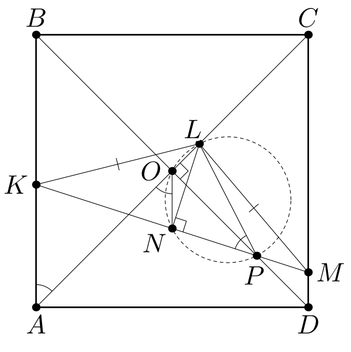

Рис. 5а

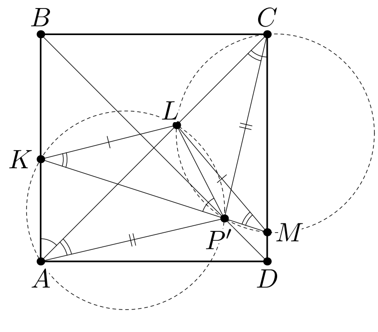

Рис. 5б

Второй способ. Пусть P' — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AKL и CML (см. рис. 5б). Докажем, что $P' \equiv P$. Для этого достаточно доказать, что: 1) точки K, P' и M лежат на одной прямой; 2) P' лежит на диагонали BD.

Первое утверждение следует из того, что $\angle KP'L = \angle KAL = 45^\circ$ и $\angle LP'M = 180^\circ - \angle LCM = 135^\circ$.

Докажем второе утверждение. Из равенства LK и LM следует, что $\angle LKP' = \angle LMP'$, тогда по свойству вписанных углов $\angle LAP' = \angle LKP' = \angle LMP' = \angle LCP'$, то есть точка P' равноудалена от точек A и C, а значит лежит на диагонали BD. Следовательно, $\angle KPL = \angle KAL = 45°$.

Третий способ. Пусть S — точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку KM и прямой AB, а N — точка пересечения отрезков SM и AD (см. рис. 5в). Тогда L лежит на биссектрисах углов BAN и ASN, то есть является центром вневписанной окружности треугольника ANS, а значит лежит на биссектрисе угла ANM. С другой стороны, из равенства углов SKM и SMK равнобедренного треугольника SKM и параллельности прямых AB и CD следует, что MK — биссектриса угла NMC. То есть, NL и MK — биссектрисы внешних углов треугольника DMN и точка их пересечения является центром его вневписанной окружности, а значит лежит на диагонали BD и совпадает с точкой P. Тогда искомый угол равен углу MPN (угол между биссектрисами внешних углов) и равен $45°$.

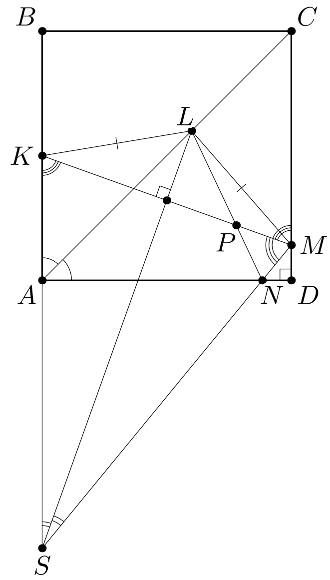

Рис. 5в

В случае, если точка P лежит на отрезке BO, аналогичные рассуждения приводят к ответу $135°$.

6. (*Д. Прокопенко*) Серединные перпендикуляры к сторонам BC и AC остроугольного треугольника ABC пересекают прямые AC и BC в точках M и N. Пусть точка C движется по описанной окружности треугольника ABC, оставаясь в одной полуплоскости относительно AB (при этом точки A и B неподвижны). Докажите, что прямая MN касается фиксированной окружности.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 6). Докажем, что точки A, O, N, B и M лежат на одной окружности ω. Рассмотрим четырехугольник $AOBN$: $\angle OAB = 90° - \angle ACB$, $\angle ONB = 90° + \angle ACB$ (как внешний угол треугольника CKN). Тогда $\angle OAB + \angle ONB = 180°$. Следовательно, точки A, B, O и N лежат на некоторой окружности ω. Аналогично можно показать, что четырехугольник $AOBM$ тоже вписанный, то есть точка M лежит на окружности ω. Следовательно, точки A, O, N, B и M лежат на окружности ω.

Поскольку точки A, B, O фиксированы, то окружность ω — фиксирована. Кроме того, $\angle MON = 180° - \angle ACB = const$. Следовательно, длина хорды MN окружности ω постоянна и не зависит от положения точки C. Все такие хорды находятся на одном расстоянии от центра P окружности ω, а значит касаются некоторой окружности ω_0 с центром P.

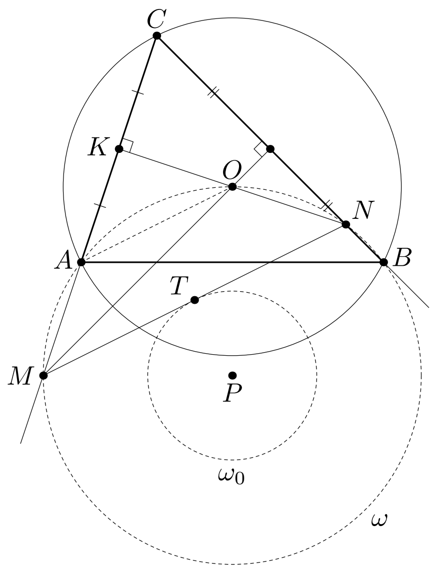

Рис. 6

Отметим, что точка P является серединой отрезка, соединяющего центр описанной окружности и точку пересечения касательных к описанной окружности, проведенных из вершин A и B, а радиус полученной окружности вдвое меньше радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

Материалы подготовили: Н. Андреев, А. Блинков, Ю. Блинков, М. Волчкевич, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников, А. Мякишев, Д. Прокопенко, Б. Френкин, Д. Швецов.

Шестая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Восьмая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 11 апреля 2010 года

Решения задач

10 – 11 класс

1. (*Б. Френкин*) Выпуклый n-угольник P, где $n > 3$, разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Каковы возможные значения n, если n-угольник вписанный?

Ответ: 4.

Решение. *Первый способ.* Рассмотрим треугольники разбиения ABC и ACD, примыкающие к диагонали AC. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный, поэтому $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Так как треугольники ABC и ACD равны, то $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, то есть AC — диаметр описанной окружности.

Если какой-то из отрезков AB, BC, CD, AD является диагональю разбиения n-угольника, то аналогично получаем, что это диаметр. Тогда через вершину A или C проходит более одного диаметра, что невозможно. Значит, все эти отрезки — стороны n-угольника, откуда $n = 4$. Этот случай возможен, например для прямоугольника.

Второй способ. Если центр описанной окружности O не принадлежит P, то нельзя разрезать P на равные треугольники. Действительно, ближайшая к O сторона, как нетрудно видеть, больше всех остальных, но во всех треугольниках разбиения должны быть равные ей стороны — противоречие.

Если же O принадлежит P, то O либо содержится в остроугольном треугольнике разбиения, либо лежит на границе двух прямоугольных. Остальные треугольники разбиения должны быть тупоугольными. Но все треугольники разбиения равны, поэтому тупоугольных нет и, значит, всего треугольников не больше двух. Так как $n > 3$, то получаем $n = 4$.

2. (*Д. Швецов*) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр, опущенный из вершины C на биссектрису $\angle ABD$, пересекает прямую AB в точке C_1; перпендикуляр, опущенный из вершины B на биссектрису $\angle ACD$, пересекает прямую CD в точке B_1. Докажите, что $B_1C_1 \parallel AD$.

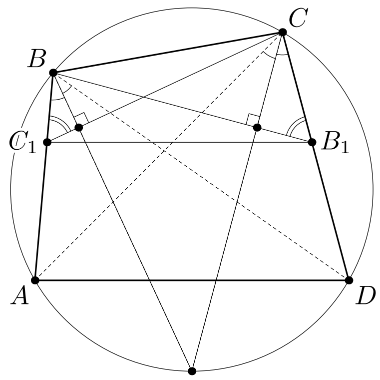

Рис. 1

Решение. Пусть точки C_1 и B_1 лежат на сторонах AB и CD соответственно (см. рис. 1). Так как $\angle BC_1C = 90° - \frac{1}{2}\angle ABD$, а $\angle BB_1C = 90° - \frac{1}{2}\angle ACD$ и $\angle ABD = \angle ACD$, то $\angle BC_1C = \angle BB_1C$, то есть точки B, C, B_1 и C_1 лежат на одной окружности. Тогда $\angle B_1C_1A = \angle BCB_1$, следовательно, $\angle B_1C_1A + \angle BAD = 180°$, то есть $AD \parallel B_1C_1$.

Аналогично рассматривается случай, когда обе точки лежат на продолжении соответствующих сторон.

В случае, когда одна из точек B_1 и C_1 лежит на стороне, а другая на продолжении $\angle BC_1C + \angle BB_1C = 180°$, что также означает принадлежность этих точек одной окружности.

3. (*М. Волчкевич*) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и K соответственно так, что $S_{KMC} + S_{KAC} = S_{ABC}$. Докажите, что все такие прямые MK проходят через одну точку.

Решение. Заметим, что из равенства $S_{KMC} + S_{KAC} = S_{ABC}$ следует, что $S_{KMC} = S_{ABK}$, откуда $\dfrac{BK}{CK} = \dfrac{h_M}{h_A}$, где h_A и h_M — перпендикуляры, опущенные на прямую BC из точек A и M соответственно (см. рис. 2). Кроме того, из подобия следует, что $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{h_M}{h_A}$. Пусть K' — точка симметричная K относительно середины стороны BC, то есть $CK = BK'$. Тогда $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{h_M}{h_A} = \dfrac{BK}{CK} = \dfrac{BK}{BK'}$, что означает параллельность прямых MK и AK'. Так как данные прямые симметричны относительно середины стороны BC, то прямая MK проходит через точку A', симметричную A относительно середины стороны BC.

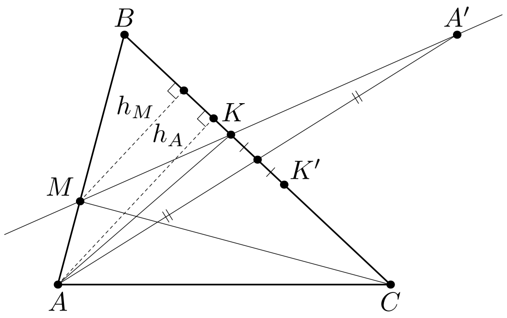

Рис. 2

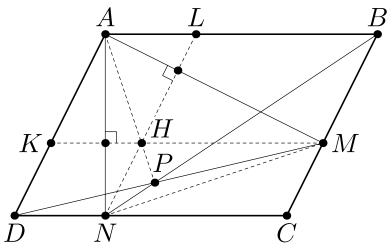

Рис. 3

4. (*А. Полянский*) Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены высоты AM на BC и AN на CD. P — точка пересечения BN и DM. Докажите, что прямые AP и MN перпендикулярны.

Решение. Пусть высоты, проведенные из вершин M и N треугольника AMN пересекаются в точке H и пересекают прямые AD и AB в точках K и L соответственно (см. рис. 3). Тогда достаточно доказать, что A, H и P лежат на одной прямой. Заметим, что данные высоты параллельны сторонам параллелограмма. Для треугольника DMC и прямой BN запишем теорему Менелая: $\frac{MP}{PD} \cdot \frac{DN}{NC} \cdot \frac{CB}{BM} = 1$. Заметим, что в силу параллельности $\frac{DN}{NC} = \frac{KH}{HM}$, а $\frac{CB}{BM} = \frac{DA}{AK}$. Тогда для треугольника KMD и точек A, H и P выполнено условие, что $\frac{KH}{HM} \cdot \frac{MP}{PD} \cdot \frac{DA}{AK} = 1$, то есть по теореме Менелая, они лежат на одной прямой.

Случай, когда угол A — острый, рассматривается аналогично.

5. (*П. Кожевников*) Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 1, а все вершины лежат на боковой поверхности (бесконечного) прямого кругового цилиндра радиуса R. Найдите все возможные значения R.

Ответ: $\frac{3}{4\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

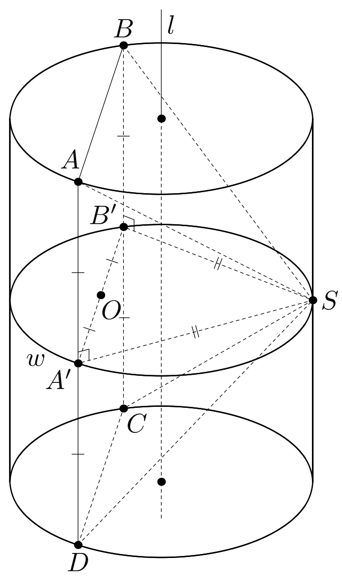

Рис. 4а

Решение. Пусть $SABCD$ — данная пирамида ($ABCD$ — единичный квадрат с центром O). Сразу заметим, что O удалена от всех вершин пирамиды на расстояние $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рассмотрев точку S', симметричную S относительно O, пирамиду можно достроить до правильного октаэдра с вершинами A, B, C, D, S, S' и центром O). Пусть вершины пирамиды лежат на цилиндре радиуса R с осью l; ω — круговое сечение цилиндра (ω имеет радиус R), проходящее через S. Рассмотрим A', B', C', D' — точки на окружности ω, являющиеся проекциями точек A, B, C, D на плоскость окружности ω. Пусть AB не параллельна l, то есть $A' \neq B'$. Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$, значит либо $A' = D'$ и $B' = C'$, либо $A'B'C'D'$ — прямоугольник, вписанный в окружность ω. Рассмотрим отдельно эти два случая.

1) Если $A' = D'$ и $B' = C'$, то ребра AD и BC параллельны l, а значит $A'B'S$ — сечение пирамиды, проведенное через S перпендикулярно AD (см. рис. 4а). Тогда A' и B' — середины ребер AD и BC, $A'B' = AB = 1$, O — середина $A'B'$, SA' и SB' — высоты граней SAD, SBC, то есть $SA' = SB' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Находим $R = \frac{SA'}{2\sin SB'A'} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$. Наоборот, если описать вокруг серединного сечения $SA'B'$ пирамиды окружность ω, и взять прямой круговой цилиндр с направляющей ω, то AD и BC будут образующими цилиндра, то есть рассматриваемая выше конструкция возможна.

2) Если $A'B'C'D'$ — прямоугольник, вписанный в окружность ω, то его центр O' является проекцией O на плоскость ω и является центром окружности ω. Таким образом, O лежит на оси цилиндра l. Заметим, что все вершины пирамиды лежат на сфере с центром O и радиусом OS, которая пересекает цилиндр по паре окружностей ω и ω', симметричных относительно O (O не лежит в плоскости ω). A и C симметричны относительно O, поэтому одна из вершин A и C лежит на окружности ω. Аналогично, либо B, либо D лежит на ω. В любом случае, ω является описанной окружностью одного из правильных треугольников ABS, BCS, CDS, DAS (например, см. рис. 4б), поэтому ее радиус равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Наоборот, в правильном октаэдре с вершинами A, B, C, D, S, S' окружности ω и ω', описанные около правильных треугольников ABS и CDS', лежат на описанной вокруг октаэдра сфере и симметричны относительно центра сферы O, поэтому ω и ω' принадлежат одному круговому цилиндру, то есть рассматриваемая во втором случае конструкция возможна.

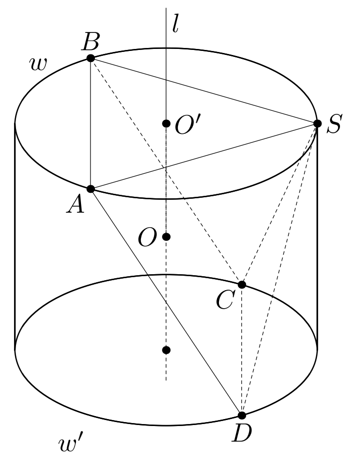

Рис. 4б

6. (*А. Мякишев*) В треугольнике ABC O — центр описанной окружности. Прямая a проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины A, и параллельна OA. Аналогично определяются прямые b и c. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

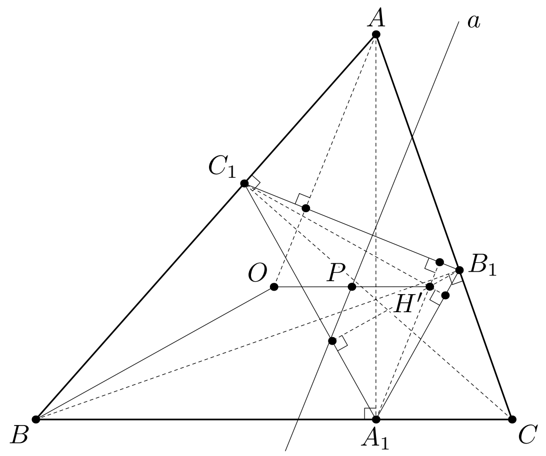

Рис. 5а

Решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника (см. рис. 5а, б). Как нетрудно видеть, $AO \perp$ $\perp B_1C_1$ (если ABC — остроугольный, то $\angle C_1B_1A =$ $= \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 90^\circ - \angle OAC$; для тупоугольного треугольника рассуждения аналогичны). Аналогично $BO \perp C_1A_1$, $CO \perp C_1A_1$. Далее можно рассуждать различными способами.

Первый способ. Прямые a', b', c', проведенные через A_1, B_1 и C_1 параллельно соответственно OA, OB, OC, являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$; обозначим точку их пересечения через H' (см. рис. 5а).

Пусть P — середина отрезка OH'. Прямая, параллельная AO, проходящая через P, делит пополам любой отрезок с концами на параллельных прямых AO и a', в частности проходит через середину отрезка AA', то есть совпадает с прямой a. Таким образом, a проходит через P. Аналогично, прямые b и c проходят через P.

Второй способ. Рассмотрим треугольник $A_2B_2C_2$ с вершинами в серединах отрезков, соединяющих центр описанной окружности с основаниями соответствующих высот (см. рис. 5б). Тогда B_2C_2 — средняя линия треугольника OC_1B_1 и потому параллельна прямой B_1C_1. С другой стороны, A_0A_2 — средняя линия треугольника AA_1O (A_0, B_0, C_0 — середины высот), а значит, параллельна AO, то есть совпадает с данной в условии прямой a и является высотой треугольника $A_2B_2C_2$, опущенной из вершины A_2.

Аналогично, прямые b и c будут двумя другими высотами рассматриваемого треугольника. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, наше утверждение доказано.

Комментарий. Рассмотрим **окружность Тэйлора** см. рис. 5в, то есть, окружность, на которой лежат основания перпендикуляров, опущенных из оснований высот треугольника на прямые, содержащие пары остальных сторон (подробнее об этом см. Дмитрий Ефремов «Новая геометрия треугольника», Одесса, 1902; в электронном виде на сайте МЦНМО

http://mirror1.mccme.ru/ilib/djvu/ngt/ngt.htm).

Докажем, что искомая точка — центр **окружности Тэйлора**. Рассмотрим хорду этой окружности B_3C_3, соединяющую основания перпендикуляров, опущенных на стороны из точки A_1 — основания соответствующей высоты. Заметим, что серединный перпендикуляр к этой хорде проходит через центр окружности Тэйлора T. С другой стороны, он проходит через точку A_0 — середину высоты AA_1, поскольку точка эта есть центр окружности, описанной около четырехугольника $AC_3A_1B_3$, образованного двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой AA_1 и B_3C_3 — также хорда и этой окружности. Остается только заметить, что прямые B_1C_1 и B_3C_3 параллельны (получаются одна из другой соответствующей гомотетией с вершиной A и коэффициентом $k = \dfrac{AH}{AA_1}$). Поэтому рассмотренный перпендикуляр совпадает с прямой a. Аналогично для двух других прямых.

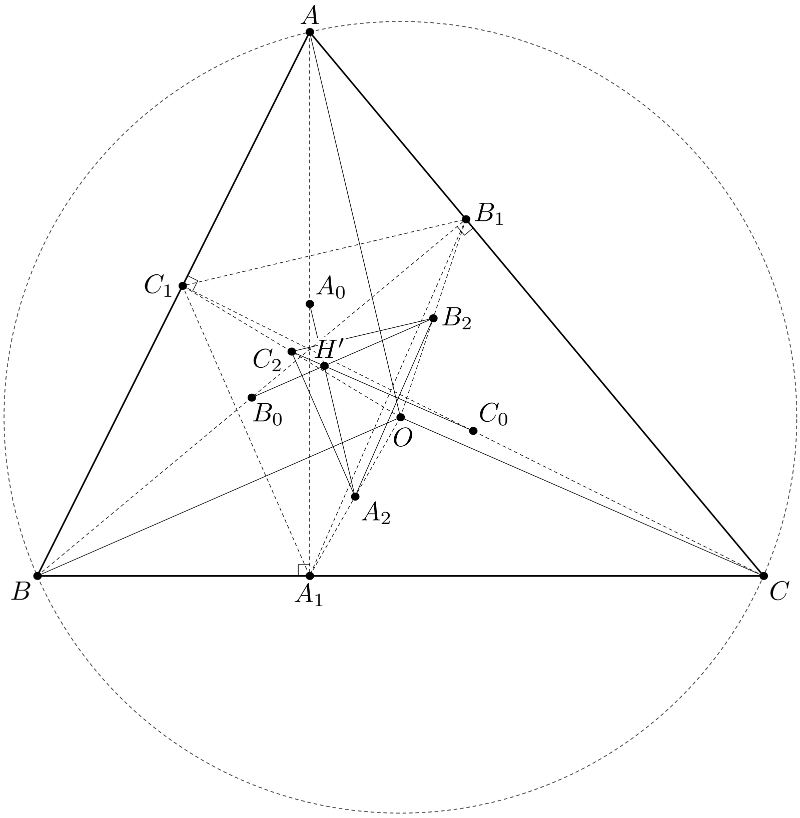

Рис. 5б

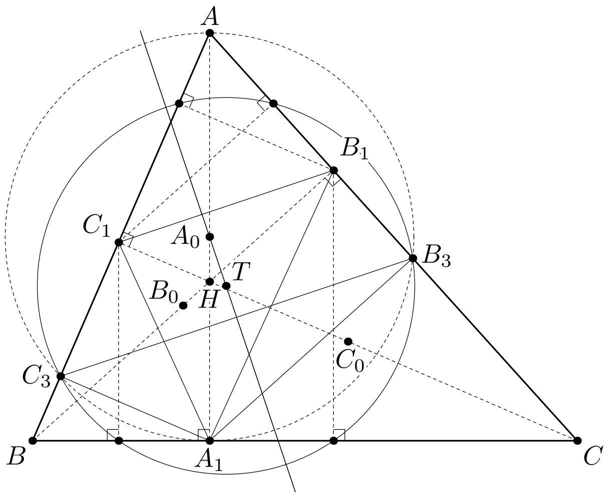

Рис. 5в

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, М. Волчкевич, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников, А. Мякишев, А. Полянский, Д. Прокопенко, Б. Френкин, Д. Швецов.