Седьмая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Девятая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 10 апреля 2011 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*Ю. Блинков*) Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла D прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD и прямую AB в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезок MK равен и перпендикулярен диагонали прямоугольника.

Решение. Заметим, что $\angle ABM = \angle AMB = \angle ADK = \angle AKD = 45^\circ$ (см. рис. 8–9.1а). Тогда $AB = AM, AD = AK$. Далее можно рассуждать различными способами.

Первый способ. Прямоугольные треугольники BAD и MAK равны (по двум катетам), откуда следует, что $BD = MK$.

Также из равенства $\angle ABM = \angle AKD = 45^\circ$ получим, что $BM \perp DK$. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, то KM — высота треугольника ABD, то есть $KM \perp BD$.

Второй способ. При повороте вокруг точки A на 90° $\triangle AMK$ переходит в $\triangle ABD$, следовательно, $BD = MK$ и $BD \perp MK$.

Комментарий. Отметим, что в этой задаче возникает следующая известная геометрическая конструкция. Если в четырёхугольнике $ABCD$ углы A, C и D равны по 45°, то его диагонали AC и BD равны и перпендикулярны (см. рис. 8–9.1б).

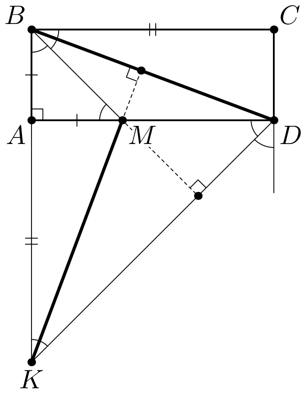

Рис. 8–9.1а

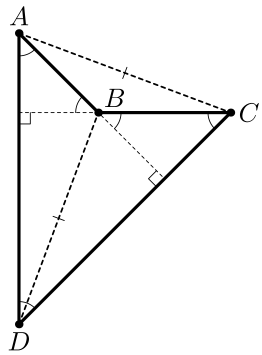

Рис. 8–9.1б

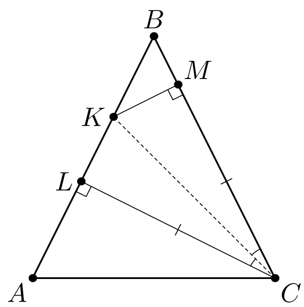

Рис. 8–9.2а

2. (*Ю. Блинков*) В равнобедренном треугольнике ABC на боковой стороне BC отмечена точка M так, что отрезок CM равен высоте треугольника, проведенной к этой стороне, а на боковой стороне AB отмечена точка K так, что угол KMC — прямой. Найдите угол ACK.

Ответ: 45°.

Решение. Проведём высоту CL (см. рис. 8–9.2а). Так как треугольник ABC — равнобедренный, то $CL = CM$. Следовательно, прямоугольные треугольники CLK и CMK равны (по гипотенузе и катету), откуда CK — биссектриса угла LCM. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, тогда $\angle LCA = 90^\circ - \alpha$, а $\angle LCB = \alpha - (90^\circ - \alpha) = 2\alpha - 90^\circ$. Следовательно $\angle ACK = \angle ACL + \angle LCK = 90^\circ - \alpha + \frac{1}{2}(2\alpha - 90^\circ) = 45^\circ$.

Комментарий. Отметим, что в этой задаче возникает следующая геометрическая конструкция. Рассмотрим квадрат $NXMC$ (см. рис. 8–9.2б). Заметим, что XC — биссектриса угла AXK, кроме того, $\angle NAC = \angle ACM = \angle CAB$, следовательно, AC — биссектриса $\angle NAK$. Таким образом, C — центр вневписанной окружности треугольника AXK, откуда $\angle ACK = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AXK = 45^\circ$.

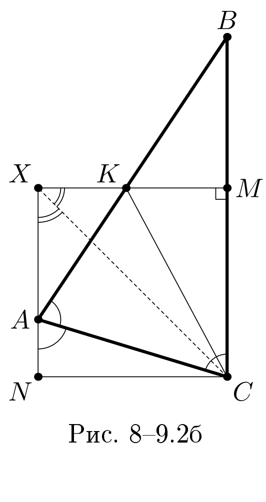

Рис. 8–9.2б

3. (*Фольклор*) Из листа бумаги в клетку вырезали квадрат 2×2. Используя только линейку без делений и не выходя за пределы квадрата, разделите диагональ квадрата на 6 равных частей.

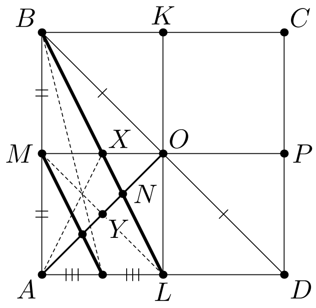

Рис. 8–9.3

Решение. Пусть дан квадрат $ABCD$ с центром O (см. рис. 8–9.3). Точки M, K, P и L — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Заметим, что достаточно указать способ деления отрезка OA на три равные части.

Пусть N — точка пересечения AO и BL. Поскольку N — точка пересечения медиан треугольника ABD, то $AN : NO = 2 : 1$. Разделим отрезок AN пополам, построив среднюю линию треугольника ABL, параллельную стороне BL. Очевидно, что для этого достаточно построить середину AL. Учитывая, что середина AB (точка M) и середина BL (точка X) построены, то, проведя две медианы в треугольнике ABL, мы сможем построить третью.

Середину AL можно найти и по-другому, например, как точку пересечения прямой XY и отрезка AL.

4. (*Г. Филипповский*) В трапеции $ABCD$: $AB = BC = CD$, CH — высота. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из H на AC, проходит через середину BD.

Решение. Заметим, что из равенства сторон трапеции следует равенство углов: $\angle CAD = \angle CAB = \angle BCA = \angle DBC = \angle CDB = \angle BDA$.

Далее можно рассуждать по-разному:

Первый способ. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из H на AC, а N — точка его пересечения с отрезком BD (см. рис. 8–9.4а). Тогда $\angle MHC = 90^\circ - \angle MCH = \angle CAH$. Учитывая исходное равенство, получим, что $\angle NHC = \angle NDC$, то есть четырёхугольник $NHDC$ — вписанный. Следовательно $\angle CND = \angle CHD = 90^\circ$, то есть CN — высота равнобедренного треугольника BCD, значит N — середина BD.

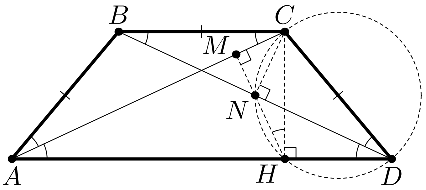

Рис. 8–9.4а

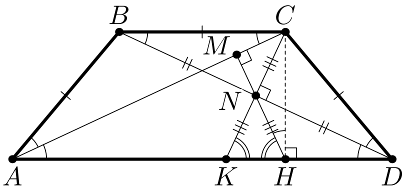

Рис. 8–9.4б

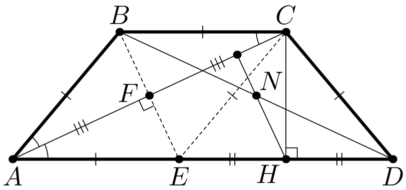

Рис. 8–9.4в

Второй способ. Пусть N — середина BD, M — основание перпендикуляра, опущенного из N на AC, а H — точка его пересечения с отрезком AD (см. рис. 8–9.4б). Докажем, что $\angle CHD = 90^\circ$.

Пусть K — точка пересечения CN и AD. Тогда треугольник CDK — равнобедренный, следовательно, $CN = NK$. Учитывая, что $\angle NKH = 90^\circ - \angle BDA = 90^\circ - \angle CAH = \angle NHK$, получим: $CN = NK = NH$, то есть $\angle CHK = 90^\circ$, что и требовалось.

Третий способ. Пусть N и F — середины диагоналей BD и AC, прямая BF пересекает основание AD в точке E (см. рис. 8–9.4в). Тогда $BF \perp AC$, то есть в треугольнике ABE отрезок AF является высотой и биссектрисой, следовательно, $ABCE$ — ромб. Треугольник ECD — равнобедренный, следовательно, H — середина ED. $HN || BE$, так как HN — средняя линия в треугольнике BDE. Учитывая, что $BE \perp AC$, получим, что $HN \perp AC$.

Комментарий. Для случая, когда BC — большее основание, доказательство аналогично.

5. (*Ю. Блинков*) Пусть AA_1 и BB_1 — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC, M — середина AB. Окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 пересекают прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что K, M и L лежат на одной прямой.

Решение. *Первый способ.* Докажем, что точки K и M лежат на серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1.

M — середина AB, значит $AM = MB_1 = MA_1$ (см. рис. 8–9.5а). Так как равные хорды стягивают равные дуги, то KM — биссектриса $\angle AKA_1$. Также $\angle KB_1M = 180^\circ - \angle AB_1M = 180^\circ - \angle B_1AM = \angle KA_1M$. Тогда $\triangle KB_1M = \triangle KA_1M$, то есть $KB_1 = KA_1$. Следовательно точки K и M равноудалены от концов отрезка A_1B_1, что и требовалось. Для точки L доказательство аналогично.

Комментарий. Нетрудно доказать, что на этой же прямой лежит центр окружности, описанной около треугольника A_1B_1C.

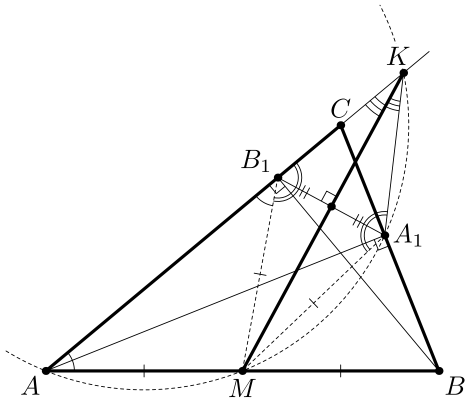

Рис. 8–9.5а

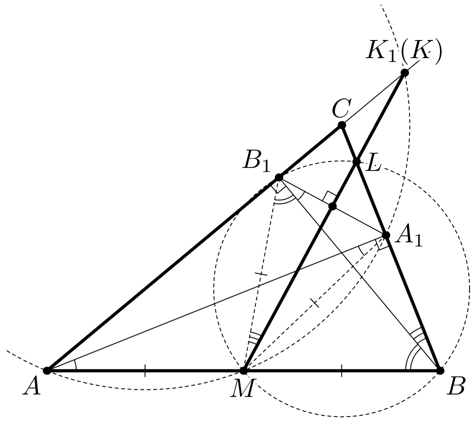

Рис. 8–9.5б

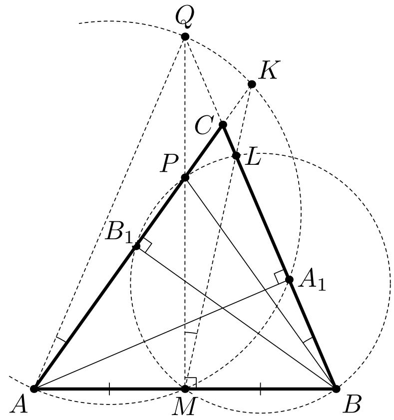

Рис. 8–9.5в

Второй способ. Пусть K_1 – точка пересечения прямых ML и AC (см. рис. 8–9.5б). Докажем, что четырёхугольник AMA_1K_1 — вписанный, то есть, что точки K_1 и K совпадают. Для этого достаточно доказать равенство $\angle MA_1A = \angle MK_1A$. Поскольку M — центр окружности, описанной вокруг четырёхугольника AB_1A_1B, то $\angle MA_1A = \angle MAA_1 = \angle BB_1A_1$ и $\angle MBB_1 = \angle MB_1B$. Поскольку четырёхугольник $MBLB_1$ — вписанный, то $\angle B_1ML = \angle B_1BL$. Следовательно, $\angle MB_1B + \angle BB_1A_1 + \angle B_1ML = \angle MBB_1 + \angle BAA_1 + \angle B_1BA_1 = 90^\circ$. Из этого следует, что $B_1A_1 \perp ML$. Поскольку стороны $\angle AK_1M$ и BB_1A_1 соответственно перпендикулярны, то эти углы равны. Тогда $\angle MA_1A = \angle BB_1A_1 = \angle MK_1A$.

Третий способ. Пусть прямые AC и BC пересекают серединный перпендикуляр к AB в точках P и Q соответственно. Тогда $\angle AMQ = \angle AA_1Q = 90^\circ$, следовательно, окружность, описанная около треугольника AMA_1 проходят через точку Q. Аналогично, $\angle PMB = \angle PB_1B = 90^\circ$, следовательно, окружность, описанная около треугольника BMB_1 проходят через точку P.

Докажем, что углы QMK и PML равны, откуда и будет следовать утверждение задачи. Используя свойство вписанных углов и то, что треугольники ABQ и ABP равнобедренные, получим: $\angle QMK = \angle QAK = \angle QBP = \angle PML$.

Комментарий. Утверждение задачи верно и для тупоугольного треугольника.

6. (*А. Акопян*) Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.

Решение. *Первый способ.* Воспользуемся вспомогательными утверждениями:

1) Если точка M лежит на стороне BC треугольника ABC, то отрезок AM меньше хотя бы одной из сторон AB или AC.

2) Отрезок с концами внутри треугольника (или на его сторонах) не больше наибольшей из сторон данного треугольника.

Докажем утверждение задачи.

Пусть $AB \leqslant AC \leqslant BC$ — стороны внешнего треугольника, M — середина стороны BC.

Заметим, что стороны треугольников ABM и ACM не превосходят AC.

Действительно $BC < AB + AC \leqslant 2AC$, то есть $BM = MC = \dfrac{1}{2}BC < AC$.

Также из утверждения 1 ($AM < AC$ или $AM < AB$) и неравенства $AB \leqslant AC$, получим, что $AM < AC$.

С другой стороны, хотя бы в одном из треугольников ABM или ACM лежат две вершины внутреннего треугольника (см. рис. 8–9.6а). Значит, соединяющая их сторона не превосходит наибольшей стороны в этом треугольнике (утверждение 2), а, значит, не превосходит AC, и даже меньше нее, так как вершины внутреннего треугольника не совпадают с вершинами внешнего.

Итак, хотя бы одна из сторон внутреннего треугольника меньше средней стороны внешнего, откуда и следует утверждение задачи.

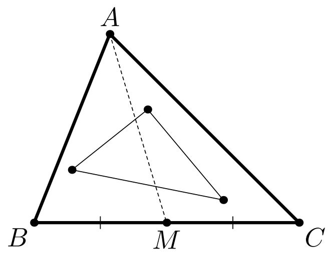

Рис. 8–9.6а

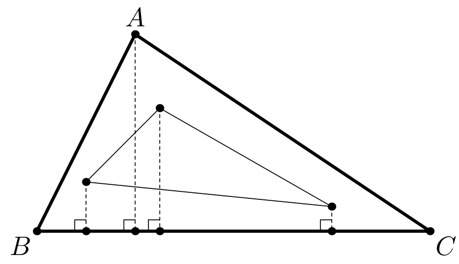

Рис. 8–9.6б

Второй способ. Пусть BC — наибольшая сторона внешнего треугольника. Тогда проекции всех вершин внутреннего на прямую BC лежат внутри отрезка BC (см. рис. 8–9.6б). Значит, проекция одной из его сторон меньше $\frac{BC}{2}$. Проекция этой же стороны на перпендикулярную прямую меньше высоты внешнего треугольника, опущенной на BC. С другой стороны, проекция средней стороны внешнего треугольника на BC не меньше $\frac{BC}{2}$, а на перпендикулярную прямую — равна высоте. Следовательно, одна из сторон внутреннего треугольника короче средней стороны внешнего. Аналогичным рассуждением можно доказать более сильное утверждение: по крайней мере одна из двух меньших сторон внешнего треугольника длиннее соответствующей стороны внутреннего.

Материалы подготовили: А. Акопян, А. Блинков, Ю. Блинков, И. Богданов, А. Горская, А. Заславский, Г. Мерзон, Д. Прокопенко, Г. Филипповский.

Седьмая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Девятая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 10 апреля 2011 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*А. Блинков*) AD и BE — высоты треугольника ABC. Оказалось, что точка C', симметричная вершине C относительно середины отрезка DE, лежит на стороне AB. Докажите, что AB — касательная к окружности, описанной около треугольника DEC'.

Решение. *Первый способ.* Из условия следует, что четырехугольник $ABDE$ — вписанный (см. рис. 10–11.1а), поэтому, $\angle CDE = \angle CAB$. Так как $C'D||CE$, то $\angle CAB = \angle DC'B$, а так как $C'E||CD$, то $\angle CDE = \angle C'ED$. Значит, $\angle C'ED = \angle DC'B$, откуда и следует утверждение задачи.

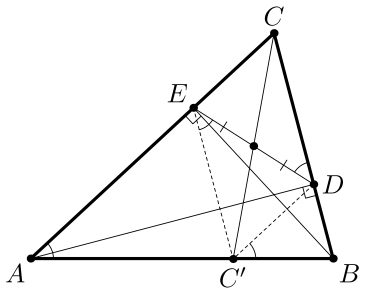

Рис. 10–11.1а

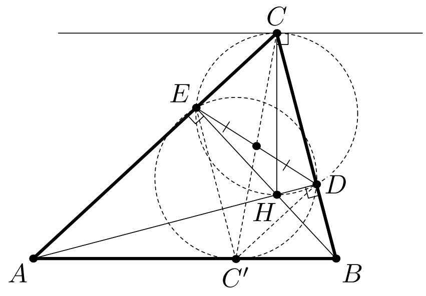

Рис. 10–11.1б

Второй способ. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, тогда вокруг четырехугольника $CDHE$ можно описать окружность с диаметром CH (см. рис. 10–11.1б). Касательная к этой окружности в точке C перпендикулярна CH, то есть параллельна AB. Треугольники DEC' и ECD симметричны относительно середины DE, значит, симметричны и их описанные окружности, а также симметричны касательные, проведенные к этим окружностям в симметричных точках C' и C. Так как центрально-симметричные прямые параллельны, то касательная к окружности, описанной около треугольника DEC' и проходящая через точку C', совпадает с прямой AB.

2. (*А. Блинков*) Прямая a пересекает плоскость α. Известно, что в этой плоскости найдутся 2011 прямых, равноудаленных от a и не пересекающих a. Верно ли, что a перпендикулярна α?

Ответ: нет, не верно.

Решение. Рассмотрим цилиндрическую поверхность с осью a. Проведем её сечение плоскостью α, которая не перпендикулярна оси (см. рис. 10–11.2). Тогда все касательные к цилиндру, лежащие в плоскости α, равноудалены от оси цилиндра.

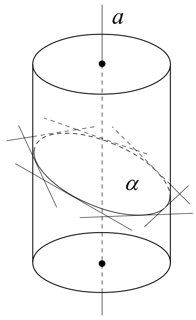

Рис. 10–11.2

3. (*Ф. Ивлев*) Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB||CD$). Произвольная окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции, а точки M и N лежат на отрезках DO и CO соответственно (см. рис. 10–11.3).

Так как четырехугольник $APQB$ — вписанный, то $\angle DPQ = \angle ABC = 180^\circ - \angle DCQ$, то есть $DPQC$ — тоже вписанный. Аналогично, для четырехугольников $AMNB$ и $DMNC$: $\angle MNA = \angle MBA = \angle CDM$.

Итак, есть три окружности, описанные около четырехугольников $APQB$, $DPQC$ и $DMNC$, PQ, MN и CD — их общие хорды, поэтому прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

Для другого расположения точек M и N доказательство аналогично.

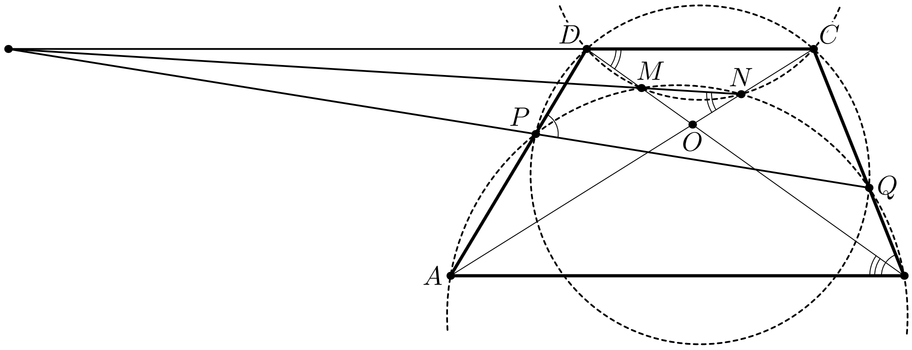

Рис. 10–11.3

Комментарий. Прямые PQ, MN и CD называются *радикальными осями* пар данных окружностей, а точка их пересечения — их *радикальным центром.*

Отметим также, что из свойств проективных преобразований следует, что утверждение задачи верно и для произвольного четырехугольника.

4. (*А. Шаповалов*) Докажите, что любой жесткий плоский треугольник T площади меньше четырёх можно просунуть сквозь треугольную дырку Q площади 3.

Решение. Заметим, что достаточно доказать, что в треугольнике площади меньше четырёх наименьшая высота h меньше, чем наибольшая сторона треугольника площади 3. Тогда в треугольнике Q можно провести отрезок m длины h, не имеющий общих точек с контуром треугольника Q. Развернув T так, чтобы его плоскость была перпендикулярна плоскости Q, а высота h была параллельна Q и проектировалась на m. Тогда проекция T также совпадет с m, и двигая T вдоль перпендикуляров к Q, мы протащим его сквозь дыру.

Теперь докажем это утверждение.

Пусть в треугольнике площади S стороны $a \leqslant b \leqslant c$, а наименьшая высота равна h. Тогда выполнены неравенства $S \leqslant c^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ $(*)$ и $h^2 \leqslant S\sqrt{3}$ $(**)$. Действительно, наименьший угол A треугольника лежит против стороны a и не превосходит $60°$, поэтому площадь $S = \frac{1}{2}bc\sin\angle A \leqslant \frac{1}{2}c^2\sin 60° = c^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Умножив обе части $(*)$ на h^2 и воспользовавшись равенством $S = \frac{hc}{2}$ (ясно, что h опущена на c), получим $h^2S \leqslant \frac{h^2c^2}{4}\sqrt{3} = S^2\sqrt{3}$, что равносильно $(**)$.

Если теперь h — наименьшая высота в треугольнике T площади $S < 4$ и по $(**)$ $h^2 < 4\sqrt{3}$. А если c — наибольшая сторона в треугольнике Q площади $S = 3$, то по $(*)$ $3 \leqslant c^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow c^2 \geqslant 4\sqrt{3}$. Итак, $h < c$.

Комментарий. Фактически, доказанные неравенства $(*)$ и $(**)$ означают следующее:

1) У треугольника данной площади найдется сторона не меньше, чем сторона равновеликого ему равностороннего треугольника.

2) У треугольника данной площади найдется высота не больше, чем высота равновеликого ему равностороннего треугольника.

5. (*Фольклор*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AC \perp BD$, $\angle BCA = 10°$, $\angle BDA = 20°$, $\angle BAC = 40°$. Найдите $\angle BDC$. (*Ответ выразите в градусах.*)

Ответ: $60°$.

Решение. *Первый способ.* Пусть K и M — точки пересечения CB с прямой AD и окружностью, описанной около треугольника ACD соответственно (см. рис. 10–11.5). Тогда $\angle MDA = \angle MCA = 10°$, то есть DM — биссектриса угла KDB. Также заметим, что $\angle ABD = 50°$, $\angle CBD = 80°$, значит $\angle KBA = 50°$, то есть BA — биссектриса угла KBD.

Итак, I — точка пересечения BA и DM — есть центр окружности, вписанной в $\triangle KBD$, причем $\angle BID = 120°$,

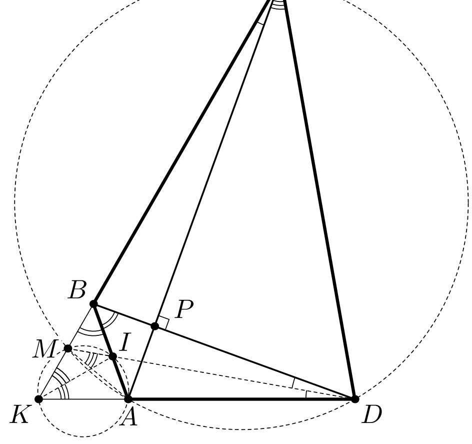

Рис. 10–11.5

а $\angle BKD = 60°$. Значит, четырёхугольник $KAIM$ — вписанный, причем KI — биссектриса угла AKM. Следовательно $\angle ACD = \angle AMD = \angle AMI = \angle AKI = 30°$, откуда следует $\angle BDC = 60°$.

Второй способ. Пусть P — точка пересечения AC и BD.

Заметим, что $\operatorname{tg}\angle CDP = \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{PA}{PD}\cdot\dfrac{PB}{PA}\cdot\dfrac{PC}{PB} = \operatorname{tg}20°\cdot\operatorname{tg}40°\cdot\operatorname{tg}80°$.

Докажем, что $\operatorname{tg}20°\cdot\operatorname{tg}40°\cdot\operatorname{tg}80° = \sqrt{3} = \operatorname{tg}60°$, откуда будет следовать утверждение задачи.

Преобразуем произведения синусов и косинусов по отдельности:

$$\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80° = \frac{8\sin 20°\cdot\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°}{8\sin 20°} = \frac{\sin 160°}{8\sin 20°} = \frac{1}{8}.$$

$$\sin 20°\cdot\sin 40°\cdot\sin 80° = \frac{1}{2}\cdot\sin 20°\cdot(\cos 40° - \cos 120°) = \frac{1}{2}\cdot\sin 20°\cdot\left(1 - 2\sin^2 20° + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\left(3\sin 20° - 4\sin^3 20°\right) = \frac{1}{4}\cdot\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Следовательно $\operatorname{tg}\angle CDP = \sqrt{3}$, что и требовалось.

6. (*Ю. Блинков*) Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC; окружности, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C, вторично пересекаются в точке P, Z — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведённых в точках A и B. Докажите, что прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

Решение. *Первый способ.* Отметим, что CH — диаметр окружности, описанной около треугольника A_1B_1C (H — ортоцентр).

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

1) Точки M (середина AB), H и P лежат на одной прямой (см. рис. 10–11.6а).

Пусть H' симметрична H относительно M, а P' — точка пересечения MH с описанной окружностью треугольника ABC. Тогда, в силу параллельности и равенства углов при симметрии H' лежит на описанной окружности и $\angle CAH' = 90°$, то есть CH' — диаметр окружности, а значит $\angle CP'H' = 90°$. Это означает, что окружность, описанная около треугольника A_1B_1C проходит через P', то есть P' совпадает с P.

Рис. 10–11.6а

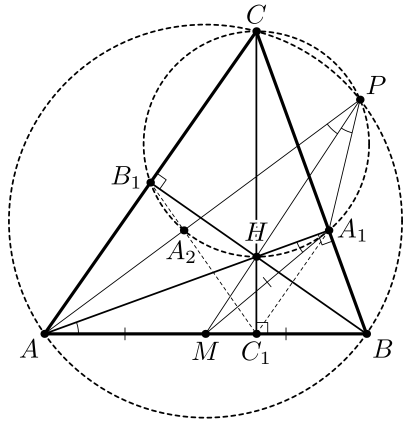

Рис. 10–11.6б

2) Окружность, описанная около треугольника AMA_1, проходит через точку P (см. рис. 10–11.6б).

Используя равенство вписанных углов и 1), получим, что $\angle MAA_1 = \angle HCA_1 = \angle HPA_1 =$
$= \angle MPA_1$, что и требовалось.

3) Точка A_2, симметричная A_1 относительно высоты CC_1, точки A и P лежат на одной прямой (см. рис. 10–11.6б).

Так как $\angle MAA_1 = \angle MA_1A$ (A_1M — медиана прямоугольного треугольника AA_1B), то, учитывая 2), получим, что PM — биссектриса угла APA_1, то есть A_2 — точка пересечения AP и окружности с диаметром CH, что равносильно тому, что надо доказать. Отметим также, что CC_1 — биссектриса $A_1C_1B_1$, откуда следует, что A_2 лежит на прямой B_1C_1.

4) $B_1C_1 \parallel AZ$; $A_1C_1 \parallel BZ$, $A_2A_1 \parallel AB$ (см. рис. 10–11.6в).

Используя угол между касательной и хордой и антипараллельность получим, что $\angle BAZ = \angle ACB = \angle B_1C_1A$, что и требовалось. Аналогично $A_1C_1 \parallel BZ$. Третья паралельность следует из способа построения точки A_2.

Теперь докажем утверждение задачи.

У равнобедренных треугольников AZB и $A_2C_1A_1$ соответствующие стороны параллельны (см. рис. 10–11.6в), следовательно эти треугольники гомотетичны, причём центр гомотетии лежит на пересечении прямых AA_2, BA_1 и ZC_1. То есть прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

Комментарий. Заметим, что утверждение задачи верно и для тупоугольного треугольника.

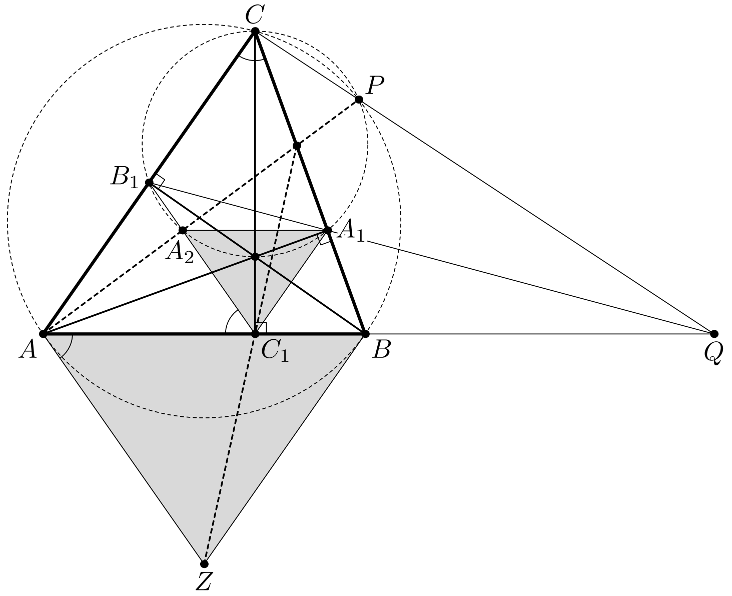

Рис. 10–11.6в

Второй способ. Пусть Q — точка пересечения A_1B_1 с AB (см. 10–11.6в). Заметим, что так как $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90°$ точки A, B, A_1 и B_1 лежат на одной окружности. То есть Q — радикальный центр описанной окружности треугольников ABC и CA_1B_1 и четырехугольника ABA_1B_1. А значит Q лежит на прямой CP.

Теперь заметим, что утверждение задачи очевидно из свойств полярных преобразований: все нужные точки лежат на поляре Q. Действительно, поляра Q проходит через полюс прямой AB — точку Z. Кроме того, она проходит через точку C_1, поскольку двойное отношение точек A, B, C_1, Q равно -1 (теорема о полном четырёхстороннике для точек C, A_1, B_1 и H). Значит прямая ZC_1 и есть поляра точки Q. То, что поляра точки (Q) пересечения противоположных сторон четырехугольника ($ABPC$) проходит через точку пересечения его диагоналей (AP и BC), завершает доказательство.

Комментарий. Определение и свойства поляры см., например, Я. П. Понарин, «Афинная и проективная геометрия», §22.

Про двойное отношение четырех точек и теорему о полном четырехстороннике можно прочитать, например, в «Задачи по планиметрии», В. В. Прасолов, глава 30.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, Ф. Ивлев, П. Кожевников, А. Шаповалов.