Восьмая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Десятая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 8 апреля 2012 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*Ю. Блинков*) В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, и $AB = BC = BD$. Высота BK пересекает диагональ AC в точке M. Найдите $\angle CDM$.

Ответ: 90°.

Решение. Из равенства сторон AB и BC и параллельности BC и AD следует, что AC — биссектриса угла BAD (см. рис. 8–9.1). Так как треугольник ABD — равнобедренный, то DM — биссектриса угла ADB. Пусть $\angle BAD = \angle BDA = \angle DBC = 2\alpha$.

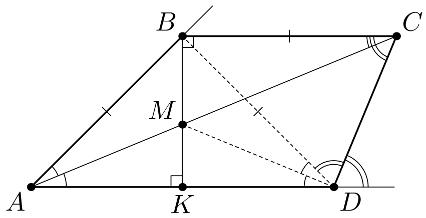

Рис. 8–9.1

Далее можно рассуждать по-разному:

Первый способ. Из равнобедренного треугольника BCD получим, что $\angle CDB = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$. Тогда $\angle CDM = \angle CDB + \angle MDB = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$.

Второй способ. Поскольку $\angle BDM = \angle BAM = \angle BCM = \alpha$, то четырехугольник $BCDM$ — вписанный и $\angle CDM = 180^\circ - \angle MBC = 90^\circ$.

Третий способ. Аналогично началу решения, из условий $BC = BD$ и $BC||AD$ следует, что DC — биссектриса внешнего угла D. Учитывая, что биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны, получим требуемое.

2. (*Фольклор*) На плоскости даны два равных многоугольника F и F'. Известно, что вершины многоугольника F принадлежат F' (могут лежать внутри него или на границе). Верно ли, что все вершины этих многоугольников совпадают?

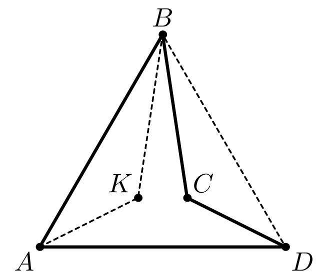

Рис. 8–9.2

Ответ: нет, не верно.

Решение. Одним из возможных примеров являются четырехугольники $ABCD$ и $DBKA$ (см. рис. 8–9.2). При этом треугольник ABD — равносторонний, а точки K и C симметричны относительно его медианы BB'. Существуют и другие примеры.

3. (*А. Акопян*) Дан равносторонний треугольник ABC и прямая l, проходящая через его центр. Точки пересечения этой прямой со сторонами AB и BC отразили относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через получившиеся точки, касается вписанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть O — центр треугольника, M и K — точки пересечения прямой l со сторонами AB и BC соответственно, C_1 и A_1 — середины сторон, M_1 и K_1 — образы точек M и K при указанной симметрии (см. рис. 8–9.3).

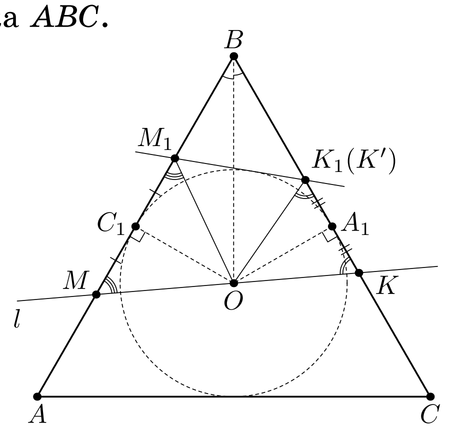

Рис. 8–9.3

Докажем, что O — центр вневписанной окружности треугольника M_1BK_1, откуда следует утверждение задачи.

Воспользуемся фактом, который несложно доказать счетом углов: *если I_B — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC, то* $\angle AI_BC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$.

Верно и обратное: *если I_B лежит на продолжении биссектрисы угла B треугольника ABC и $\angle AI_BC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$, то I_B — центр вневписанной окружности треугольника ABC.*

Далее можно рассуждать по-разному:

Первый способ. Так как BO — биссектриса угла B, то достаточно доказать, что $M_1OK_1 = 60^\circ$ (см. вспомогательное утверждение).

Заметим, что $\angle OM_1M + \angle OK_1K = \angle BMK + \angle BKM = 120^\circ$. Тогда по сумме углов четырехугольника M_1BK_1O: $\angle M_1OK_1 = 360^\circ - (180^\circ - \angle OM_1M) - (180^\circ - \angle OK_1K) - 60^\circ = 60^\circ$.

Второй способ. Проведем касательную из точки M_1 к вписанной окружности треугольника ABC. Пусть она пересекает BC в точке K'. Докажем, что K' совпадает с K_1, откуда и следует утверждение задачи.

Пусть $\angle OM_1M = \angle BMK = \alpha$, тогда $\angle BKM = 120^\circ - \alpha$, $\angle MOM_1 = 180^\circ - 2\alpha$, а $\angle M_1OK' = 60^\circ$ (см. вспомогательное утверждение).

Следовательно $\angle MOK' = 240^\circ - 2\alpha = 2\angle BKM$, откуда следует, что треугольник KOK' — равнобедренный, то есть точка K' совпадает с K_1.

4. (*Д. Швецов*) В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, точки I_A, I_C — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и AB соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника II_AI_C. Докажите, что $OI \perp AC$.

Решение. Заметим, что центры вневписанных окружностей I_A, I_C лежат на биссектрисах внешнего угла при вершине B (см. рис. 8–9.4а). Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Поскольку биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то $\angle ABI_A = 90^\circ + \beta$. Тогда из треугольника ABI_A получаем, что $\angle BI_AA = 90^\circ - \alpha - \beta$.

По теореме о вписанном угле $\angle I_COI = 2\angle I_CI_AI = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 2\gamma$. Тогда из равнобедренного треугольника I_COI получаем, что $\angle OII_C = 90^\circ - \gamma$. Поскольку $\angle CIM = \angle OII_C$, то в треугольнике IMC (M — точка пересечения прямой OI и AC) $\angle ICM + \angle CIM = \gamma + 90^\circ - \gamma = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

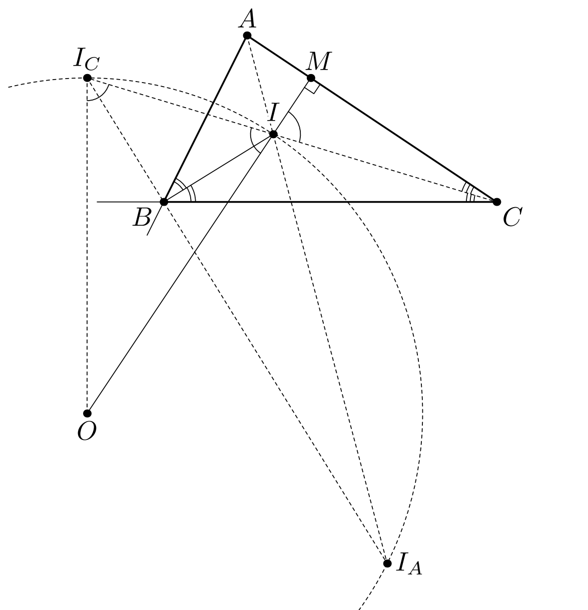

Рис. 8–9.4а

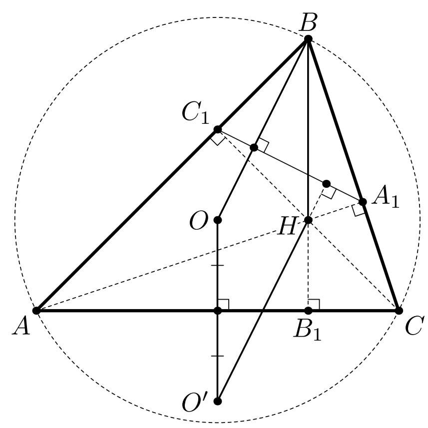

Рис. 8–9.4б

Комментарий. На самом деле, данная задача эквивалентна следующей:

В остроугольном треугольнике ABC: H — точка пересечения высот AA_1, BB_1 и CC_1, O — центр описанной окружности, O' – центр окружности, описанной около треугольника AHC. Тогда $O'H \perp A_1C_1$.

Докажем это.

Воспользуемся следующими известными фактами:

1) $OB \perp A_1C_1$;

2) O и O' — симметричны относительно прямой AC;

3) Расстояние от точки O до прямой AC в два раза меньше длины отрезка BH.

Тогда из утверждений 2) и 3) следует, что $OO' = BH$ и $OO' || BH$, то есть $OO'HB$ — параллелограмм. Используя утверждение 1), получим требуемое.

Теперь рассмотрим исходную задачу и используем, что H — центр вписанной окружности ортотреугольника, а точки A, B и C — центры его вневписанных окружностей.

Пусть $A_1 \equiv A$, $B_1 \equiv B$, $C_1 \equiv C$. Тогда $H \equiv I$, $A \equiv I_A$, $C \equiv I_C$, $O' \equiv O$.

По доказанному, $O'H \perp A_1C_1$, то есть в обозначениях исходной задачи $OI \perp AC$.

5. (*Ю. Блинков*) Дана окружность и хорда AB, отличная от диаметра. По бо́льшей дуге AB движется точка C. Окружность, проходящая через точки A, C и точку H пересечения высот треугольника ABC, повторно пересекает прямую BC в точке P. Докажите, что прямая PH проходит через фиксированную точку, не зависящую от положения точки C.

Решение. Поскольку точка C движется по бо́льшей дуге AB, то угол C — острый. Рассмотрим некоторое положение точки C, при котором треугольник ABC — остроугольный и точка P лежит на отрезке BC (см. рис. 8–9.5). Поскольку четырехугольник $ACPH$ — вписанный, то $\angle PHA_1 = \angle ACP = \alpha$. Рассмотрим окружность w, симметричную описанной окружности треугольника ABC относительно AB. Поскольку $\angle ACB + \angle AHB = 180°$, то точка H принадлежит w. Пусть X — точка пересечения w и прямой PH. Докажем, что при движении точки C по дуге AB описанной вокруг треугольника ABC окружности, все прямые PH проходят через точку X. Действительно, при движении точки C точка H двигается по окружности w, кроме того, $\angle AHX = \angle PHA_1 = \alpha$. Поскольку $\alpha = \mathrm{const}$, то все углы AHX в окружности w опираются на одну и ту же дугу AX.

Случаи, когда точка P не лежит на отрезке BC, или треугольник ABC — тупоугольный, рассматриваются аналогично. При этом, в случае тупоугольного треугольника ABC, точка H движется по бо́льшей дуге окружности w.

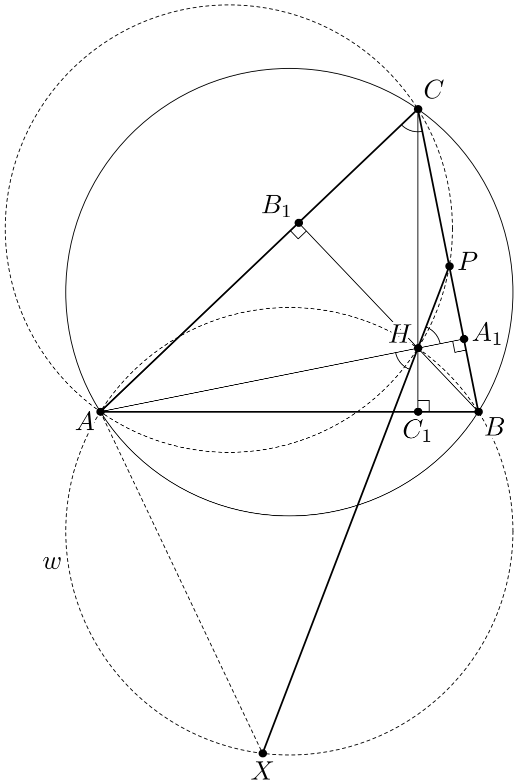

Рис. 8–9.5

6. (*А. Заславский*) Восстановите треугольник с помощью циркуля и линейки по точке пересечения высот и основаниям медианы и биссектрисы, проведенных к одной из сторон. (*Исследование проводить не требуется.*)

Решение. Пусть C_0 и C_1 — основания медианы и биссектрисы, проведенных из вершины C треугольника ABC, а H — его ортоцентр. Тогда точки P и Q, симметричные H относительно прямой AB и точки C_0, лежат на описанной около треугольника окружности. Кроме того, $AQ = BH = BP$, то есть, CC_1 — биссектриса угла PCQ. Таким образом, первым этапом во всех способах решения будет являться построение точек P и Q.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Заметим, что так как CC_1 — биссектриса угла HCQ, а прямую HC мы можем построить как перпендикуляр к прямой C_0C_1, то нам известно расстояние от точки C_1 до прямой CQ. Отсюда получаем следующее построение.

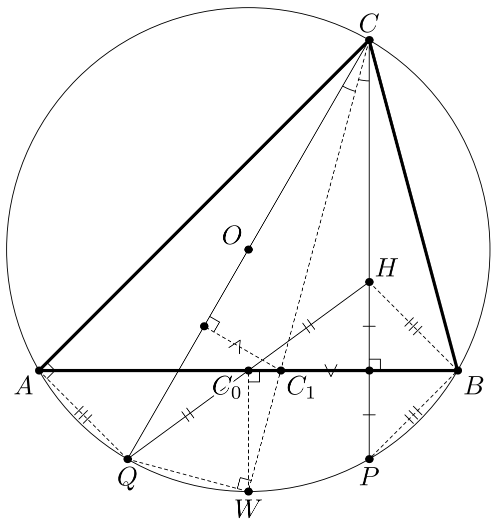

Рис. 8–9.6а

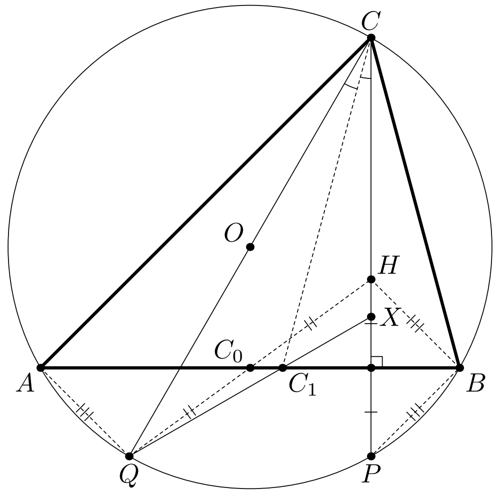

Рис. 8–9.6б

1) Построим окружность с центром C_1, касающуюся прямой PH, и проведем к ней касательную из точки Q. Эта касательная пересечет прямую PH в вершине C.

2) Построим окружность, проходящую через точки C, P и Q, и найдем точки A и B ее пересечения с прямой C_0C_1. Треугольник ABC искомый.

Второй способ. Заметим, что: 1) середина дуги AB (точка W) лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AB и биссектрисы CC_1.

2) Поскольку $BH||AQ$, то CQ — диаметр окружности, то есть $\angle CWQ = 90^\circ$.

Отсюда получаем следующее построение.

1) Построим точку W как пересечение окружности с диаметром C_1Q и перпендикуляра к C_0C_1, проведенного в точке C_0.

2) Построим окружность, проходящую через точки W, P и Q. Найдем точки A и B ее пересечения с прямой C_0C_1, и точку C ее пересечения с прямой PH. Треугольник ABC искомый.

Третий способ. Используем следующий факт:

Даны точки A и B. Тогда ГМТ M таких, что $AM : BM = k$, где k — фиксированное число большее 0 и не равное 1, есть окружность (*такая окружность называется окружностью Аполлония*), построенная на отрезке C_1C_2 как на диаметре (C_1 и C_2 лежат на прямой AB и удовлетворяют условию).

Отсюда получаем следующее построение.

1) Построим точку X пересечения прямых QC_1 и HP.

2) Построим точку C как пересечение окружности Аполлония для точек Q и X с $k = QC_1 : XC_1$ и прямой PH (в той же полуплоскости относительно C_0C_1, что и H).

3) Построим окружность, проходящую через точки C, P и Q, и найдем точки A, B ее пересечения с прямой C_0C_1. Треугольник ABC искомый.

Материалы подготовили: А. Акопян, А. Блинков, Ю. Блинков, И. Богданов, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников, В. Протасов, Д. Швецов.

Восьмая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Десятая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 8 апреля 2012 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*Фольклор*) Верно ли, что центр вписанной окружности треугольника лежит внутри треугольника, образованного средними линиями данного?

Ответ: да, верно.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, длины сторон которого равны a, b и c (см. рис. 10–11.1а, б).

Первый способ. Пусть точка I не лежит внутри треугольника, образованного средними линиями треугольника ABC, тогда расстояние от I до одной из сторон не меньше, чем половина высоты, проведенной к этой стороне. Так как это расстояние является радиусом вписанной окружности, то диаметр этой окружности не меньше высоты.

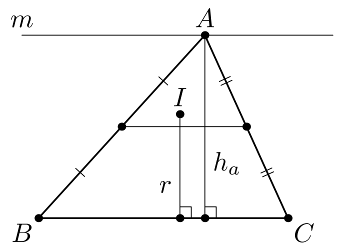

Рис. 10–11.1а

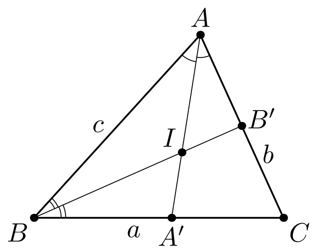

Рис. 10–11.1б

Но это невозможно, так как в этом случае вписанная окружность должна иметь общую точку с прямой m, параллельной этой стороне и проходящей через противолежащую вершину (см. рис. 10–11.1а).

Получить противоречие можно по-другому, используя формулы для вычисления площади S треугольника. Если $r \geqslant \frac{h_a}{2}$, то $\frac{2S}{a+b+c} \geqslant \frac{S}{a} \Leftrightarrow a \geqslant b+c$, что противоречит неравенству треугольника.

Второй способ. Так как I — точка пересечения биссектрис AA' и BB', то по свойству биссектрисы треугольника $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ (см. рис. 10–11.1б). Учитывая, что $A'C = a - A'B$, получим: $A'B = \frac{ac}{b+c}$. Применяя это же свойство к треугольнику $AA'B$, получим, что $\frac{AI}{A'I} = \frac{c}{A'B} = \frac{b+c}{a} > 1$. Таким образом, точка I лежит между стороной BC и параллельной ей средней линией.

Проведя аналогичные рассуждения для двух других сторон данного треугольника, получим, что I лежит внутри треугольника, образованного средними линиями.

2. (*Ю.Блинков*) В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$: $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AB = AE$, $BC = CD$, $AC = 1$. Найдите площадь пятиугольника.

Ответ: 0,5.

Решение. *Первый способ.* Пусть $AB = AE = a$, $CB = CD = b$, $\angle ABC = \alpha$. Тогда $BE = a\sqrt{2}$, $BD = b\sqrt{2}$, $\angle EBD = \alpha - 90^\circ$ (см. рис. 10–11.2а).

$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{CBD} + S_{EBD} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot b\sqrt{2}\cdot \sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha)$.

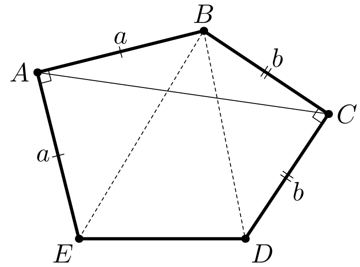

Рис. 10–11.2а

С другой стороны, по теореме косинусов из треугольника ABC: $a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha = AC^2 = 1$. То есть $S_{ABCDE} = 0{,}5$.

Второй способ. Поскольку сумма углов пятиугольника равна 540°, то $\angle B + \angle E + \angle D = 360^\circ$. Следовательно, на отрезке AC найдется такая точка X, что углы ABX и CBX дополняют до 180° углы E и D соответственно (см. рис. 10–11.2б). Повернем треугольники ABX и CBX на -90° и 90° относительно вершин A и C соответственно. Пусть точки Y и Z — образы точки X при этих поворотах. Тогда $YACZ$ — прямоугольная трапеция, в которой высота AC равна 1 и сумма оснований $AY + CZ = AC$ равна 1. Следовательно, площадь исходного пятиугольника равна площади трапеции и равна 0,5.

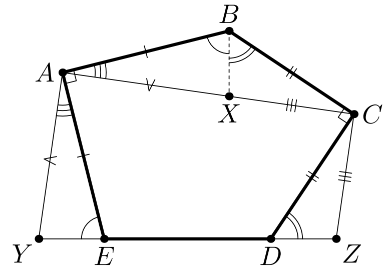

Рис. 10–11.2б

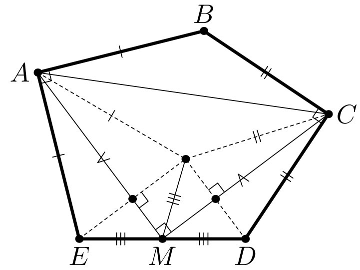

Рис. 10–11.2в

Третий способ. Воспользуемся следующим утверждением:

Композиция двух поворотов с различными центрами A и C на угол 90° является центральной симметрией с центром M, причем $AM = MC$ и $\angle AMC = 90^\circ$.

Применим данное утверждение к задаче.

$R_C^{90^\circ} \circ R_A^{90^\circ} = S_M$, где M — середина отрезка DE, причем $\angle AMC = 90^\circ$. Тогда $\angle AME + \angle CMD = 90^\circ$ (см. рис. 10–11.2в). Следовательно, образы точек E и D при симметрии относительно прямых AM и CM соответственно, совпадают. Учитывая равенства $AB = AE$ и $BC = CD$, получим, что образ вершины B при симметрии относительно AC также совпадает с первыми двумя. То есть $S_{ABCDE} = 2S_{AMC}$. Треугольник AMC — прямоугольный равнобедренный с гипотенузой 1, следовательно, его площадь равна $\frac{1}{4}$, значит, $S_{ABCDE} = 2S_{AMC} = 0{,}5$.

3. (*А.Акопян, Д.Швецов*) H — точка пересечения высот AA' и BB' остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная AB, пересекает эти высоты в точках D и E, а сторону AB — в точке P. Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на отрезке CP.

Решение. Пусть X — точка пересечения высоты HM треугольника DEH с отрезком CP (см. рис. 10–11.3). Докажем, что X — ортоцентр треугольника DEH.

Заметим, что треугольник DEH подобен треугольнику BAC по двум углам. Действительно, $\angle DHE = 180^\circ - \angle AHB = \angle ACB$, а $\angle EDH = 180^\circ - \angle A'DP = \angle ABC$.

Так как отношение, в котором ортоцентры подобных треугольников разбивают соответствующие высоты одинаково, то осталось доказать, что $HX : XM = CH : HC'$, где CC' — высота треугольника ABC.

Последнее равенство следует из равенства отрезков MP и HC' и подобия треугольников MXP и HXC.

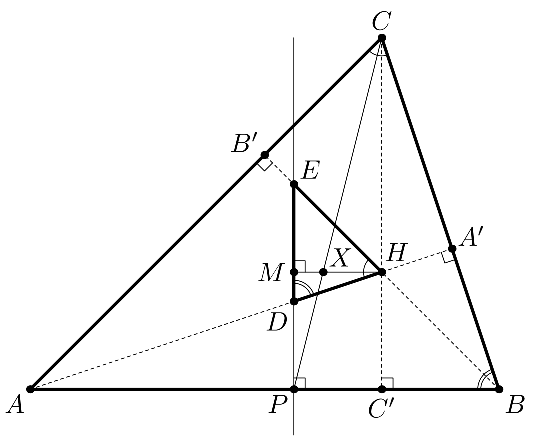

Рис. 10–11.3

4. (*И.Богданов, Р.Карасев*) Внутри выпуклого многогранника выбрана точка P и несколько прямых $\ell_1, \ldots, \ell_n$, проходящих через P и не лежащих в одной плоскости. Каждой грани многогранника поставим в соответствие ту из прямых l_1, l_2, ..., l_n, которая образует наибольший угол с плоскостью этой грани (если таких прямых несколько, выберем любую из них). Докажите, что найдется грань, которая пересекается с соответствующей ей прямой.

Решение. Рассмотрим точки пересечения A_1, A_2, … плоскостей граней с соответствующими им прямыми. Выберем среди всех отрезков PA_i наименьший (если таких несколько — рассмотрим любой из них). Обозначим этот отрезок через PA (см. рис. 10–11.4). Предположим, что точка A не принадлежит своей грани. Тогда прямая PA пересекает какую-то другую грань в ее внутренней точке C. Если прямая PC является соответствующей для этой грани, то задача решена. Иначе рассмотрим соответствующую прямую PB для этой грани (см. рис. 10–11.4). Поскольку $\beta \geqslant \gamma$, то $PC \geqslant PB$. С другой стороны, $PA > PC$. Тогда $PA > PB$, что противоречит выбору отрезка PA.

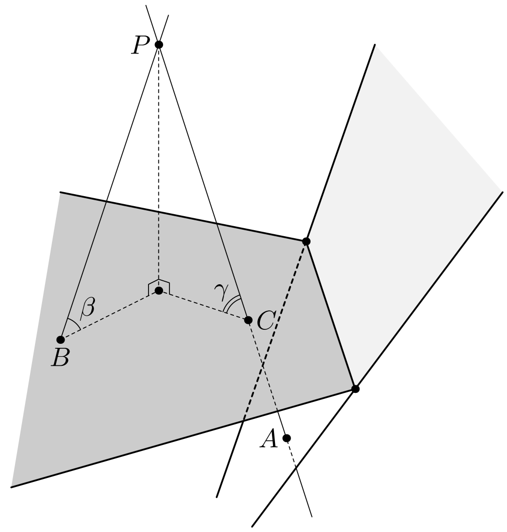

Рис. 10–11.4

5. (*А. Заславский, А. Канель*) Внутри окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $OA = OB$. Постройте на окружности точку M, для которой сумма расстояний до точек A и B наименьшая среди всех возможных.

Решение. Используем следующее:

Пусть даны точки A и B. Тогда ГМТ M таких, что $AM + BM = a = \text{const}$ есть эллипс. Точки A и B называются фокусами эллипса.

Более того, если точка K внутри эллипса, то $AK + BK < a$, а если вне, то $AK + BK > a$.

Рассмотрим семейство эллипсов с фокусами A и B. Наибольший из этих эллипсов, лежащий внутри окружности, касается ее либо в точке, лежащей на серединном перпендикуляре к AB, либо в двух точках, симметричных относительно этого перпендикуляра (см. рис. 10–11.5а, б). Ясно, что искомый минимум суммы расстояний достигается в точках касания.

Выясним, когда имеет место второй случай. Пусть M — одна из точек касания. В силу оптического свойства эллипса MO — биссектриса угла AMB. Тогда, поскольку $OA = OB$ и $AM \neq MB$, то точки A, M, B и O лежат на одной окружности. Отсюда получаем следующее построение.

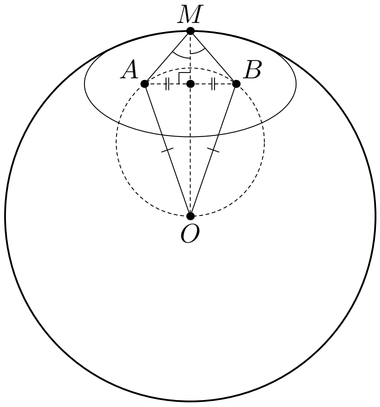

Рис. 10–11.5а

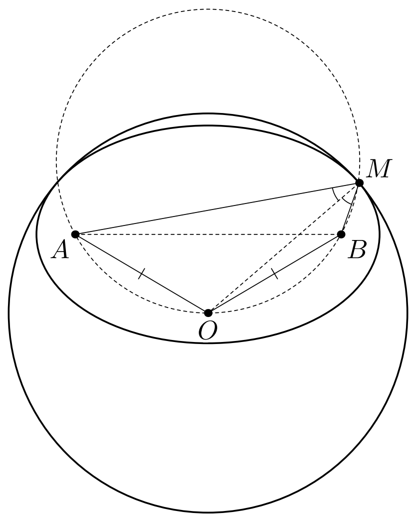

Рис. 10–11.5б

Проведем окружность через точки A, O и B. Если она пересекает данную окружность, то каждая из точек пересечения является искомой. Если же окружности не пересекаются, то искомой будет ближайшая к A точка пересечения данной окружности и серединного перпендикуляра к AB.

Комментарий. Для доказательства того, что MO — биссектриса угла AMB, можно попытаться вместо свойств эллипса использовать «физические» соображения: угол падения равен углу отражения. Но, в этом случае, надо отдельно доказывать, что полученная «бильярдная траектория» имеет наименьшую длину, а не наибольшую! Подробно о бильярдных траекториях — см. Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков, «*Бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики*», М.: Наука, 1990. Серия Библиотечка «Квант», выпуск 77. (В электронном виде: `http://www.math.ru/lib/bmkvant/77`)

6. (*Ю. Зайцева*) Касательные, проведённые к описанной окружности остроугольного треугольника ABC в точках A и C, пересекаются в точке Z. AA_1, CC_1 — высоты. Прямая A_1C_1 пересекает прямые ZA, ZC в точках X и Y соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.

Решение. *Первый способ.* Пусть BB_1 — третья высота, H_a, H_b, H_c — точки симметричные ортоцентру H относительно соответствующих сторон треугольника ABC, M — середина стороны AC, P — точка пересечения луча MH с описанной окружностью треугольника ABC (см. рис. 10–11.6а).

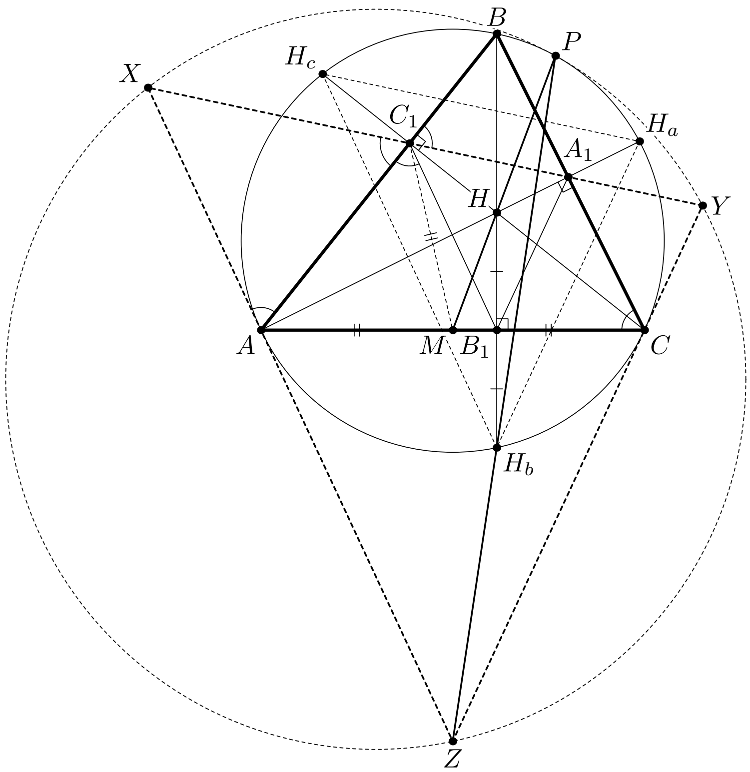

Рис. 10–11.6а

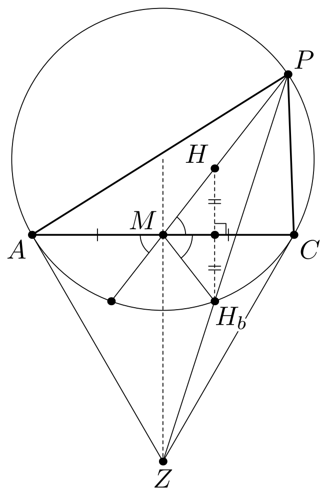

Рис. 10–11.6б

При доказательстве мы будем использовать несколько известных фактов:

1. *H_a, H_b и H_c лежат на описанной окружности треугольника ABC.*

2. *Треугольники $H_aH_bH_c$ и $A_1B_1C_1$ гомотетичны с центром в точке H.*

3. *H — центр вписанной окружности для треугольников $A_1B_1C_1$ и $H_aH_bH_c$.*

4. *PZ — симедиана (прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы) треугольника PAC.*

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

1) $B_1C_1 || AX$, $B_1A_1 || CY$.

Используя антипараллельность и угол между касательной и хордой, получим, что $\angle XAC_1 = \angle BCA = \angle B_1C_1A$, что и требовалось. Аналогично для другой пары прямых.

2) M — центр вписанной окружности треугольника XYZ.

Аналогично, в силу антипараллельности и предыдущего пункта, $\angle BCA = \angle BC_1A_1 = \angle XC_1A = \angle XAC_1$, то есть $XA = XC_1$. Учитывая, что $MA = MC_1$, получим, что XM — биссектриса угла AXC_1, что и требовалось.

3) Треугольники $H_cH_bH_a$ и XYZ гомотетичны.

Это следует из параллельности соответствующих сторон (см. факт 2 и утверждение 1)).

4) Z, H_b и P лежат на одной прямой.

Так как, в силу симметрии, $\angle PMC = \angle H_bMC$, то H_b лежит на симедиане, что и требовалось (см. рис. 10–11.6б и факты 1 и 4).

Вернемся к исходной задаче.

Докажем, что окружности касаются в точке P. Так как точка P принадлежит одной из окружностей, то достаточно доказать, что она является центром гомотетии, переводящей одну окружность в другую. Рассмотрим гомотетию, переводящую треугольник XYZ в треугольник $H_cH_bH_a$. Тогда окружность, описанная около треугольника XYZ переходит в окружность описанную около треугольника ABC.

При этом $M \to H$ (как центры вписанных окружностей), $Z \to H_b$, следовательно, центр гомотетии лежит на прямых MH и ZH_b, то есть, в точке P.

Комментарий. Про симедиану и ее свойства можно прочитать, например, в книге В. В. Прасолов, «Задачи по планиметрии», М.: МЦНМО, 2007, глава 5.

Второй способ. Воспользуемся следующим утверждением (без доказательства):

Пусть окружность касается двух сторон треугольника и его описанной окружности. Тогда отрезок, соединяющий точки касания со сторонами, содержит центр вписанной окружности (*см. рис.* 10–11.6*в*).

Докажем следующее: если окружность касается двух сторон треугольника, причем отрезок, соединяющий точки касания со сторонами, содержит центр вписанной окружности, то она касается описанной окружности треугольника.

Пусть это не так, тогда окружность, касающаяся двух сторон треугольника и его описанной окружности также удовлетворяет условию, что невозможно в силу гомотетии.

Применим доказанное утверждения для решения задачи.

Рассмотрим треугольник XYZ и окружность, описанную около треугольника ABC. Отрезок AC соединяющий точки касания проходит через M — центр вписанной окружности треугольника XYZ. Тогда, по доказанному, окружность, описанная около треугольника XYZ касается окружности, описанной около треугольника ABC, что и требовалось.

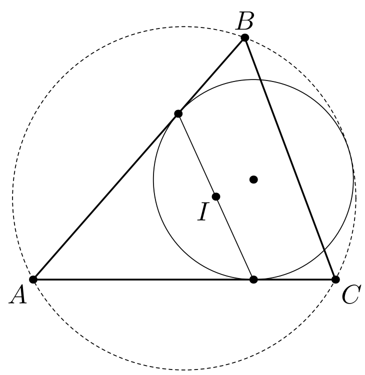

Рис. 10–11.6в

Комментарий. *Окружность, касающаяся двух сторон треугольника и его описанной окружности называется полувписанной.*

Доказательство вспомогательного утверждения и другие свойства полувписанной окружности — см., например, «Математика в задачах», М.: МЦНМО, 2009, глава 4.

Материалы подготовили: А. Акопян, А. Блинков, Ю. Блинков, И. Богданов, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников, Д. Прокопенко.