Девятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Одиннадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2013 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*И.Богданов*) В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане CL. Докажите, что в треугольнике BKL также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

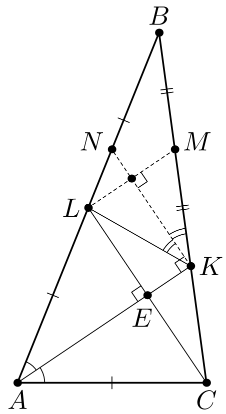


Рис. 8–9.1

Решение. Докажем, что биссектриса KN и медиана LM треугольника BKL перпендикулярны (см. рис. 8–9.1).

Пусть E — точка пересечения AK и CL. В треугольнике ACL биссектриса AE является высотой, следовательно, этот треугольник — равнобедренный, откуда $LE = CE$ и $CA = LA = LB$. Аналогично, равнобедренным является треугольник CKL (KE — высота и медиана), откуда KE — биссектриса угла LKC.

Биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $KN \perp AK$. Кроме того, LM — средняя линия в треугольнике ABK, то есть $LM||AK$, следовательно, $LM \perp KN$, что и требовалось.

Комментарий. Заметим, что биссектриса и медиана треугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна сторона треугольника вдвое больше другой.

Используя этот факт и свойство биссектрисы, можно получить, что в треугольнике BKL сторона BK вдвое больше, чем LK, что дает другой способ решения данной задачи.

2. (*А. Шаповалов*) Циркулем и линейкой разбейте данный треугольник на два меньших треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

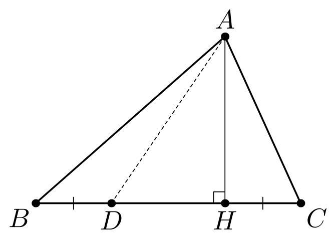


Рис. 8–9.2

Решение. Пусть B и C — острые углы треугольника, тогда высота AH попадет на сторону BC, а не на ее продолжение. Построим на BC такую точку D, чтобы $BD = CH$ (см. рис. 8–9.2). Тогда и $CD = BH$. Треугольники ABD и ACD — искомые. Действительно, по теореме Пифагора $AH^2 = AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$, поэтому $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$, откуда $AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$. Добавив к обеим частям последнего равенства слагаемое AD^2, получим равенство сумм квадратов сторон для указанных треугольников.

3. (*Д. Швецов*) Биссектрисы AA_1 и CC_1 прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке I. Прямая, проходящая через точку C_1 и перпендикулярная прямой AA_1, пересекает прямую, проходящую через A_1 и перпендикулярную CC_1, в точке K. Докажите, что середина отрезка KI лежит на отрезке AC.

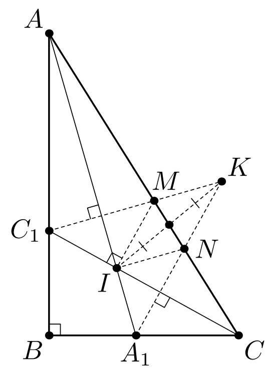


Рис. 8–9.3

Решение. Заметим, что $\angle AIC = 90^\circ + \frac{\angle B}{2} = 135^\circ$, а $\angle AIC_1 = 180^\circ - \angle AIC = 45^\circ$. Пусть данные прямые пересекают сторону AC в точках M и N соответственно (см. рис. 8–9.3). Докажем, что $MINK$ — параллелограмм, откуда следует утверждение задачи (свойство диагоналей параллелограмма). Заметим, что треугольник C_1AM — равнобедренный (биссектриса совпадает с высотой). Тогда треугольник C_1IM — также равнобедренный с основанием C_1M. Но $\angle AIC_1 = 45^\circ$, то есть $\angle CIM = 90^\circ$. Следовательно, прямые MI и KA_1 параллельны. Аналогично, $NI||C_1K$, то есть $MINK$ — параллелограмм, что и требовалось.

4. (*А. Блинков, Д. Мухин*) Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются на биссектрисе угла B.

Решение. Докажем, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются в инцентре (центре вписанной окружности) треугольника ABC (см. рис. 8–9.4). Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABI. Докажем, что она проходит через точку A_1. Это можно сделать, например, так:

Заметим, что $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$, а $\angle CA_1A = \angle CAA_1 = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} = 180^\circ - \angle AIB$, что и требовалось. Аналогично для окружности, описанной около треугольника BIC и точки C_1.

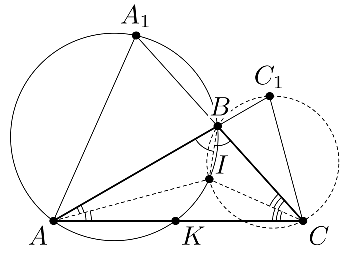


Рис. 8–9.4

Комментарий.

1. Центр окружности, описанной около треугольника AIB совпадает с серединой дуги AB окружности, описанной около треугольника ABC («теорема о трилистнике»), что можно использовать для другого способа доказательства: в силу симметрии, окружность, описанная около треугольника AIB пересекает сторону CB в точке, симметричной точке A, то есть в A_1.

2. На самом деле, задача является частным случаем следующего факта.

Пусть ABC — треугольник. Выберем на прямых AB и CB точки C_1 и A_1 соответственно так, что $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{AB}}|\overrightarrow{AB}| = \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{CB}}|\overrightarrow{CB}|$. Тогда описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются на биссектрисе угла ABC.

Приведём доказательство этого факта. Разберём случай, когда C_1 и A_1 лежат на лучах AB и CB соответственно. Пусть O, O_A, O_C — центры описанных окружностей треугольников ABC, ABA_1, CBC_1 соответственно. Достаточно доказать, что прямая O_AO_C перпендикулярна биссектрисе угла ABC (тогда общая хорда соответствующих окружностей параллельна этой биссектрисе и проходит через B).

Заметим, что OO_A и OO_C — серединные перпендикуляры к AB и CB, соответственно. Значит, биссектрисы углов O_AOO_C и ABC параллельны, поэтому достаточно доказать, что $OO_A = OO_C$. Заметим, что проекция OO_A на BC равна половине CA_1, а проекция OO_C на AB равна половине AC_1, то есть эти проекции равны. Равны также и углы $\angle(OO_A, CA_1)$ и $\angle(AC_1, O_CO)$. Значит, равны и исходные отрезки OO_A и OO_C, что и требовалось.

5. (*Ю.Блинков*) В треугольнике ABC: $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 45^\circ$. Пусть M — середина BC, H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что прямая MH проходит через середину дуги AB описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Также в первых двух способах решения точка W — середина дуги AB, O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Первый способ. Заметим, что достаточно доказать два утверждения:

1) прямая B_1O проходит через точку W.

2) прямые B_1O и HM симметричны относительны биссектрисы угла C (см. рис. 8–9.5а).

Тогда точка пересечения прямых B_1O и HM лежит на биссектрисе угла C, то есть совпадает с точкой W.

Первое утверждение следует из того, что $\angle A = 45^\circ$, следовательно, треугольник ABB_1 — равнобедренный прямоугольный, то есть точки B_1 и O лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

Докажем второе утверждение.

Используем два факта:

а) *прямые CO и CH симметричны относительно биссектрисы угла C.*

б) *Если $\angle C = 60^\circ$, то $CH = CO$.*

Для доказательства первого факта достаточно заметить, что $\angle ACO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = 90^\circ - \angle ABC = \angle BCH$.

Докажем второй факт. Пусть K — середина стороны AC, AA_1 — высота. Тогда, учитывая то, что $\angle C = 60^\circ$, получим: $CK = \frac{1}{2}AC = A_1K = CA_1$. Но, согласно пункту а), $\angle KCO = \angle A_1CH$, то есть треугольники KCO и A_1CH равны по катету и прилежащему углу.

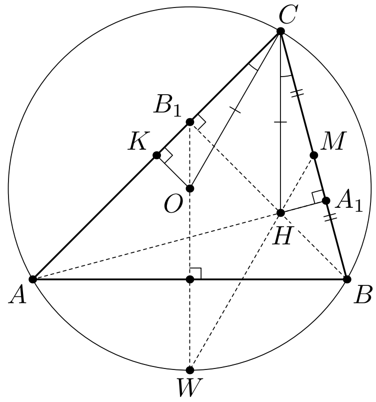


Рис. 8–9.5а

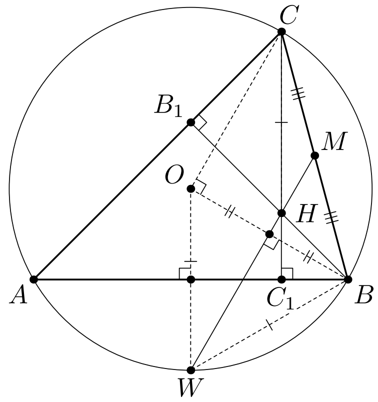


Рис. 8–9.5б

Второй способ. Заметим, что $\angle BOW = \frac{1}{2}\angle BOA = 60^\circ$, следовательно, треугольник BOW — равнобедренный с углом 60° при вершине, то есть равносторонний (см. рис. 8–9.5б). В предыдущем способе решения было доказано, что $CH = OC$. Тогда $CH = OW$ и $CH||OW$, следовательно, $OCHW$ — параллелограмм.

Заметим, что $\angle COB = 2\angle CAB = 90^\circ$, то есть $BO \perp WH$. Таким образом, WH — высота равнобедренного треугольника BWO, то есть она делит отрезок BO пополам. Поскольку $WH||CO$, то WH содержит среднюю линию треугольника BOC, то есть проходит через точку M.

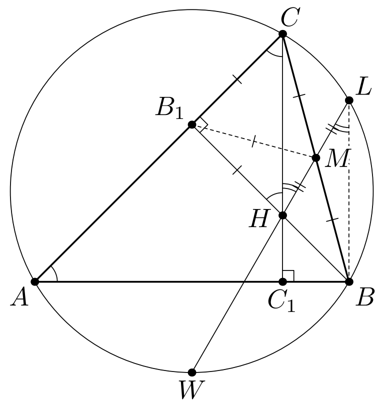


Рис. 8–9.5в

Третий способ. Пусть BB_1 — третья высота треугольника, W — точка пересечения луча MH с описанной окружностью, точка L симметрична точке H относительно точки M (см. рис. 8–9.5в). Докажем, что W — середина дуги AB. Воспользуемся тем, что *точка, симметричная ортоцентру относительно середины стороны, принадлежит описанной окружности*. Действительно, $\angle CLB = \angle CHB = 180^\circ - \angle A$. Докажем, что $\angle WLB = 30^\circ$, откуда и будет следовать утверждение задачи.

Поскольку B_1M — медиана прямоугольного треугольника с углом 60°, то $BM = CM = CB_1 = B_1M$ и $\angle BB_1M = 30^\circ$. Из прямоугольного треугольника ACC_1 получим, что $\angle ACC_1 = 90^\circ - \angle A = 45^\circ$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике HB_1C угол B_1HC равен 45° и $B_1C = B_1H$.

Таким образом, треугольник B_1HM — равнобедренный с углом 30° при вершине. Следовательно, $\angle CHM = \angle B_1HM - \angle B_1HC = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.

Поскольку $HBLC$ — параллелограмм, то $\angle HLB = \angle CHL = 30^\circ$. То есть W — середина дуги AB.

6. (*Ю. Зайцева*) Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC зафиксированы точки C_1 и A_1 соответственно. Найдите на описанной окружности треугольника ABC точку P такую, что расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APC_1 и CPA_1 минимально.

Ответ: P — диаметрально противоположна точке B.

Решение. *Первый способ.* Пусть K — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников APC_1 и CPA_1 (см. рис. 8–9.6а).

Докажем, что K лежит на прямой A_1C_1. Четырехугольники AC_1KP и KA_1CP — вписанные, следовательно, $\angle C_1KP = 180^\circ - \angle C_1AP$ и $\angle A_1KP = 180^\circ - \angle A_1CP$. С другой стороны, из вписанного четырехугольника $ABCP$ получаем, что $\angle C_1AP + \angle A_1CP = 180^\circ$. Таким образом, $\angle C_1KP + \angle A_1KP = 180^\circ$, то есть точка K лежит на прямой A_1C_1.

При другом расположении точки P (на дуге AB или BC) доказательство аналогично.

Комментарий. Отметим, что на самом деле мы доказываем следующий факт: пусть на сторонах AB, BC и AC (или на их продолжениях) треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1 и B_1. Тогда описанные окружности треугольников AC_1B_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 пересекаются в одной точке.

Пусть M_A и M_C — середины отрезков C_1K и A_1K, O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников APC_1 и CPA_1 соответственно. Тогда O_1M_A — серединный перпендикуляр к C_1K, O_2M_C — серединный перпендикуляр к A_1K. Следовательно, $M_AM_C = \frac{A_1C_1}{2}$, а $M_AM_CO_2O_1$ — прямоугольная трапеция. Тогда $O_1O_2 \geqslant M_AM_C$, а равенство достигается тогда и только тогда, когда $O_1O_2 || M_AM_C$.

Таким образом, $O_1O_2 \geqslant \frac{A_1C_1}{2}$ и минимальное значение O_1O_2 равно $\frac{A_1C_1}{2}$.

Определим, при каком расположении точки P достигается минимум длины отрезка O_1O_2. Линия центров двух окружностей перпендикулярна общей хорде, поэтому $O_1O_2 \perp$ $\perp KP$. То есть, необходимо найти, при каком положении точки P прямые KP и A_1C_1 перпендикулярны.

В этом случае $\angle C_1KP = 90^\circ$. Четырёхугольник AC_1KP — вписанный, следовательно, $\angle BAP = 90^\circ$. Значит, расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APC_1 и CPA_1 минимально, когда точка P диаметрально противоположна точке B.

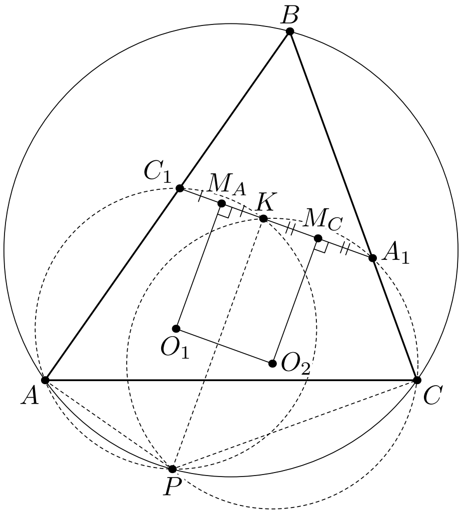


Рис. 8–9.6а

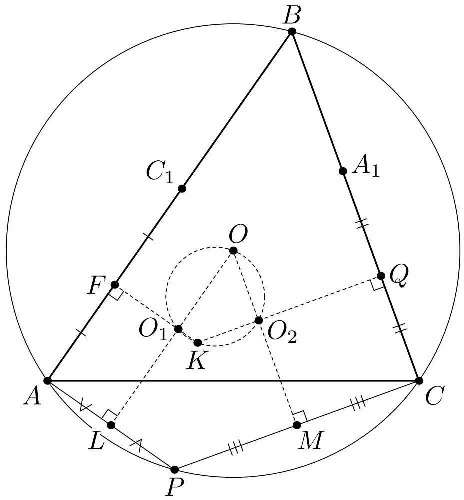


Рис. 8–9.6б

Второй способ. Центр окружности, описанной вокруг треугольника APC_1 лежит на серединном перпендикуляре FO_1 к отрезку AC_1, аналогично, центр окружности, описанной вокруг треугольника CPA_1 лежит на серединном перпендикуляре QO_2 к отрезку A_1C (см. рис. 8–9.6б). Пусть K — точка пересечения прямых FO_1 и QO_2. Поскольку A_1 и C_1 — фиксированные точки, то точка K и угол между прямыми O_1K и KO_2 — также фиксированы.

Точки O и O_1 лежат на серединном перпендикуляре LO к отрезку AP, аналогично, точки O и O_2 лежат на серединном перпендикуляре MO к отрезку CP. Четырехугольник $LOMP$ — вписанный, следовательно, $\angle LOM = 180^\circ - \angle P = \angle B$. Четырехугольник $FBQK$ — также является вписанным, поэтому $\angle O_1KO_2 = 180^\circ - \angle B$. Таким образом, $\angle O_1KO_2 + \angle O_1OO_2 = 180^\circ$, поэтому O_1OO_2K — вписанный. По следствию из теоремы синусов, $\frac{O_1O_2}{\sin O_1KO_2} = 2R$. Следовательно, длина отрезка O_1O_2 будет минимальной, когда радиус описанной окружности четырехугольника O_1OO_2K будет минимальным. Поскольку OK — хорда этой окружности, а точки O и K — фиксированы, то минимальный диаметр этой окружности равен OK. В этом случае $\angle OO_1K = 90^\circ$. В четырехугольнике AFO_1L углы F, O_1 и L равны 90°, следовательно и угол A также равен 90°. Таким образом, PB — диаметр окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Комментарий. При другом взаимном расположении точек O_1, O_2, O и K (например, если точка O_1 лежит между точками K и O_2) доказательство аналогично.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, И. Богданов, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников, А. Шаповалов, Д. Швецов.

Девятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Одиннадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2013 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*Ю. Блинков*) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на стороне AD. Докажите, что точка O — центр вписанной окружности треугольника BMC.

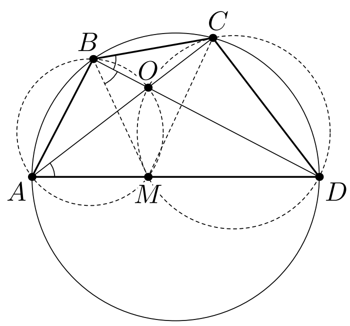
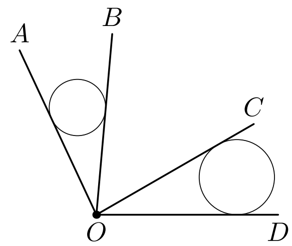


Рис. 10–11.1

Решение. Из равенства вписанных углов следует, что $\angle OBC = \angle DBC = \angle DAC = \angle MAO = \angle MBO$ (см. рис. 10–11.1), то есть BO — биссектриса угла MBC. Аналогично, CO — биссектриса угла BCM. Следовательно, O — центр вписанной окружности треугольника BMC, что и требовалось.

Комментарий. Несложно доказать, что AD — диаметр данной окружности. Из этого следует, например, что O является ортоцентром треугольника, образованного прямыми AB, DC и AD.

2. (*Ф. Нилов*) Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC, причём $\angle AOB = \angle COD$. В углы AOB и COD вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла AOD.



Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей с радиусами R_1 и R_2 соответственно, L — точка пересечения касательных (см. рис. 10–11.2). Так как данные углы равны и L лежит на отрезке O_1O_2, то достаточно доказать, что OL — биссектриса треугольника O_1OO_2. Заметим, что окружности гомотетичны с центром L, то есть $\frac{O_1L}{O_2L} = \frac{R_1}{R_2}$. С другой стороны, из подобия прямоугольных треугольников следует, что $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{R_1}{R_2}$. То есть $\frac{O_1L}{O_2L} = \frac{OO_1}{OO_2}$, откуда следует, что OL — биссектриса треугольника O_1OO_2.

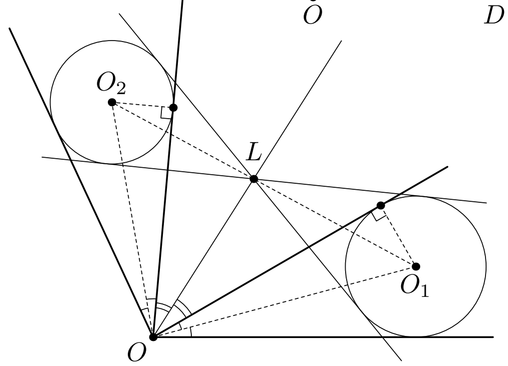


Рис. 10–11.2

Комментарий. Отметим, что если рассматривать не внутренние касательные, а внешние, то точка их пересечения будет лежать на биссектрисе соответствующего внешнего угла, то есть, на прямой, перпендикулярной OL.

3. (*А. Шаповалов*) Существует ли многогранник, у которого отношение площадей любых двух граней не меньше 2?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Допустим, такой многогранник существует. Выпишем площади его граней в порядке убывания: S_1, S_2, ..., S_n. По условию $S_2 \leqslant \frac{S_1}{2}$, $S_3 \leqslant \frac{S_2}{2} \leqslant \frac{S_1}{2^2}$, ..., $S_n \leqslant \frac{S_{n-1}}{2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{S_1}{2^{n-1}}$. Но тогда $S_2 + S_3 + \ldots + S_n \leqslant \frac{S_1}{2} + \frac{S_1}{2^2} + \ldots + \frac{S_1}{2^{n-1}} = \Big(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\Big)S_1 < S_1$.

Спроецируем все грани на плоскость грани S_1. Воспользуемся тем, что площадь проекции не превосходит площади самой грани. Кроме того, проекции остальных граней покроют S_1. Поэтому S_1 не больше суммы площадей проекций остальных граней, следовательно, $S_1 \leqslant S_2 + S_3 + \ldots + S_n$. Получили противоречие.

4. (*С. Синицын, К. Кноп, В. Воронов*) На сторонах четырехугольника $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями во внешнюю сторону построены подобные треугольники ABM, CBP, CDL и ADK (соседние ориентированы по-разному). Докажите, что $PK = ML$.

Решение. Из подобия треугольников следует, что $\frac{MB}{AB} = \frac{PB}{BC} = \frac{DL}{DC} = \frac{DK}{DA}$ (см. рис. 10–11.4а). Заметим, что $\overrightarrow{PK} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{DK}) + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{ML} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DL}) + \overrightarrow{BD}$. Рассмотрим суммы в скобках. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{DK}$ получается из $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$ поворотом на угол $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP})$ и умножением на $\frac{PB}{BC}$. Аналогично, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DL}$ получается из $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ поворотом на угол, противоположный $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP})$ и умножением на $\frac{MB}{AB} = \frac{PB}{BC}$.

Заметим, что $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{ZX}$, а $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{TY}$ (см. рис. 10–11.4б). Поскольку диагонали перпендикулярны, то эти векторы симметричны относительно BD, следовательно, суммы в скобках тоже симметричны относительно BD, и при прибавлении к ним $\overrightarrow{BD}$ получаются векторы одинаковой длины.

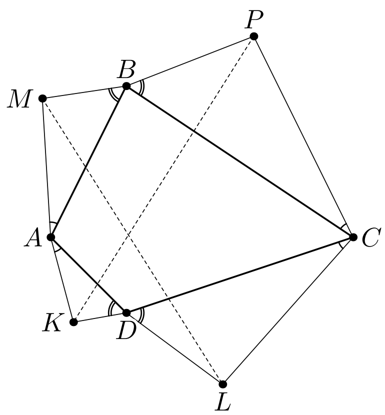


Рис. 10–11.4а

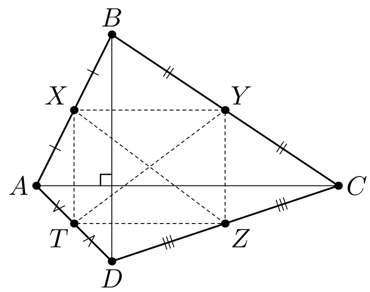


Рис. 10–11.4б

5. (*Ф. Ивлев*) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и BQ, а также медиана CM. Точка R — середина CM. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке T. Докажите, что $OR \perp TC$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Решение. *Первый способ.* Пусть H — ортоцентр треугольника, O_1 — середина CH (см. рис. 10–11.5а). Заметим, что достаточно доказать два утверждения:

1) Прямая OR проходит через точку O_1.

2) $OO_1 \perp CT$.

Для доказательства первого утверждения воспользуемся тем, что $OM || CH$ и $OM = \frac{1}{2}CH = O_1C$, то есть $MOCO_1$ — параллелограмм.

Докажем второе утверждение.

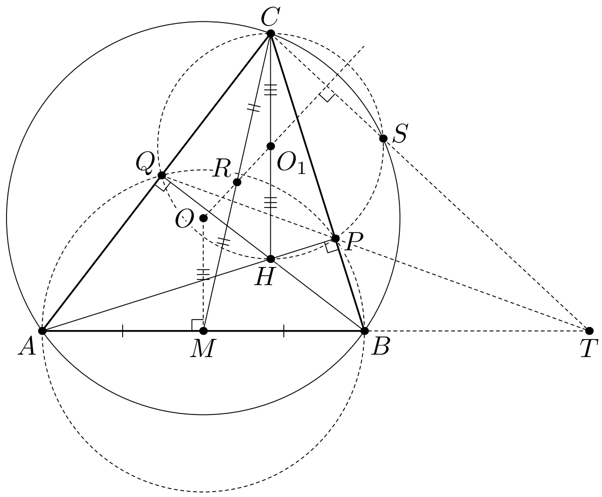


Рис. 10–11.5а

Пусть S — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников ABC (с центром O) и PQC (с центром O_1). Также рассмотрим окружность с диаметром AB. Тогда AB, PQ и CS являются радикальными осями пар данных окружностей, а следовательно пересекаются в одной точке (радикальном центре). То есть S принадлежит прямой CT — радикальной оси окружностей, описанных около треугольников ABC и PQC. Следовательно, $CT \perp OO_1$, что и требовалось.

Второй способ. Проведем высоту CL (см. рис. 10–11.5б). Заметим, что R — центр описанной окружности прямоугольного треугольника CLM. Докажем, что TC — радикальная ось описанных окружностей треугольников ABC и CLM. Тогда она перпендикулярна линии центров этих окружностей, то есть прямой OR, что и требуется.

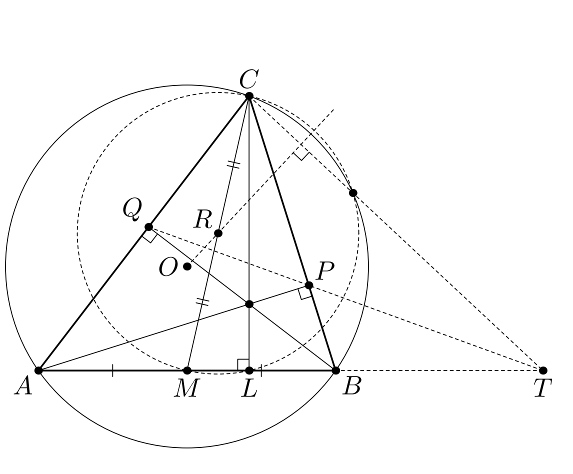


Рис. 10–11.5б

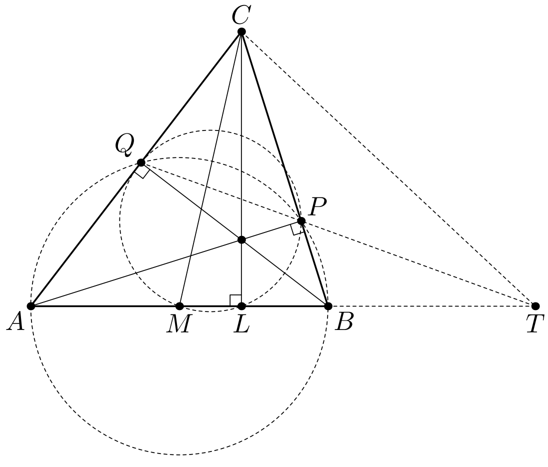


Рис. 10–11.5в

Точка C лежит на радикальной оси этих окружностей, как одна из точек пересечения. Докажем, что степени точки T относительно этих окружностей равны.

Рассмотрим окружность Эйлера треугольника ABC (она содержит точки P, Q, L и M) и окружность, описанную вокруг четырехугольника $AQPB$ (см. рис. 10–11.5в). Тогда $TL \cdot TM = TP \cdot TQ = TB \cdot TA$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Отметим, что в первом способе была доказана параллельность прямых MH и OR (см. рис. 10–11.5а). Поэтому достаточно доказать, что $MH \perp CT$. Это можно сделать, например, используя свойства полярного соответствия.

Рассмотрим окружность, описанную около четырехугольника $AQPB$. Прямая CT является полярой точки H относительно данной окружности. Поскольку M — центр окружности, то $MH \perp CT$, что и требовалось.

Определение и свойства поляры см., например, Я. П. Понарин, Элементарная геометрия, том 1, §18.

6. (*В. Протасов*, *А. Заславский*) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность w ($AD||BC$). Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности w, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности w.

Решение. *Первый способ.* 1) Заметим, что X и Y — диаметрально противоположные точки, следовательно, $\angle XAY = \angle XBY = 90^\circ$. Докажем, что прямые XP и YQ перпендикулярны, откуда будет следовать утверждение задачи.

2) Пусть I и J — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ABD соответственно. Тогда по «теореме о трилистнике» $XB = XI$ и $YA = YJ$. Кроме того, $\angle BXI = \angle BXA = \angle BCA = \angle BDA = \angle BYA = \angle JYA$. Следовательно, равнобедренные треугольники XBI и YJA подобны, а их стороны, согласно пункту 1, — перпендикулярны.

Тогда при поворотной гомотетии, переводящей один треугольник в другой, прямая JQ переходит в прямую BC, а прямая AQ — в прямую IP. То есть P и Q — соответствующие точки этих треугольников, а значит XP перпендикулярна YQ, что и требовалось.

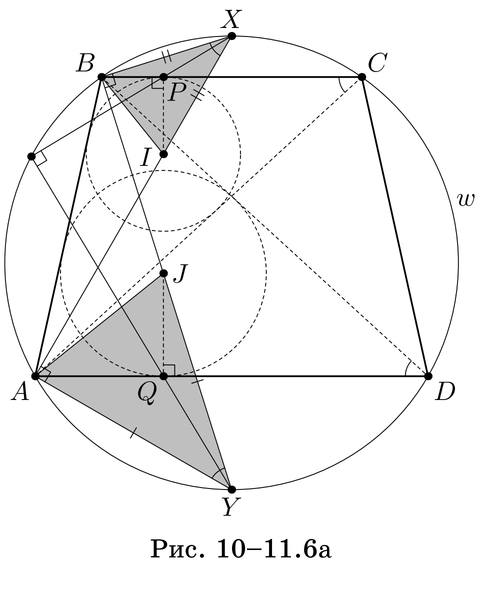


Рис. 10–11.6а

Второй способ. Используем лемму Саваямы:

На стороне AC треугольника ABC выбрали произвольную точку M. Окружность w касается описанной окружности треугольника ABC, отрезка MB в точке P, Q — точка касания окружности w и прямой AC. Тогда точка I (*центр вписанной окружности треугольника ABC*) *лежит на прямой QP* (*см. рис.* 10–11.6*б*).

Лемма верна и в случае, когда M лежит на прямой AC, P и Q — точки касания окружности w и прямых BM и AC (при этом описанная окружность треугольника ABC и окружность w могут касаться внешним образом). При этом, в некоторых случаях расположения точек, центр вписанной окружности может заменяться на один из центров вневписанных окружностей треугольника ABC.

Воспользуемся тем, что отрезок, соединяющий точки касания содержит инцентр и в случае, когда точка M лежит на прямой AC, а окружность w касается описанной окружности треугольника ABC внутренним образом и касается отрезка AC (а не прямой) (см. рис. 10–11.6в). Тогда и в предельном случае (когда прямая BM параллельна прямой AC) отрезок, соединяющий точки касания, содержит инцентр треугольника ABC.

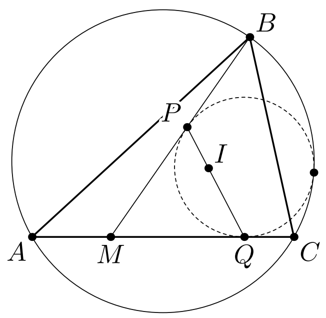


Рис. 10–11.6б

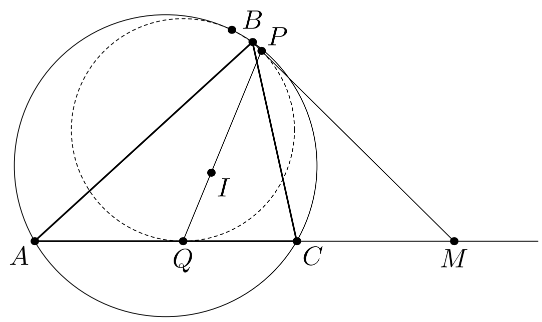


Рис. 10–11.6в

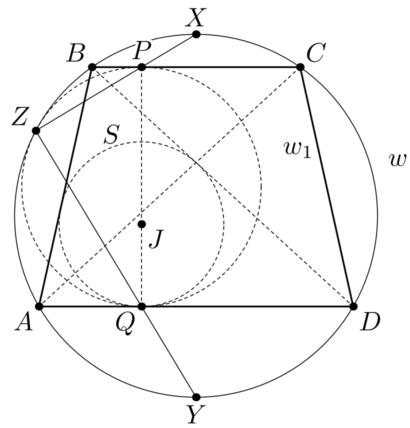


Рис. 10–11.6г

Рассмотрим окружность S, вписанную в треугольник ABD и окружность w_1, касающуюся прямых AD и BC и окружности w в точке Z (см. рис. 10–11.6г). Докажем, что прямая YQ проходит через точку Z, откуда следует утверждение задачи. По лемме Саваямы для треугольника ABD и прямой BC, прямая, проходящая через точки касания окружности w_1 с прямыми AD и BC, содержит центр J окружности S, вписанной в треугольник ABD. То есть, окружности S и w_1 касаются в точке Q. Тогда по лемме Архимеда для окружностей w и w_1 и прямой AD получим, что прямая ZQ проходит через середину Y дуги AD, что и требовалось.

Комментарий. Подробнее о лемме Саваямы см. статью В. Ю. Протасова, «*Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха*», журнал «Квант», 2008 год, №4 (http://kvant.mccme.ru/pdf/2008/2008-04.pdf).

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, И. Богданов, А. Горская, А. Заславский, Ф. Ивлев, П. Кожевников, А. Шаповалов.