Одиннадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Тринадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 12 апреля 2015 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*Ю.Блинков*) В треугольнике ABC высота AH проходит через середину медианы BM. Докажите, что в треугольнике BMC также одна из высот проходит через середину одной из медиан.

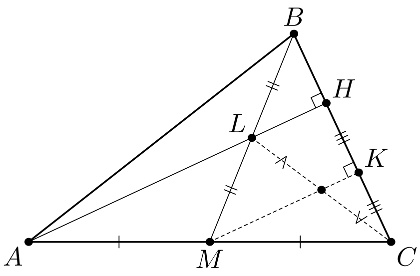

Рис. 8–9.1

Решение. Пусть L — точка пересечения AH и BM, тогда CL — медиана треугольника BMC. Докажем, что высота MK этого треугольника делит CL пополам. Действительно, поскольку M — середина AC и $MK \parallel AH$, то MK — средняя линия треугольника ACH, а следовательно и треугольника ACL, что и требовалось.

Комментарий. Отметим, что $BH = HK = KC$.

2. (*Ю.Блинков*) Квадрат $ABCD$ и равносторонний треугольник MKL расположены так, как это показано на рисунке. Найдите угол PQD.

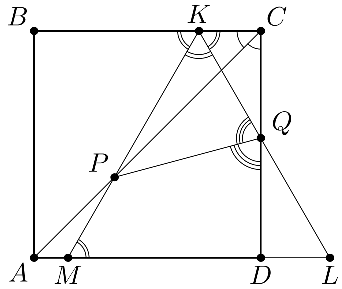

Рис. 8–9.2

Ответ: 75°.

Решение. Докажем, что P — центр вневписанной окружности треугольника CKQ (см. рис. 8–9.2). Действительно, поскольку P лежит на диагонали квадрата, то CP — биссектриса угла KCQ. Кроме того, $\angle BKM = \angle KML = \angle MKL = 60^\circ$, откуда следует, что KP — биссектриса угла BKQ (внешнего угла для треугольника CKQ).

Таким образом, P — центр вневписанной окружности треугольника CKQ, то есть, QP — биссектриса угла KQD. Поскольку $\angle KQC = 90^\circ - \angle CKQ = 30^\circ$, то $\angle PQD = \angle PQK = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$.

3. (*М.Васильев*) В треугольнике ABC на сторонах AC, BC и AB отметили точки D, E и F соответственно, так, что $AD = AB$, $EC = DC$, $BF = BE$. После этого стерли все, кроме точек E, F и D. Восстановите треугольник ABC (*исследование проводить не требуется*).

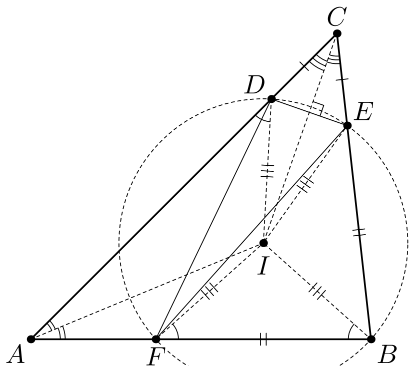

Рис. 8–9.3

Решение. Заметим, что серединные перпендикуляры к отрезкам DE и EF содержат биссектрисы треугольника ABC. Следовательно, центр I описанной окружности треугольника DEF совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC (см. рис. 8–9.3).

Поскольку $AD = AB$ и AI — биссектриса угла A треугольника ABC, то $\triangle ADI = \triangle ABI$. Следовательно, $DI = BI$. То есть, B лежит на описанной окружности треугольника DEF.

Отсюда вытекает следующее построение:

1) находим I как точку пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам DE и EF;

2) находим B как точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку EF и окружности, описанной вокруг треугольника DEF;

3) находим A как точку пересечения серединного перпендикуляра к BD и прямой BF;

4) находим C как точку пересечения прямых AD и BE.

Комментарий. Также можно было использовать, что четырехугольник $ADIF$ — вписанный.

4. (*Л.Штейнгарц*) В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекаются в точке E, лежащей на боковой стороне BC. Эти биссектрисы разбивают трапецию на три треугольника, в которые вписали окружности. Одна из этих окружностей касается основания AB в точке K, а две другие касаются биссектрисы DE в точках M и N. Докажите, что $BK = MN$.

Решение. Заметим, что $\angle AED = 90^\circ$ (сумма углов A и D равна 180°, DE и AE — биссектрисы, см. рис. 8–9.4а). Докажем, что $AD = AB + CD$ и $CE = BE$. Пусть F — точка пересечения прямых DE и AB. Тогда в треугольнике ADF отрезок AE является высотой и биссектрисой, следовательно, этот треугольник — равнобедренный и $DE = EF$. Тогда, в силу параллельности, треугольники DCE и FBE равны (по стороне и двум углам). Следовательно, $CE = BE$ и $DC = FB$, откуда $AD = AF = AB + BF = AB + CD$.

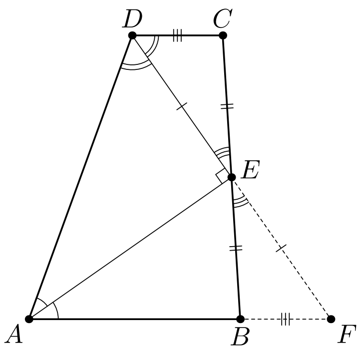

Рис. 8–9.4а

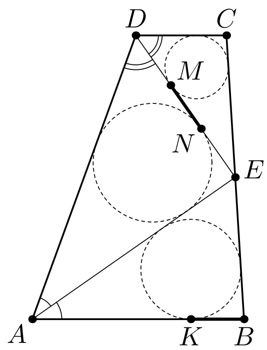

Рис. 8–9.4б

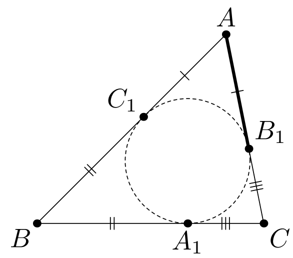

Рис. 8–9.4в

В дальнейших рассуждениях несколько раз воспользуемся следующим фактом:

Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC (см. рис. 8–9.4в). Тогда $AB_1 = p - BC$ (где p — полупериметр треугольника ABC).

Выразим длины отрезков MN и BK (см. рис. 8–9.4б): $MN = DN - DM = p_{ADE} - AE - (p_{DCE} - CE)$, $BK = p_{ABE} - AE$. Тогда $MN - BK = p_{ADE} - p_{DCE} - p_{ABE} + CE = \frac{1}{2}(AD + DE + AE - DC - CE - DE - AB - AE - BE + 2CE) = 0$, что и требовалось. Точки M и N расположены на отрезке DE именно в таком порядке, как показано на рисунке 8–9.4б, в силу равенства $(DN - DM) - BK = 0$. То есть, $DN > DM$.

Комментарий. Отметим, что поскольку $AD = AB + DC$ и DE и AE — биссектрисы углов D и A соответственно, то треугольники DCE и ABE можно «перегнуть» по сторонам DE и AE внутрь треугольника ADE так, что точки C и B совпадут и окажутся на отрезке AD. То есть, задачу можно было свести к такому известному факту:

В треугольнике ABC провели чевиану BK. M, L и N — точки касания вписанных окружностей треугольников ABK, CBK и ABC со стороной AC (см. рис. 8–9г). Тогда $MK = NL$.

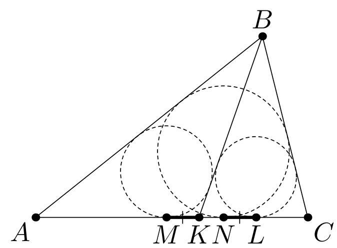

Рис. 8–9.4г

Подробнее, например, см. статью «Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике... », журнал «Квант», 2012/№2.

5. (*Д.Прокопенко*) На стороне BE правильного треугольника ABE вне его построен ромб $BCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке F. Докажите, что $AF < BD$.

Решение. Заметим, что треугольник ABC — равнобедренный, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$ (см. рис. 8–9.5). Кроме того, в силу симметрии, $\angle BCA = \angle BEF$. Следовательно, $\angle BAF = \angle BEF$, то есть, четырехугольник $ABFE$ — вписанный. Тогда $\angle AFE = \angle ABE = 60^\circ$ и $\angle DFE = \angle BAE = 60^\circ$. Также $\angle FDE = \angle FBE = \angle FAE$. Тогда $\angle AEF = \angle DEF$. Следовательно, треугольник AEF равен треугольнику DEF по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AF = DF < BD$, что и требовалось.

Комментарий. Равенство углов AEF и DEF можно доказать и непосредственным подсчетом, не используя вписанных углов. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \angle BEF = \alpha$, тогда $\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$, то есть, $\angle EBC = 120^\circ - 2\alpha$. Следовательно, $\angle BED = 60^\circ + 2\alpha$, то есть, $\angle FED = 60^\circ + \alpha = \angle FEA$.

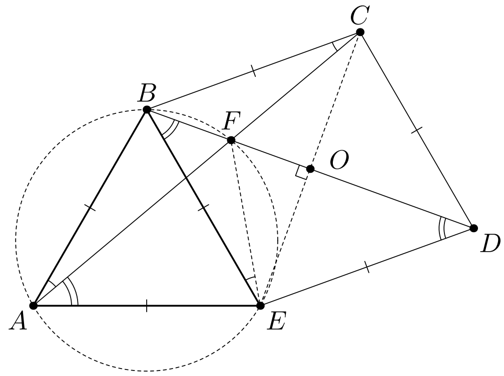

Рис. 8–9.5

6. (*А. Якубов*) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH. На сторонах AC и AB отмечены точки B_1 и C_1 соответственно, так, что HA — биссектриса угла B_1HC_1 и четырехугольник BC_1B_1C — вписанный. Докажите, что B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC.

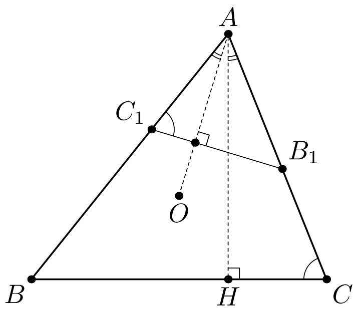

Рис. 8–9.6а

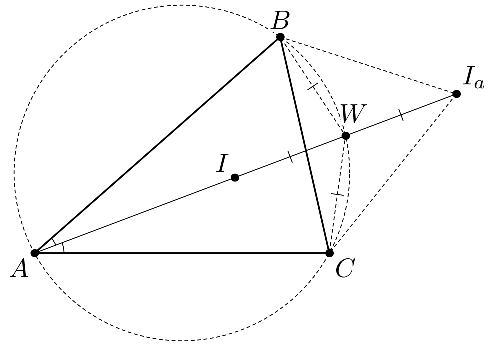

Рис. 8–9.6б

Решение. *Первый способ.* Воспользуемся следующими известными фактами:

1) Пусть отрезок C_1B_1 — антипараллелен стороне BC треугольника ABC (см. рис. 8–9.6а). Тогда центр описанной окружности треугольника AC_1B_1 лежит на высоте AH треугольника ABC.

2) (*Лемма о трезубце*) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, W — середина дуги BC его описанной окружности, I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC (см. рис. 8–9.6б). Тогда $WI = WB = WC = WI_a$.

Перейдем к решению. Пусть O — центр описанной окружности треугольника AB_1C_1 (см. рис. 8–9.6в). Четырехугольник BC_1B_1B — вписанный, следовательно, B_1C_1 и BC антипараллельны, то есть, O лежит на AH (утверждение 1).

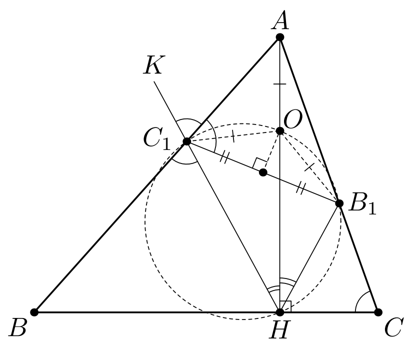

Рис. 8–9.6в

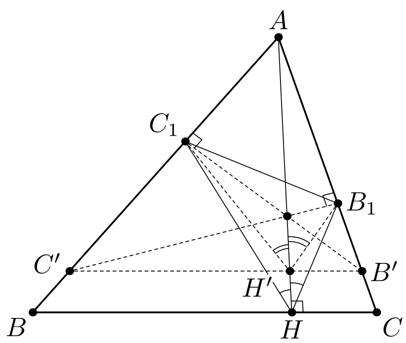

Рис. 8–9.г

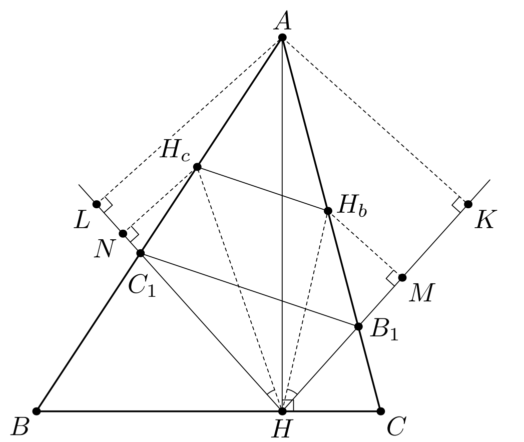

Рис. 8–9.д

Заметим, что O принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку B_1C_1. Рассмотрим треугольник HB_1C_1. Биссектриса HA и серединный перпендикуляр к стороне B_1C_1 не совпадают, поэтому пересекаются в середине O дуги B_1C_1 его описанной окружности. С другой стороны, поскольку O — центр описанной окружности треугольника AB_1C_1, то $OA = OB_1 = OC_1$. Следовательно, A — центр вневписанной окружности треугольника HB_1C_1 (утверждение 2). Тогда $\angle BC_1H = \angle KC_1A = \angle AC_1B_1 = \angle ACB$. То есть, четырехугольник AC_1HC — вписанный, откуда $\angle CC_1A = \angle CHA = 90^\circ$, что и требовалось.

В двух следующих решениях воспользуемся тем, что высоты треугольника содержат биссектрисы углов его ортотреугольника. Заметим, что если одна из точек B_1 или C_1 является основанием высоты, то и другая тоже.

Второй способ. Пусть B_1 и C_1 — не основания высот. Тогда восстановим из этих точек перпендикуляры до пересечения с прямыми AC и AB в точках B' и C' соответственно (см. рис. 8–9.6г). Тогда $C'B_1$ и $B'C_1$ — высоты в треугольнике $AB'C'$, следовательно, B_1C_1 и $B'C'$ антипараллельны. Поскольку B_1C_1 и BC также антипараллельны, то $BC \parallel B'C'$, то есть, AH' — высота в треугольнике $AB'C'$ (H' — точка пересечения AH и $B'C'$).

Тогда $\angle C_1H'A = \angle B_1H'A$. По условию, $\angle C_1HA = \angle B_1HA$, следовательно, треугольники C_1HH' и B_1HH' равны, откуда $HB_1 = HC_1$. Тогда $HA \perp B_1C_1$, следовательно, $B_1C_1 \parallel BC$, то есть, треугольник ABC — равнобедренный. Полученное противоречие показывает, что B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC.

Третий способ. Пусть B_1 и C_1 — не основания высот. Тогда проведем высоты BH_b и CH_c (см. рис. 8–9.6д). Также, пусть AK, AL, H_cN и H_bM — перпендикуляры к прямым HC_1 и HB_1. Поскольку $B_1C_1 \parallel H_bH_c$, то, $\frac{H_cN}{AL} = \frac{H_cC_1}{AC_1} = \frac{H_bB_1}{AB_1} = \frac{H_bM}{AK}$. Поскольку HA — биссектриса угла C_1HB_1, то $AK = AL$, поэтому $H_cN = H_bM$. Так как HA также биссектриса угла H_cHH_b, то $\angle H_cHN = \angle H_bHM$, следовательно, треугольники HH_cN и HH_bM равны. То есть, ортотреугольник треугольника ABC — равнобедренный, поэтому ABC — тоже равнобедренный, противоречие.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Грибалко, А. Заславский, Д. Прокопенко.

Одиннадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Тринадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 12 апреля 2015 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*Фольклор*) У двух трапеций соответственно равны углы и диагонали. Верно ли, что такие трапеции равны?

Ответ: нет, неверно.

Решение. *Первый способ.* Рассмотим две равнобокие трапеции с соответственно параллельными сторонами, вписанные в одну окружность (см. рис. 10–11.1а). Тогда углы трапеций равны. Заметим, что $\frac{BD}{\sin\angle BAD} = 2R = \frac{B_1D_1}{\sin\angle B_1A_1D_1}$, следовательно, $BD = B_1D_1$, то есть, диагонали этих трапеций также равны.

Комментарий. Равенство диагоналей можно получить, используя равенство дуг: $\smile BB_1 = \smile CC_1 = \smile DD_1$, откуда $\smile BD = \smile B_1D_1$, то есть, $BD = B_1D_1$.

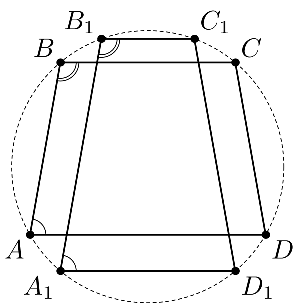

Рис. 10–11.1а

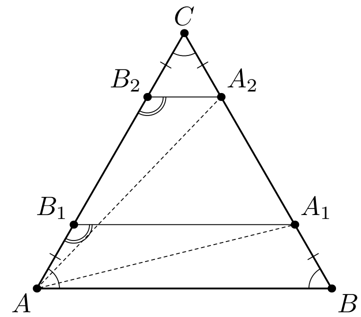

Рис. 10–11.1.б

Второй способ. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC. Пусть A_1 и A_2 — точки на стороне BC, а B_1 и B_2 — точки на стороне AC такие, что $BA_1 = A_2C = CB_2 = AB_1$ (см. рис. 10–11.1б). Тогда трапеции AB_2A_2B и AB_1A_1B — искомые.

2. (*М.Панов*) Прямая l перпендикулярна одной из медиан треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам этого треугольника пересекают прямую l в трех точках. Докажите, что одна из них является серединой отрезка, образованного двумя оставшимися.

Решение. Пусть прямая l перпендикулярна медиане BM, а серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекают l в точках X, Y и Z (см. рис. 10–11.2). Точки K, M, L — середины сторон треугольника, O — центр описанной окружности, N — точка пересечения l и BM.

Используя перпендикулярность прямых, получим, что $\angle XOY = \angle BAC$, $\angle YOZ = \angle BCA$, $\angle OXZ = \angle ABM$, $\angle OZX = \angle CBM$.

Дальше можно рассуждать различными способами.

Первый способ. Треугольники YOX и MAB подобны, следовательно, $\frac{YX}{MB} = \frac{YO}{MA}$. Треугольники YOZ и MCB также подобны, следовательно, $\frac{YZ}{MB} = \frac{YO}{MC}$. Поскольку $MA = MC$, то $YX = YZ$, что и требовалось.

Второй способ. Продлим медиану BM на ее длину (см. рис. 10–11.2). Тогда треугольники BAD и XOZ подобны. Поскольку AM — медиана в треугольнике BAD и $\angle BAM = \angle XOY$, то OY — медиана в треугольнике XOZ, что и требовалось.

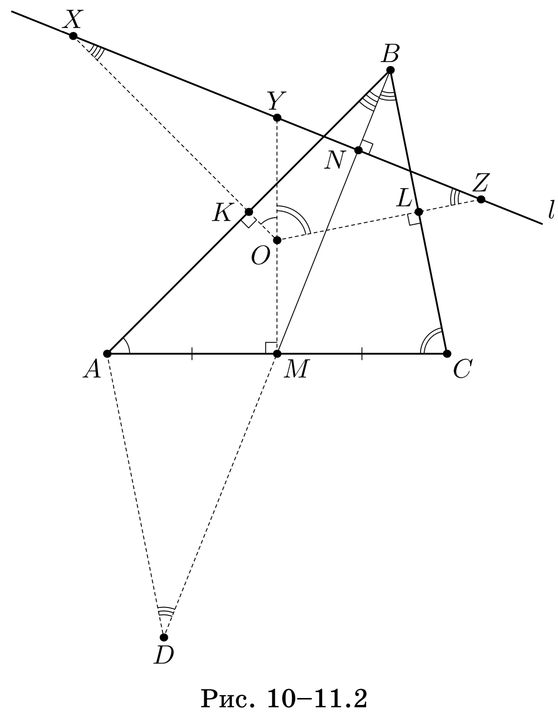

Рис. 10–11.2

Комментарий. Отметим, что утверждение задачи верно для произвольной тройки прямых, перпендикулярных сторонам треугольника и пересекающихся в одной точке.

3. (*Ю. Блинков*) O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Прямая, проходящая через C и точку, симметричную B относительно O, пересекает основание AD в точке K. Докажите, что $S_{AOK} = S_{AOB} + S_{DOK}$.

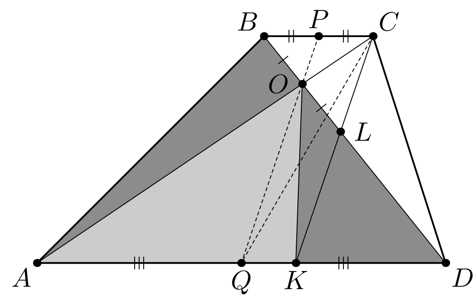

Рис. 10–11.3

Решение. Поскольку $BC \parallel AD$, то $S_{ABD} = S_{ACD}$, следовательно, $S_{AOB} = S_{DOC}$. Поэтому достаточно доказать, что $S_{AOK} = \frac{1}{2}S_{ACD}$. Пусть P и Q — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ (см. рис. 10–11.3). Заметим, что прямая PQ проходит через точку O и параллельна прямой CK. Далее можно рассуждать различными способами.

Первый способ. Пусть $\frac{AD}{BC} = \frac{a}{b}$. Поскольку $QPCK$ — параллелограмм, то $QK = PC$, следовательно, $\frac{AK}{AD} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) : a = (a+b) : 2a$. С другой стороны, $AO : AC = a : (a+b)$. То есть, $S_{AOK} : S_{ACD} = \frac{AO \cdot AK \sin\angle CAD}{AC \cdot AD \sin\angle CAD} = \frac{AK}{AD} \cdot \frac{AO}{AC} = \frac{a+b}{2a} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$.

Второй способ. CQ — медиана треугольника ACD, откуда $\frac{1}{2}S_{ACD} = S_{CQD} = S_{CQK} + S_{CKD}$. Поскольку $CK \parallel OQ$, то $S_{CQK} = S_{COK}$, следовательно, $S_{CQK} + S_{CKD} = S_{COK} + S_{CKD} = S_{OCDK}$, что и требовалось.

Комментарий. Также возможно решение с помощью аффинных преобразований, переводящее данную трапецию в равнобокую. Отношение площадей при этом сохраняется. Подробнее про аффинные преобразования см., например, Я. П. Понарин, «Элементарная геометрия», т. 1, глава 2, §23.

4. (*А. Гаркавый*) В треугольнике ABC: точка M — середина BC, P — точка пересечения касательных в точках B и C к описанной окружности, N — середина отрезка MP. Отрезок AN пересекает описанную окружность в точке Q. Докажите, что $\angle PMQ = \angle MAQ$.

Решение. Достаточно доказать, что MN — касательная к окружности, описанной вокруг треугольника AMQ, то есть, равенство $NM^2 = NQ \cdot NA$ (см. рис. 10–11.4). Обозначим через $\deg_w N$ степень точки N относительно описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\deg_w N = NO^2 - R^2 = (NM + OM)^2 - R^2 = NM^2 + 2NM \cdot OM + OM^2 - R^2 = NM^2 + PM \cdot OM + OM^2 - R^2$. Поскольку PB — касательная к окружности, а M — середина хорды BC, то треугольник BOP — прямоугольный с высотой BM, следовательно, $PM \cdot OM = BM^2$. Тогда $\deg_w N = NM^2 + BM^2 + OM^2 - R^2 = NM^2$. С другой стороны, степень точки N относительно окружности w равна $NQ \cdot NA$, то есть $NM^2 = NQ \cdot NA$, что и требовалось.

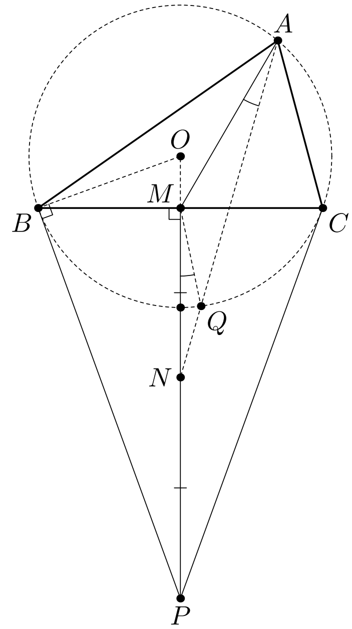

Рис. 10–11.4

5. (*П. Кожевников*) В пространстве дан треугольник ABC и сферы S_1 и S_2, каждая из которых проходит через точки A, B и C. Для точек M сферы S_1, не лежащих в плоскости треугольника ABC, проводятся прямые MA, MB и MC, пересекающие сферу S_2 вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что плоскости, проходящие через точки A_1, B_1 и C_1, касаются фиксированной сферы либо проходят через фиксированную точку.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры данных сфер. Докажем, что рассматриваемая плоскость касается сферы с центром O_2 или проходит через точку O_2. Для этого достаточно доказать, что расстояние от точки O_2 до этой плоскости постоянно. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. Пусть две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках B и C, M — точка первой окружности, прямые MB и MC пересекают вторую окружность в точках B_1 и C_1 (см. рис. 10–11.5а). Тогда $MO_1 \perp B_1C_1$.

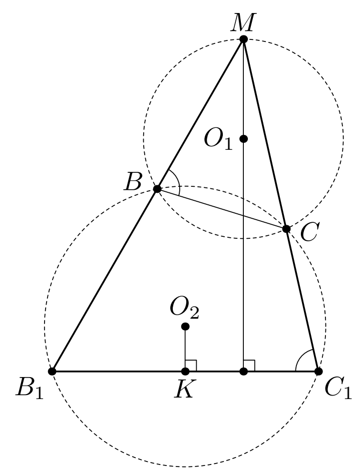

Рис. 10–11.5а

Доказательство. Заметим, что $\angle CMO_1 = 90^\circ - \angle MBC = 90^\circ - \angle MC_1B_1$.

Лемма 2. В условиях первой леммы пусть $O_2K \perp B_1C_1$, тогда длина отрезка O_2K не зависит от выбора точки M. (Лемма верна и в случае, когда B_1C_1 проходит через O_2.)

Доказательство. Заметим, что угол BMC и дуга BC второй окружности постоянны. Следовательно, дуга B_1C_1 также постоянна, то есть, $O_2K = const$.

Другие случаи расположения точки M в леммах рассматриваются аналогично.

Перейдем к решению задачи. Докажем, что $MO_1O_2 \perp A_1B_1C_1$. Это можно сделать несколькими способами.

Первый способ. Докажем, что MO_1 — высота пирамиды $MA_1B_1C_1$, где A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения прямых MA, MB и MC со второй сферой (см. рис. 10–11.5б). Заметим, что точка O — проекция O_1 на плоскость MB_1C_1 — является центром описанной окружности треугольника BMC. По лемме 1 $MO \perp B_1C_1$. Учитывая перпендикулярность O_1O и B_1C_1, получим, что $MO_1O \perp B_1C_1$, то есть, $MO_1O \perp A_1B_1C_1$, поэтому высота пирамиды принадлежит плоскости MO_1O. Рассматривая аналогичные проекции точки O_1 на другие грани пирамиды, получим, что MO_1 — высота.

Второй способ. Пусть M фиксирована. Докажем, что конус с вершиной в точке M, проходящий через окружность пересечения двух сфер, пересекает вторую сферу также по окружности. Рассмотрим инверсию с центром в точке M относительно сферы с радиусом, квадрат которого равен модулю степени точки M относительно второй сферы. (Для точек, лежащих внутри второй сферы, надо предварительно рассмотреть симметрию относительно точки M.) Поскольку первая сфера содержит центр инверсии, то она переходит в плоскость. Точки, лежащие на окружности пересечения, перейдут в точки, лежащие на второй сфере, следовательно, они все лежат в одной плоскости. Заметим, что из симметрии относительно плоскости MO_1O_2 эта плоскость перпендикулрна плоскости окружности, что и требовалось.

Рассмотрим сечение MO_1O_2. Оно проходит через центры сфер, то есть, пересекает их по бо́льшим окружностям (поэтому для любого расположения точки M эти пары окружностей совмещаются поворотом вокруг оси O_1O_2). Кроме того, это сечение перпендикулярно $A_1B_1C_1$. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_2 на плоскость $A_1B_1C_1$. Тогда $O_2K \perp A_1B_1C_1$, следовательно, O_2K лежит в плоскости MO_1O_2, то есть, по лемме 2, $O_2K = const$.

Комментарий. Также можно было рассматривать «движение» точки M по «параллелям» и «меридианам» первой сферы.

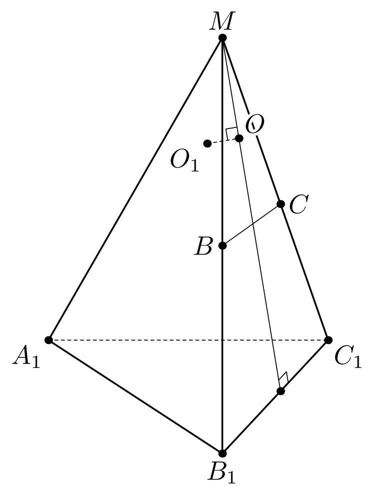

Рис. 10–11.5б

6. (*Д. Прокопенко*) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты CC_1 и BB_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A и параллельную прямой BC, в точках P и Q. Пусть A_0 — середина стороны BC, а AA_1 — высота. Прямые A_0C_1 и A_0B_1 пересекают прямую PQ в точках K и L. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PQA_1, KLA_0, $A_1B_1C_1$ и окружность с диаметром AA_1 пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть U — точка пересечения прямых PQ и B_1C_1 (см. рис. 10–11.6а).

Докажем сначала, что в одной точке пересекаются три окружности: описанные окружности треугольников PQA_1 и $A_1B_1C_1$ и окружность с диаметром AA_1.

Заметим, что четырехугольник PQB_1C_1 — вписанный. Действительно, $\angle APC_1 = \angle BCC_1 = \angle BB_1C_1$. Кроме того, UA — касательная к окружности, описанной около треугольника AB_1C_1. Тогда $\deg_{AB_1C_1} U = UC_1 \cdot UB_1 = UA^2$, $\deg_{PQB_1C_1} U = UC_1 \cdot UB_1 = UP \cdot UQ$, то есть, $UA^2 = UP \cdot UQ = UC_1 \cdot UB_1$. С другой стороны, $UP \cdot UQ = \deg_{PQA_1} U$, а $UC_1 \cdot UB_1 = \deg_{A_1B_1C_1} U$, то есть, точка U лежит на радикальной оси окружностей, описанных около треугольников PQA_1 и $A_1B_1C_1$. Пусть T — точка пересечения этих окружностей, тогда T лежит на A_1U. Заметим, что $UT \cdot UA_1 = UC_1 \cdot UB_1 = UA^2$, следовательно, $AT \perp UA_1$. То есть, T принадлежит окружности с диаметром AA_1.

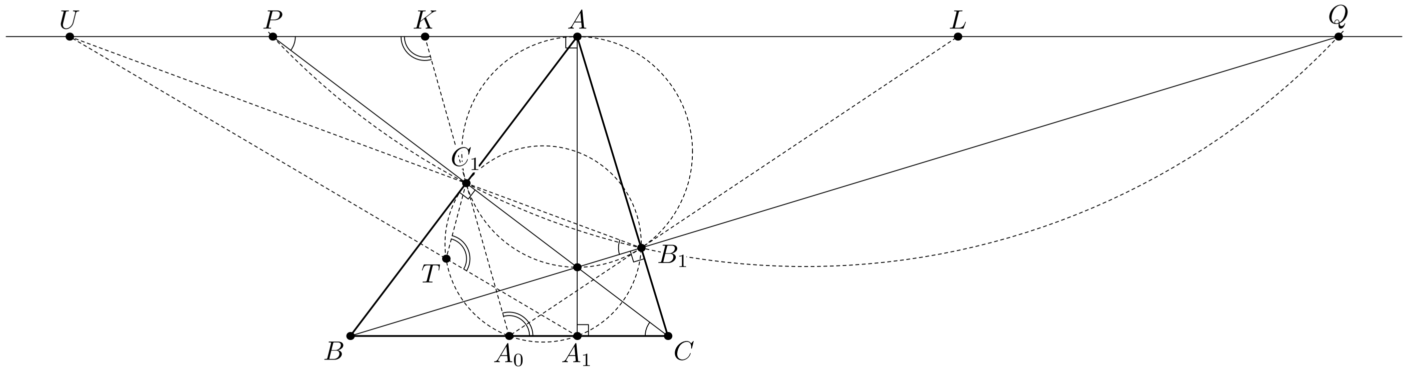

Рис. 10–11.6а

Осталось доказать, что T принадлежит также и окружности, описанной около треугольника KLA_0, то есть, что T — точка Микеля для прямых UL, A_0L, KA_0, UB_1 (см. рис. 10–11.6б). Для этого достаточно доказать, что T принадлежит описанной окружности треугольника UKC_1. Действительно, точка T лежит на описанной окружности четырехугольника $A_0C_1B_1A_1$, поэтому $\angle C_1TA_1 = \angle C_1A_0C = \angle UKC_1$, то есть, четырехугольник UKC_1T — вписанный, что и требовалось.

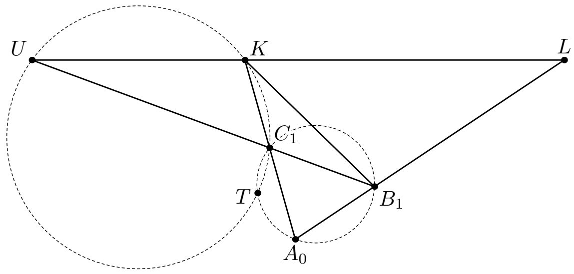

Рис. 10–11.6б

Комментарий. Подробнее про точку Микеля можно прочитать, например, в книге «Задачи по планиметрии», В. В. Прасолов, глава 2, §10.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников.