Тринадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Пятнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 16 апреля 2017 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*Е. Бакаев*) На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = CK$. Точки N и M — середины отрезков AK и BC соответственно. Отрезки NM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что $KN = KP$.

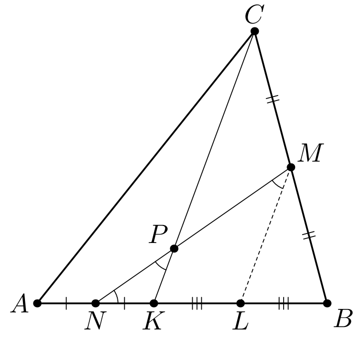


Рис. 8–9.1

Решение. Докажем, что $\angle PNK = \angle NPK$, откуда и будет следовать утверждение задачи. Пусть L — середина отрезка BK. Тогда ML — средняя линия треугольника BCK, то есть $ML \parallel CK$ и $ML = \frac{1}{2}CK = \frac{1}{2}AB = LN$. Следовательно, треугольник MLN равнобедренный и $\angle PNK = \angle NML$. Учитывая параллельность прямых ML и PK, получим требуемое.

Комментарий. Возможны также следующие способы решения.

1. Отложить на продолжении стороны AB за точку A отрезок AQ, равный BK, и использовать равнобедренный треугольник QKC и то, что MN — средняя линия треугольника QCB.

2. Доказать, что биссектриса угла K треугольника BKC параллельна NP. Для этого достаточно воспользоваться свойством биссектрисы и теоремой о пропорциональных отрезках.

2. (*Фольклор*) Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. В треугольники ABC и ABD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна BC.

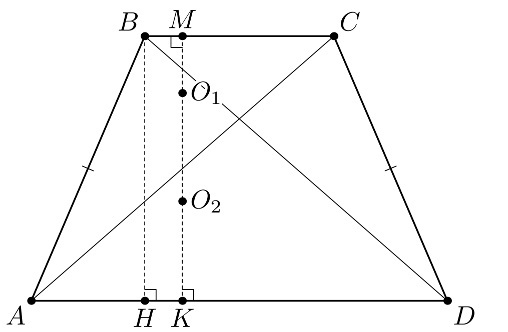


Рис. 8–9.2а

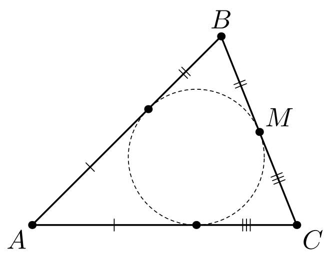


Рис. 8–9.2б

Решение. Пусть K и M — точки касания данных окружностей со сторонами AD и BC соответственно, а BH — высота трапеции (см. рис. 8–9.2а). Поскольку $O_1M \perp BC$, а $O_2K \perp$ $\perp AD$, то достаточно доказать, что $MK \perp AD$, то есть параллельность MK и BH. Докажем, что $BM = HK$, откуда, учитывая параллельность оснований трапеции, и будет следовать искомое. Заметим, что $BM = p_{\triangle ABC} - AC$, а $AK = p_{\triangle ABD} - BD$ как отрезки касательных в данных треугольниках (см. рис. 8–9.2б). Тогда $AK - BM = (p_{\triangle ABD} - BD) - (p_{\triangle ABC} - AC) =$ $= \frac{1}{2}(AD - BC)$, так как $AC = BD$. Учитывая, что $AH = \frac{1}{2}(AD - BC)$, получим требуемое.

Комментарий. Отметим, что решение задачи также можно получить из следующего факта. Пусть E — точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника $ABCD$. Тогда прямая O_1O_2 отсекает от треугольника ABE равнобедренный треугольник (это можно доказать, например, используя лемму «о трезубце» и величину угла между хордами).

3. (*А. Блинков, Ю. Блинков*) Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно четырехугольника $ABCD$. Известно, что $BC \parallel AD$ и $AN = CM$. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?

Ответ: неверно.

Решение. Контрпример удобно показать на клетчатой бумаге (см. рис. 8–9.3а).

Комментарий. 1) Пример можно построить и не используя клетки. Рассмотрим равнобокую трапецию $ANKD$, в которой отношение оснований $\frac{AD}{NK} < 2$, и проведем ее диагональ DN (см. рис. 8–9.3б). Построим треугольник CMN, симметричный треугольнику DKN относительно точки N. На прямой AM отметим точку B так, что $BM = AM$ (или точку B можно получить как пересечение прямой AM и прямой, параллельной AD и проходящей через точку C). Так как $MK > AD$, то прямая AM не пересекает отрезка CN. При этом: $BC \parallel AD$, $CM = DK = AN$. Таким образом, $ABCD$ — трапеция, для которой выполняется условие задачи.

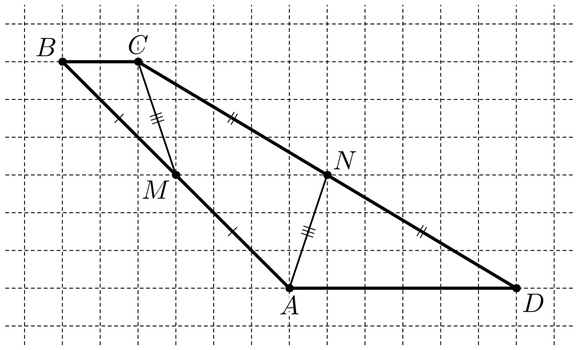


Рис. 8–9.3а

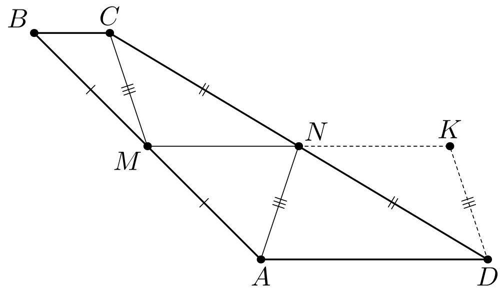


Рис. 8–9.3б

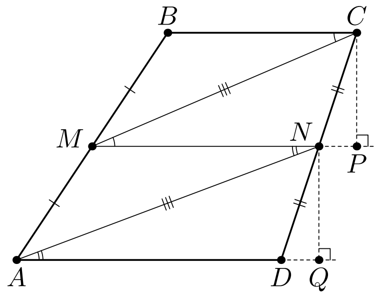


Рис. 8–9.3в

2) **Путь к решению.** Попробуем разобраться, как додуматься до решения задачи. Заметим, что в треугольниках CMN и NAD равны две стороны и угол, противолежащий одной из них. Тогда эти треугольники могут быть и не равны и $\angle CMN = 180^\circ - \angle DAN$. На этом и основан способ построения примера на рисунке 8–9.3б.

Также понятно, как могут выглядеть некоторые неверные решения и как, вовремя задав себе вопрос, можно додуматься до правильного решения. Приведем одно из таких рассуждений. Предположим, что $ABCD$ — не параллелограмм, а трапеция (см. рис. 8–9.3в). Тогда MN — ее средняя линия, откуда следует, что $\angle BCM = \angle CMN$ и $\angle DAN = \angle MNA$. Опустим перпендикуляры CP и NQ на прямые MN и AD соответственно, тогда прямоугольные треугольники CMP и NAQ равны (по катету и гипотенузе). Следовательно, $\angle CMP = \angle QAN = \angle MNA$, значит, $MC \parallel AN$. Таким образом, $AMCN$ — параллелограмм, $AM \parallel CN$, значит, и $ABCD$ — параллелограмм. Но возникает вопрос: обязательно ли углы CMP и MNA — накрест лежащие? И ответ НЕТ приводит к решению задачи.

4. (*П. Кожевников*) Рассматриваются треугольники ABC, в которых точка M лежит на стороне AB, $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$ ($c < a$, $c < b$). Найдите наименьший радиус окружности, описанной около таких треугольников.

Решение. Пусть K — середина AB и $a > b$. Докажем, что треугольник ABC — тупоугольный с тупым углом C. Для этого достаточно доказать, что медиана меньше половины стороны, к которой она проведена. Действительно, если это выполняется, то, построив окружность на AB как на диаметре, получим, что точка C лежит внутри этой окружности, следовательно, угол C — тупой. Докажем, что $CK < \frac{1}{2}AB$. Так как $MK = \frac{1}{2}(a-b)$, то по неравенству треугольника $CK < \frac{1}{2}(a-b) + c < \frac{1}{2}(a-b) + b = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}AB$.

Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Так как хорда AB — фиксирована, то радиус будет наименьшим, если угол AOB — наибольший. Так как угол C — тупой, то $\angle ACB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB$, то есть угол ACB должен быть наименьший из возможных (для доказательства также можно было воспользоваться теоремой синусов и убыванием синуса на указанном промежутке).

С другой стороны, так как отрезок CM фиксирован, то точка C лежит на окружности с центром в точке M и радиусом c. Докажем, что угол ACB будет наименьшим, если такая окружность касается окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть это не так и указанные окружности пересекаются в точках C_1 и C_2 (см. рис. 8–9.4б). Тогда, выбрав точку C на меньшей дуге C_1C_2 (то есть вне большой окружности), получим, что $\angle ACB < \angle AC_1B = \angle AC_2B$, противоречие.

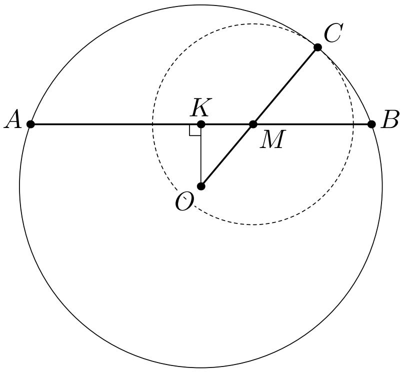


Рис. 8–9.4а

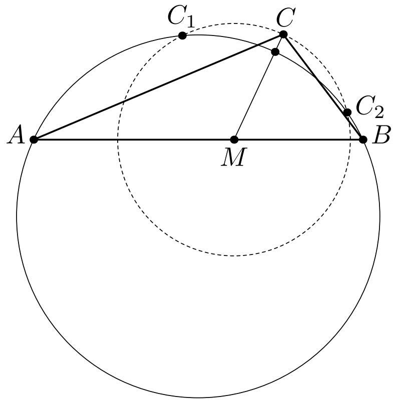


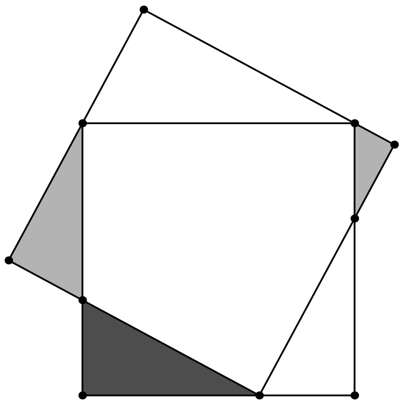
Рис. 8–9.4б

Теперь найдем радиус окружности. Так как окружности касаются, то точки O, M и C лежат на одной прямой (см. рис. 8–9.4а). Обозначив искомый радиус через R и использовав теорему Пифагора для треугольников OBK и OMK, получим:

$$OK^2 = R^2 - \frac{(a+b)^2}{4} \quad \text{и} \quad OK^2 = (R-c)^2 - \frac{(a-b)^2}{4},$$

откуда $R = \dfrac{ab+c^2}{2c}$.

Комментарий. При вычислении радиуса вместо теоремы Пифагора можно было использовать произведение отрезков хорд.



5. (*В. Расторгуев*) Два квадрата расположены, как показано на рисунке. Докажите, что площадь черного треугольника равна сумме площадей серых.

Решение. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — данные квадраты, F — точка пересечения отрезков AB и A_1D_1, G — точка пересечения отрезков CD и C_1D_1 (см. рис. 8–9.5а). Достроим прямоугольный треугольник FA_1B до прямоугольного треугольника FHB. Докажем, что $\Delta FA_1H = \Delta GC_1C$ и $\Delta BHF = \Delta D_1FA$, откуда и будет следовать утверждение задачи.

Заметим, что $\angle B_1CB = \angle CGC_1 = \angle DGD_1 = \angle AD_1F = \angle FBA_1 = \angle A_1FH$, то есть для доказательства равенства треугольников будет достаточно равенства соответствующих катетов. Пусть O — центр квадрата $ABCD$.

Докажем, что прямые B_1D_1 и FG перпендикулярны и проходят через центр квадрата. Поскольку угол BOC прямой, то четырехугольник BB_1CO — вписанный. Так как $BO = CO$, то B_1O — биссектриса угла BB_1C, то есть B_1D_1 проходит через точку O. Кроме того, $\angle D_1OD = \angle B_1OB = \angle B_1CB = \angle DGD_1$, то есть четырехугольник $DGOD_1$ также вписанный и OG перпендикулярно и равно OD_1. Аналогично, OF перпендикулярно и равно OD_1, то есть FG проходит через O и треугольник FD_1G — равнобедренный.

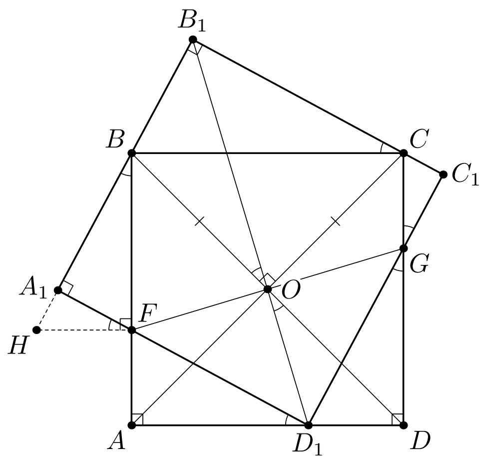


Рис. 8–9.5б

Следовательно, $FA_1 = C_1G$ и $\Delta FA_1H = \Delta GC_1C$ по катету и острому углу. Кроме того, треугольник FD_1A равен треугольнику D_1GD, откуда $DD_1 = AF$, то есть $AD_1 = BF$. Следовательно, $\Delta BHF = \Delta D_1FA$ по катету и острому углу, что и требовалось.

Комментарий. Другие свойства конструкции, связанной с квадратами, можно прочитать в статье «Вспомогательные квадраты», «Квант», 2016 год, №4.

6. (*Д. Прокопенко*, *С. Тахаев*) Вокруг треугольника ABC с острым углом C описана окружность. На дуге AB, не содержащей точку C, выбрана точка D. Точка D' симметрична точке D относительно прямой AB. Прямые AD' и BD' пересекают отрезки BC и AC в точках E и F. Пусть точка C движется по своей дуге AB. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CEF движется по прямой.

Решение. Заметим, что четырехугольник $CED'F$ — вписанный. Действительно, поскольку D и D' симметричны относительно AB, то $\angle ED'F = \angle AD'B = \angle ADB$, следовательно, $\angle ECF + \angle ED'F = \angle ECF + \angle ADB = 180^\circ$ (см. рис. 8–9.6а).

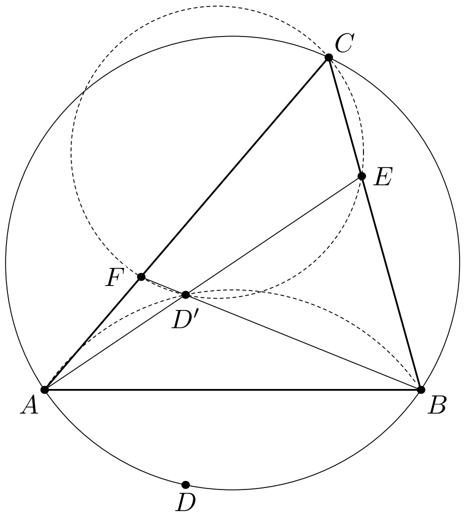


Рис. 8–9.6а

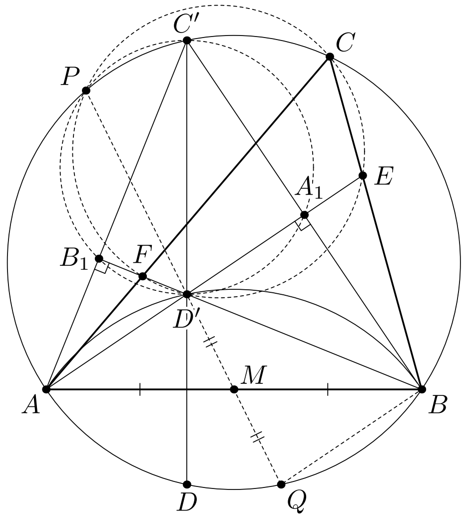


Рис. 8–9.6б

Докажем, что все такие окружности проходят через две фиксированные точки (одна из них D'), из чего и будет следовать решение задачи. Будем использовать два утверждения.

Утверждение 1. Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно сторон, лежат на описанной окружности этого треугольника.

Утверждение 2. Точка, симметричная ортоцентру треугольника ABC относительно середины стороны AB, лежит на описанной окружности этого треугольника и диаметрально противоположна точке C.

Пусть C' — такое положение точки C на окружности, что $C'D' \perp AB$ (см. рис. 8–9.6б). Поскольку D и D' симметричны относительно AB, то D' — точка пересечения высот треугольника ABC' (см. утверждение 1). Пусть прямые AD' и BD' пересекают стороны $C'B$ и $C'A$ в точках A_1 и B_1 соответственно, а описанные около треугольников ABC и A_1B_1C' окружности пересекаются в точке P.

Докажем, что окружность, описанная вокруг треугольника CEF, также проходит через P. Пусть M — середина AB, а прямая PD' повторно пересекает окружность в точке Q. Заметим, что $\angle C'PD' = 90^\circ$, следовательно, точка Q диаметрально противоположна точке C', то есть Q симметрична D' относительно M (см. утверждение 2). Следовательно, $AQBD'$ — параллелограмм и $AD' \parallel QB$. Используя, что $PQBC$ — вписанный четырехугольник, получим, что $\angle PD'E + \angle PCE = \angle PQB + \angle PCE = 180^\circ$.

Следовательно, все окружности, описанные около треугольников CEF проходят через две фиксированные точки — D' и P. Центры таких окружностей лежат на серединном перпендикуляре к PD'.

Комментарий. Попутно доказано, что точки P, D' и M лежат на одной прямой. Другие свойства точки P и более общей конструкции можно найти в статьях «Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и...еще одна точка!», журнал «Квант», 2014 год, №1 (http://geometry.ru/articles/p-point.pdf) и http://jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp62-64.pdf.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, Д. Прокопенко.

Тринадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

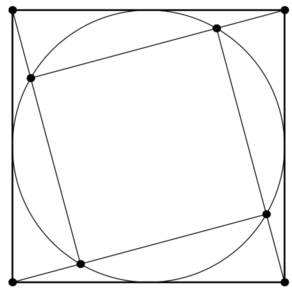
Пятнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 16 апреля 2017 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*А. Хачатурян, З. Ильиченкова*) Один квадрат вписан в окружность, а другой квадрат описан около той же окружности так, что его вершины лежат на продолжениях сторон первого (см. рисунок). Найдите угол между сторонами этих квадратов.



Ответ: $15°$.

Решение. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — данные квадраты, O — центр окружности, M — точка касания окружности со стороной BC (см. рис. 10–11.1).

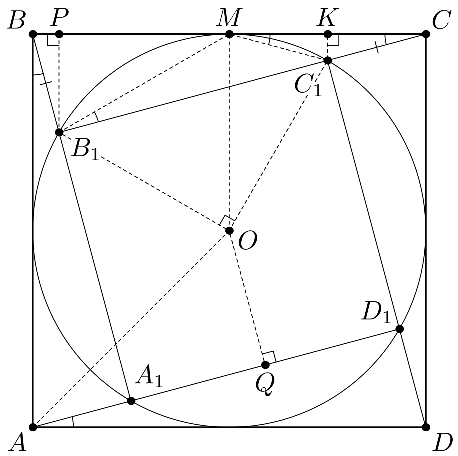


Рис. 10–11.1

Первый способ. Пусть α — искомый угол. Поскольку M — середина гипотенузы прямоугольного треугольника, то $\angle MCB_1 = \angle MB_1C = \alpha$. С другой стороны, $\angle CMC_1 = \angle MB_1C_1$ как угол между касательной и хордой. Следовательно, $\angle MC_1B_1 = 2\alpha$, а $\angle B_1MC_1 = 180° - 3\alpha$. С другой стороны, так как центральный угол B_1OC_1 равен $90°$, то вписанный угол B_1MC_1 равен $135°$, откуда $\alpha = 15°$.

После того, как доказано, что $\angle MC_1B_1 = 2\alpha$, можно рассуждать и по-другому.

Второй способ. Заметим, что радиус окружности равен половине стороны бо́льшего квадрата, то есть треугольник B_1OM — равносторонний и $\angle MC_1B_1 = \frac{1}{2}\angle MOB_1 = 30°$.

Получив, что треугольник MC_1C — равнобедренный (см. первый способ), решение можно продолжить и так.

Третий способ. Заметим, что $\Delta BCB_1 = \Delta CDC_1$ по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $CC_1 = BB_1$. Проведем перпендикуляры B_1P и C_1K к стороне BC. Тогда треугольники BB_1P и C_1CK равны по гипотенузе и острому углу, то есть $B_1P = CK = MK$. Следовательно, $B_1P = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2}B_1M$, то есть $\angle PMB_1 = 30°$, а $\angle BCB_1 = 15°$.

Равенство $CC_1 = BB_1$ можно использовать иначе.

Четвертый способ. Пусть $CC_1 = BB_1 = x$, тогда, обозначив стороны большого и маленького квадрата через a и b соответственно, можно составить уравнение: $x^2 + (x+b)^2 = a^2$. Учитывая, что $a = b\sqrt{2}$, получим $x = \frac{b(\sqrt{3}-1)}{2}$. Следовательно, $\sin\alpha = \frac{b(\sqrt{3}-1)}{2} : b\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, откуда $\alpha = 15°$. Эквивалентное уравнение можно получить иначе.

Пятый способ. Используем те же обозначения, что и в предыдущем способе. По свойству касательной и секущей, получим: $x(x+b) = \frac{a^2}{4}$. Далее действуем аналогично предыдущему способу решения.

Отношение сторон квадратов можно использовать иначе.

Шестой способ. Пусть OQ — перпендикуляр к A_1D_1 (см. рис. 10–11.1). Тогда, учитывая равенство $a = b\sqrt{2}$, получим, что $OQ = \frac{1}{2}OA$. Следовательно, $\angle OAQ = 30^\circ$. Осталось воспользоваться тем, что $\angle OAD = 45^\circ$.

Комментарий. Если искать угол между другими парами сторон (например, AB и B_1C_1), то возможен ответ 75°.

2. (*Ю. Блинков*) Какое наибольшее количество граней n-угольной пирамиды может быть перпендикулярно основанию?

Ответ: $\frac{n}{2}$ при четном n и $\frac{n+1}{2}$ при нечетном.

Решение. Заметим, что если две плоскости, содержащие боковые грани пирамиды, перпендикулярны основанию, то и прямая их пересечения перпендикулярна основанию и является высотой пирамиды. Если эти грани соседние, то прямая пересечения содержит их общее ребро. Но каждое ребро принадлежит ровно двум граням, следовательно, больше одной пары соседних граней, перпендикулярных основанию быть не может. Пусть n — четно. Тогда, если граней перпендикулярных основанию больше $\frac{n}{2}$, то найдутся или три такие грани, идущие подряд, или две пары таких граней, что невозможно. Аналогично, доказывается, что в случае нечетного n граней перпендикулярных основанию не больше $\frac{n+1}{2}$.

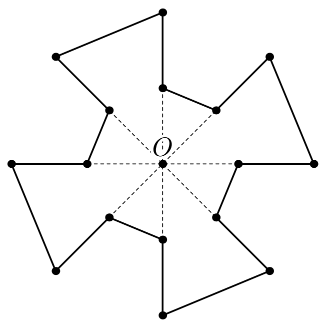


Рис. 10–11.2а

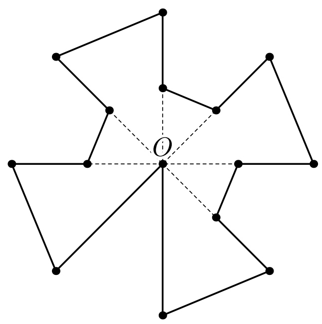


Рис. 10–11.2б

Примерами могут служить невыпуклые пирамиды, вершина которых проектируется в точку O многоугольников (см. рис. 10–11.2 а, б).

3. (*Г. Филипповский*) На плоскости дан неравнобедренный треугольник, описанная около него окружность и отмечен центр его вписанной окружности. Пользуясь только линейкой без делений и проведя не больше семи линий, постройте диаметр описанной окружности.

Решение. Пусть биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I, BL — биссектриса внешнего угла B (см. рис. 10–11.3).

Заметим, что точки A_1, C_1 и L лежат на одной прямой (этот факт можно доказать, используя, например, теорему Менелая). Также используем, что биссектриса BB_1 делит дугу AC, не содержащую точки B, пополам, а BL и BB_1 перпендикулярны.

Отсюда вытекает способ построения.

1) Строим биссектрисы AA_1 и CC_1 (первая и вторая линии).

2) Строим точку W как пересечение BI с окружностью (третья линия).

3) Строим точку L как пересечение прямых A_1C_1 и AC (четвертая и пятая линии).

4) Строим точку K как пересечение BL с окружностью (шестая линия).

5) Проводим KW (седьмая линия).

Так как угол KBW — прямой, то KW — диаметр, что и требовалось.

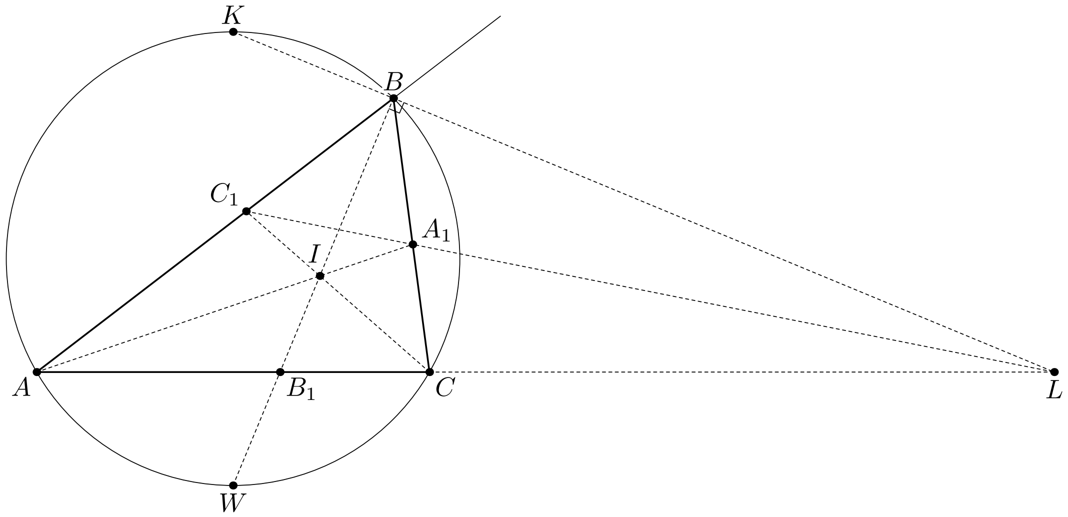


Рис. 10–11.3

4. (*А. Заславский*) Докажите, что окружность, построенная на стороне AB треугольника ABC как на диаметре, касается его вписанной окружности тогда и только тогда, когда сторона AB равна радиусу вневписанной окружности, касающейся этой стороны.

Решение. *Первый способ.* Пусть I и I_c — центры вписанной и вневписанной окружностей, r и r_c — их радиусы, C_1 и C_2 — точки их касания со стороной AB, C_0 — середина этой стороны, a, b и c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр (см. рис. 10–11.4а). Тогда $AC_1 = BC_2 = p - a$, $BC_1 = AC_2 = p - b$, $C_0C_1 = C_0C_2 = \frac{|b-a|}{2}$. Вписанная окружность касается окружности с диаметром AB тогда и только тогда, когда $C_0I = \frac{c}{2} - r$, следовательно, по теореме Пифагора

$$\left(\frac{c}{2} - r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

то есть $r = \frac{(p-a)(p-b)}{c}$.

Так как площадь треугольника $S = pr = (p-c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, то

$$(p-a)(p-b) = \frac{S^2}{p(p-c)} = rr_c,$$

откуда и следует утверждение задачи.

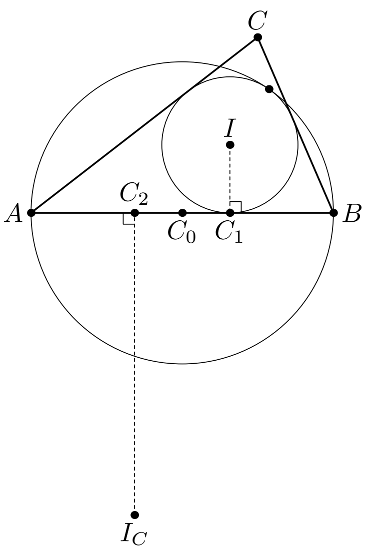


Рис. 10–11.4а

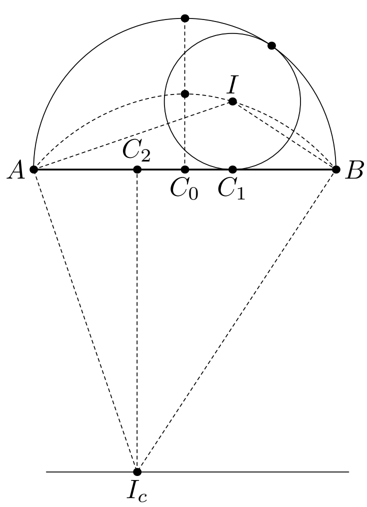


Рис. 10–11.4б

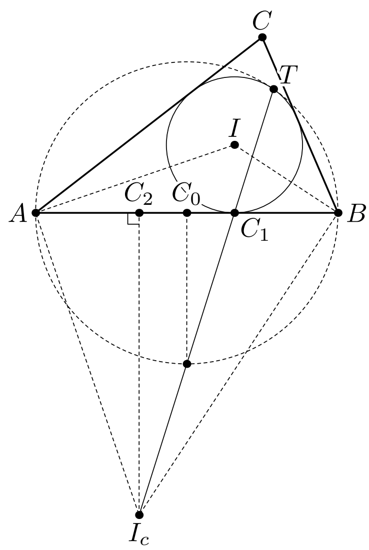


Рис. 10–11.4в

Второй способ. Зафиксируем вершины A и B и будем двигать точку I_c по прямой, параллельной AB. Так как $r = \frac{(p-a)(p-b)}{r_c}$, точка I при этом будет двигаться по параболе, проходящей через A, B и середину перпендикулярного AB радиуса полуокружности с диаметром AB. Фокусом этой параболы будет середина AB, а директрисой — параллельная AB касательная к полуокружности. Эта же парабола будет геометрическим местом центров вписанных в полуокружность окружностей (см. рис. 10–11.4б).

Комментарий 1. Также решение задачи можно получить, используя факт из статьи http://jcgeometry.org/Articles/Volume2/JCG2013V2pp43-52.pdf, а именно, в любом треугольнике, если построить окружность, проходящую через вершины A и B и касающуюся вписанной окружности в точке T, то прямая TC_1 проходит через I_c. По лемме Архимеда, эта прямая также проходит через середину дуги AB (см. рис. 10–11.4в). Следовательно, средняя линия треугольника $C_1C_2I_c$ равна $\frac{r_c}{2}$, что равносильно утверждению задачи.

Комментарий 2. Условие $c = r_c$ равносильно также каждому из двух следующих условий:

- сумма длин стороны AB и опущенной на нее высоты равна сумме длин двух других сторон;
- $\cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$.

Комментарий 3. Утверждение задачи можно обобщить: если зафиксировать вершины A и B и радиус r_c вневписанной окружности, то вписанные окружности всех таких треугольников касаются одной окружности, проходящей через A и B.

Комментарий 4. Равенство $(p-a)(p-b) = rr_c$ также можно доказать, используя лемму «о трезубце» и степень точки C_1 относительно окружности, описанной около треугольника AIB.

5. (*Д. Швецов*) Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Описанная окружность треугольника A_1BC_1 пересекает прямые B_1A_1 и B_1C_1 в точках A_0 и C_0 соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника A_0BC_0, центр вписанной окружности треугольника ABC и середина стороны AC лежат на одной прямой.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, H — ортоцентр треугольника A_0BC_0, K — середина A_0C_0, M — середина AC. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника A_0BC_0. Заметим, что точка I диаметрально противоположна точке B (поскольку $\angle BC_1I = 90°$). Следовательно, точки H и I симметричны относительно K, то есть достаточно доказать, что точки M, I и K лежат на одной прямой. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Используем следующий факт: *прямая MI делит BB_1 пополам* (эта прямая содержит среднюю линию треугольника BB_1T, где T — точка касания вневписанной окружности со стороной AC). Докажем, что середины A_0C_0 и BB_1 совпадают, то есть $BA_0B_1C_0$ — параллелограмм. Заметим, что из равенства вписанных углов и теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle A_0C_0B = \angle A_0A_1B = \angle CA_1B_1 = \angle CB_1A_1 = \angle B_1C_1A_1 = \angle C_0A_0A_1$, откуда следует параллельность BC_0 и B_1A_0. Аналогично для другой пары сторон. *Для других случаев расположения точек A_0 и C_0 доказательство аналогично.*

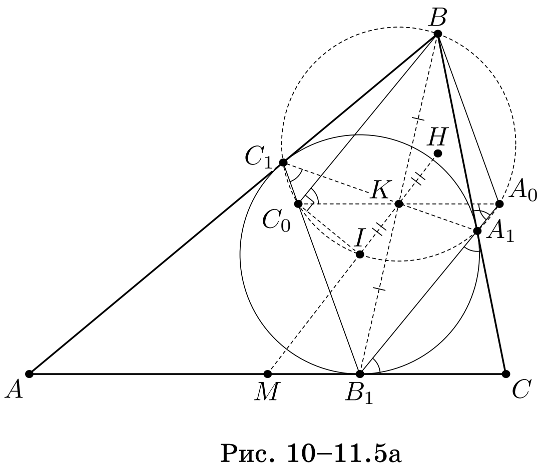


Рис. 10–11.5а

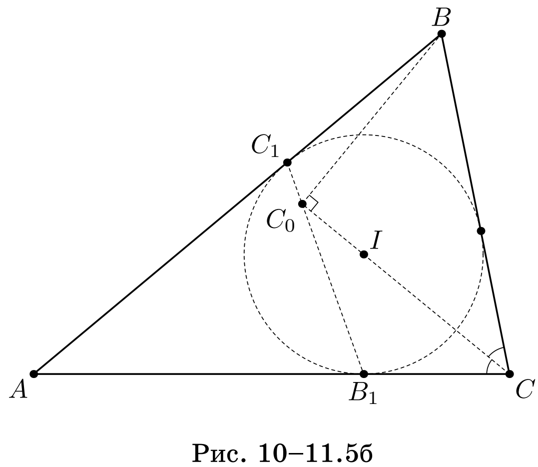


Рис. 10–11.5б

Второй способ. Используем следующий факт.

Проекция вершины треугольника на биссектрису угла лежит на прямой, проходящей через точки касания вписанной окружности этого треугольника (см. рис. 10–11.5б). Это один из случаев так называемой «**задачи 255**» (классическая задача, которая была под этим номером в задачнике 9–11 И. Ф. Шарыгина). Точка C_0 также лежит на средней линии треугольника, параллельной стороне AC.

Заметим, что точки A_0 и C_0 лежат на биссектрисах углов A и C соответственно. Действительно, так как они лежат на прямых, содержащих точки касания, не совпадают с ними, и $\angle BC_0I = \angle BA_0I = 90^\circ$, то это точки из «задачи 255». Далее, A_0 и C_0 лежат на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC, то есть AC_0A_0C — трапеция. Осталось использовать, что середины оснований трапеции и точка пересечения ее диагоналей лежат на одной прямой.

6. (*А. Доледенок*) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть w — его описанная окружность, точка M — середина стороны BC, P — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника AB_1C_1 и w, T — точка пересечения касательных к w, проведенных в точках B и C, S — точка пересечения AT и w. Докажите, что P, A_1, S и середина отрезка MT лежат на одной прямой.

Решение. При решении нам понадобится основное свойство *симедианы* (прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы треугольника):

Прямая, проходящая через вершину треугольника и точку пересечения касательных к описанной около него окружности, проведенных из двух других вершин, содержит симедиану треугольника. Подробнее о свойствах симедианы см., например, В.В. Прасолов «Задачи по планиметрии», глава 5, *параграф* 13.

Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, H' — точка, симметричная H относительно BC, X — точка, симметричная H относительно M, A' — середина дуги BC, не содержащей точку A, K — точка пересечения AM и ω (см. рис. 10–11.6).

Заметим, что AS — симедиана. Также будем использовать четыре утверждения.

Утверждение 1. Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно сторон, лежат на описанной окружности этого треугольника.

Утверждение 2. Точка, симметричная ортоцентру треугольника ABC относительно середины стороны BC, лежит на описанной окружности этого треугольника и диаметрально противоположна точке A.

Утверждение 3. Точки, симметричные ортоцентру относительно стороны BC и середины стороны BC, симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC.

Утверждение 4. Пусть K и S — точки пересечения медианы и симедианы, проведенных из вершины A, с описанной окружностью треугольника. Тогда точки S и K, а, следовательно, прямые SM и KM симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC.

Итак, точки S и K, а также точки H' и X симметричны относительно прямой MT (см. утверждения 3 и 4). Также нам потребуются две леммы.

Лемма 1. Точки P, H, M и X лежат на одной прямой.

Доказательство леммы 1. Заметим, что точки A, B_1, H и C_1 лежат на одной окружности, причём AH — диаметр этой окружности, то есть, $\angle APH = 90^\circ$. Точка X — диаметрально противоположна точке A (см. утверждение 2), то есть, $\angle APX = 90^\circ$, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. Точки P, H' и T лежат на одной прямой.

Доказательство леммы 2. Поскольку PT — симедиана треугольника BPC (используем *основную задачу о симедиане*), а PM — его медиана, то достаточно доказать, что PH' и PM симметричны относительно биссектрисы. Это следует из равенства дуг BH' и CX, которое, в свою очередь, следует из симметрии точек X и H' относительно серединного перпендикуляра к BC (см. утверждение 3).

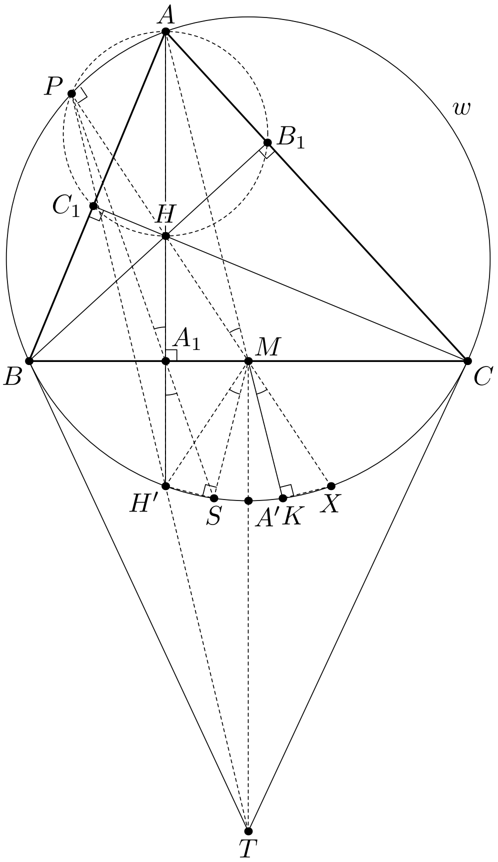


Рис. 10–11.6

Далее решение задачи состоит из двух частей.

1) Докажем, что PA_1 проходит через середину отрезка MT. В треугольнике PMT точки H и H' расположены на сторонах PM и PT (по леммам 1 и 2). Так как A_1 — середина HH', а $HH' || TM$, то прямая PA_1 делит TM пополам.

2) Докажем, что точки P, A_1 и S лежат на одной прямой. Для этого достаточно доказать, что $\angle H'A_1S = \angle PA_1A$.

Поскольку точки S и K, а также точки H' и X симметричны относительно прямой MT, и четырехугольник APA_1M — вписанный, то $\angle H'MS = \angle XMK = \angle PMA = \angle PA_1A$. Также $\angle H'SM = \angle MKX = 90^\circ$. Следовательно, четырехугольник $A_1H'SM$ вписанный, откуда $\angle H'MS = \angle H'A_1S$, что и требовалось.

Таким образом, точки P, A_1, S и середина отрезка MT лежат на одной прямой.

Комментарий. Другие свойства точки P и более общей конструкции можно найти в статьях «Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и...еще одна точка!», журнал «Квант», 2014 год, №1 (http://geometry.ru/articles/p-point.pdf) и http://jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp62-64.pdf.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Доледенок, А. Заславский, Д. Прокопенко.