Департамент образования г. Москвы

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Малый мехмат

Московский институт открытого образования

Московский центр непрерывного математического образования

ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 6-Х И 7-Х КЛАССОВ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Москва
11 декабря 2005 года

Награждение наградами награждённых, не награждённых наградами на награждении будет происходить по средам с 16.00 до 18.00 в Московском центре непрерывного математического образования (комн. 303). Адрес: Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до ст. м. «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком (см. http://www.mccme.ru/). Справки по тел. 241 12 37.

Результаты Городской устной математической олимпиады будут размещены в сети Интернет на сайтах

http://www.mccme.ru/ustn/
http://mmmf.math.msu.su/

Варианты составили:

А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц, А. Н. Карпов, А. В. Спивак, А. В. Хачатурян, Е. А. Чернышева.

Городская устная математическая олимпиада.
Задачи и решения.

* * *

Редактор *Е. А. Чернышева.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

Первый тур
(каждая задача оценивается в 5 баллов)

1. Найдите хотя бы одно решение ребуса

$$Я+О\cdot Н+Д\cdot Р\cdot У\cdot З\cdot Ь\cdot Я=М\cdot Ы.$$

(Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные.)

2. Дом имеет форму квадрата, разделённого на 9 одинаковых квадратных комнат. В каждой комнате живёт либо рыцарь, который всегда говорит только правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый житель дома заявил: «Среди моих соседей рыцарей больше, чем лжецов». Известно, что среди жителей дома есть и рыцари, и лжецы. Сколько среди них рыцарей? (Соседними считаются комнаты, имеющие общую стену.)

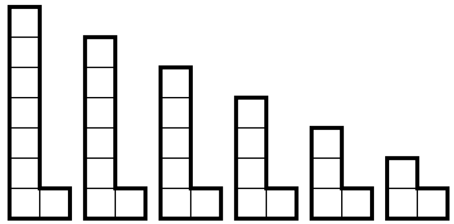

Рис. 1

3. Из набора уголков (рис. 1) сложите прямоугольник.

Второй тур
(каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. Длину прямоугольника увеличили на 1 м, а ширину уменьшили на 1 мм. Могла ли при этом площадь прямоугольника уменьшиться?

5. Буфетчик делает молочно-вишнёвый коктейль, смешивая в миксере молоко и вишнёвый сок. Молоко стоит 20 рублей за литр, а вишнёвый сок — 30 рублей за литр. Известно, что стоимость молока, заливаемого в миксер, равна стоимости сока, заливаемого в миксер. Сколько стоит литр молочно-вишнёвого коктейля?

6. Является ли простым число 1111112111111? (Простым называется число, у которого есть ровно два делителя: 1 и само это число.)

Третий тур
(каждая задача оценивается в 15 баллов)

7. По дороге на новогодний праздник несколько мальчиков помогали Деду Морозу нести подарки. Каждый из мальчиков нёс по три подарка, а остальные 142 подарка Дед Мороз вёз на санях. Все подарки Дед Мороз разделил поровну между всеми этими мальчиками и 14 девочками. Сколько могло быть мальчиков?

8. На Всемирном конгрессе мудрецов звездочёты сидят в ряд напротив алхимиков за большим длинным столом, а во главе стола сидит Самый Почтенный Мудрец. В первый день конгресса оказалось, что напротив каждого алхимика сидит звездочёт с более длинной бородой, чем у него. На второй день алхимики договорились сесть за столом в порядке возрастания длины бороды от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Но и звездочёты договорились между собой сесть в порядке возрастания длиннобородости от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Докажите, что и во второй день напротив каждого алхимика будет сидеть звездочёт с более длинной бородой, чем у него.

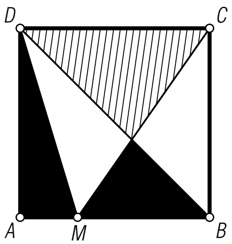

Рис. 2

9. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена произвольная точка M (рис. 2). Докажите, что площадь заштрихованного треугольника равна сумме площадей чёрных треугольников.

7 КЛАСС

Основной тур

1. У электромонтёра был кусок провода длиной 25 м, из которого утром он собирался вырезать необходимые для работы куски в 1 м, 2 м, 3 м, 6 м и 12 м. Но утром обнаружилось, что ночью какой-то хулиган разрезал провод на две части. Сможет ли монтёр выполнить намеченные работы?

2. Аня и Катя играют в игру «Быки и коровы». Аня загадала четырёхзначное число с неповторяющимися цифрами, а Катя пытается это число угадать. Для этого она предлагает свои четырёхзначные числа (тоже с неповторяющимися цифрами), а Аня про каждое из них сообщает, сколько в нём «быков» (т. е. цифр, которые не только присутствуют и в Катином числе, и в Анином, но даже стоят на одних и тех же местах) и «коров» (цифр, которые присутствуют в обоих числах, но стоят на разных местах). Катя предложила числа 5860, 1674, 9432 и 3017 и на каждое число получила ответ «2 коровы». Какое число загадала Аня?

3. Разрежьте по клеточкам квадрат 5×5 на три части с равными периметрами.

4. Каркас куба с рёбрами длины 1 намазан мёдом. В вершине куба находится жук. Какой минимальный путь он должен проползти, чтобы съесть весь мёд?

Дополнительный тур

5. Папа по реке доплывает от моста до пляжа за 9 минут, а от пляжа до моста — за 12 минут. Сын же от моста до пляжа доплывает за 12 минут. Сколько времени нужно сыну, чтобы доплыть от пляжа до моста?

6. На столе лежит стопка карт «рубашкой» вверх. Требуется переложить их в обратном порядке (и снова «рубашкой» вверх), применив несколько раз такую операцию: из любого места стопки вынимаются две соседние карты, переворачиваются как единое целое и кладутся на прежнее место. При каком количестве карт в стопке это можно сделать?

7. Докажите, что сумма цифр числа, делящегося на 7, может быть равна любому натуральному числу, кроме единицы.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

1. Ответ. Одно из решений ребуса: $0+1\cdot6+4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot9\cdot0=2\cdot3$.

2. Ответ: 6 рыцарей.

Решение. Предположим, что в центральной комнате дома живёт лжец. Тогда возможны две ситуации.

1) Среди соседей лжеца, живущего в центральной комнате, есть рыцарь. Тогда, поскольку о своих соседях этот рыцарь сказал правду, два его соседа, живущие в угловых комнатах, должны быть рыцарями. Соседи рыцарей, живущих в угловых комнатах, могут быть только рыцарями. Получается, что среди соседей лжеца, живущего в центральной комнате, есть по крайней мере три рыцаря. Это значит, что слова лжеца правдивы, а это невозможно.

2) Все соседи лжеца, живущего в центральной комнате, тоже лжецы. Тогда у жильцов угловых комнат все соседи — лжецы, а значит, они сказали неправду. Получается, что все жильцы дома — лжецы, что противоречит условию задачи.

Значит, наше первоначальное предположение неверно, и в центральной комнате живёт рыцарь. Тогда среди всех его соседей есть по крайней мере три рыцаря. Если у жильца угловой комнаты оба соседа — рыцари, он тоже должен быть рыцарем. Значит, в двух угловых комнатах живут рыцари. Получается, что в доме живут по крайней мере шесть рыцарей.

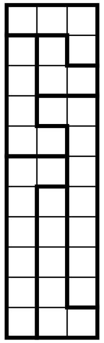

Рис. 3

Рассмотрим последние три комнаты. Здесь снова возможны две ситуации.

1) В средней из этих трёх комнат живёт рыцарь. Тогда оба соседа жильцов угловых комнат — рыцари, значит, в обеих угловых комнатах живут рыцари, а это значит, что все жители дома — рыцари, что противоречит условию.

2) В средней комнате живёт лжец. Тогда жители обеих угловых комнат солгали, значит, они тоже лжецы. Значит, в доме живут шесть рыцарей и три лжеца.

3. О т в е т показан на рис. 3.

У к а з а н и е. Заметим, что сумма площадей уголков (а, значит, и площадь прямоугольника) равна 33 клеточкам. Значит, стороны прямоугольника могут быть равны либо 1 и 33 клеточкам, либо 3 и 11 клеточкам. Понятно, что первая ситуация невозможна.

4. О т в е т: да, площадь прямоугольника могла уменьшиться.

Р е ш е н и е. Рассмотрим прямоугольник, длина которого 1 км, а ширина — 2 мм. Площадь такого прямоугольника равна 2 м^2. Длина нового прямоугольника — 1001 м, ширина — 1 мм, а площадь — 1,001 м^2, что меньше, чем площадь исходного.

5. О т в е т: литр коктейля стоит 24 рубля.

Р е ш е н и е. I с п о с о б. Пусть буфетчик заливает в миксер x литров сока. Стоимость x л сока составляет $30x$ рублей. Значит, стоимость молока, заливаемого в миксер, тоже составляет $30x$ рублей. Поскольку литр молока стоит 20 рублей, то $30x$ рублей соответствуют $1{,}5x$ л сока. В результате буфетчик получает $(x+1{,}5x)$ л коктейля общей стоимостью $(30x+30x)$ рублей. Чтобы узнать цену за литр молочно-вишнёвого коктейля, надо стоимость коктейля разделить на его объём, т. е. $60x$ разделить на $2{,}5x$, получится 24 рубля.

II с п о с о б. На рубль в миксер заливается 1/20 литра молока, и ещё на рубль — 1/30 литра сока. Таким образом, стоимость

обоих компонентов одинакова, причём на 2 рубля получается $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{12}$ литра коктейля, поэтому литр коктейля стоит $2\cdot 12=24$ рубля

6. О т в е т: нет, не является.

Р е ш е н и е. Это число можно разложить на множители:

$$1111112111111=1111111000000+1111111=$$
$$=1111111\cdot 1000000+1111111\cdot 1=$$
$$=1111111\cdot(1000000+1)=1111111\cdot 10000001.$$

7. О т в е т: мальчиков могло быть 6, 11, 36 или 86.

Р е ш е н и е. Пусть Дед Мороз сначала каждому ребёнку выдал по три подарка, а потом раздал остальные. Тогда после того, как дети получили по три подарка, у Деда Мороза осталось $142-3\cdot 14=100$ подарков. Эти оставшиеся 100 подарков он разделил поровну между всеми детьми. Так как детей больше 14, то выдать им по 10 или более дополнительных подарков он не мог. Значит, каждый из детей мог получить дополнительно по одному, по два, по четыре или по пять подарков (это все числа, меньшие 10, на которые нацело делится число 100).

Если каждый получил по одному дополнительному подарку, то число мальчиков равно $100-14=86$.

Если каждый получил по два дополнительных подарка, то число мальчиков равно $(100-2\cdot 14)/2=36$.

В случае, если каждый получил по четыре дополнительных подарка, мальчиков $(100-4\cdot 14)/4=11$.

Наконец, если по пять, то мальчиков $(100-5\cdot 14)/5=6$.

8. Перенумеруем звездочётов и алхимиков (отдельно друг от друга) в порядке убывания длины бороды. Предположим, что алхимик с номером n более длиннобородый, чем сидящий напротив звездочёт. Поскольку мудрецы сидят в порядке возрастания длины бороды, то все алхимики с номерами от 1 до n более длиннобороды, чем любой из звездочётов с номером, не меньшим n. В первый день конгресса каждый из алхимиков сидел напротив более длиннобородого звездочёта. Значит, каждый из алхимиков с номером от 1 до n мог сидеть только напротив звездочёта с номером от 1 до $n-1$. Получается, что количество звездочётов, напротив которых могли сидеть в первый день первые n алхимиков, меньше n. Но это невозможно, значит, наше предположение неверно. Следовательно, и во второй день напротив каждого алхимика будет сидеть звездочёт с более длинной бородой, чем у него.

9. Разобьём квадрат $ABCD$ на два прямоугольника $MBCN$ и $MADN$ (рис. 4). Площадь треугольника MCN равна половине площади прямоугольника $MBCN$, а площадь треугольника MDN равна половине площади прямоугольника $MADN$. Поэтому площадь треугольника CMD равна половине площади квадрата. Площадь треугольника ABD также равна половине площади квадрата.

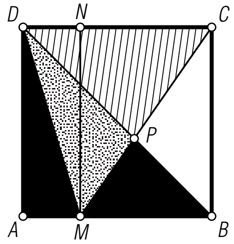

Рис. 4

Чтобы найти площадь заштрихованного треугольника, надо из площади треугольника CMD вычесть площадь «заточкованного» треугольника MDP (см. рис. 4), а чтобы найти сумму площадей чёрных треугольников, надо вычесть площадь «заточкованного» треугольника из площади треугольника ABD. Так как площади треугольников CMD и ABD равны, значит, и площадь заштрихованного треугольника равна сумме площадей чёрных треугольников.

7 КЛАСС

1. Ответ: монтёр сможет выполнить намеченные работы.

Решение. Из двух частей, на которые разрезан провод, хотя бы одна длиннее 12 м (иначе общая длина провода не превышала бы 24 м), поэтому от неё монтёр может отрезать кусок длиной 12 м.

Оставшиеся после отрезания двенадцатиметрового куска две части в сумме составляют $25-12=13$ м, поэтому хотя бы одна из этих частей длиннее 6 м. От этой части монтёр может отрезать шестиметровый кусок.

Оставшиеся две части в сумме составляют $13-6=7$ м, поэтому от одной из этих частей монтёр может отрезать трёхметровый кусок.

Оставшиеся две части в сумме составляют $7-3=4$ м, поэтому хотя бы одна из них не короче 2 м, значит, и двухметровый кусок монтёр сможет отрезать.

Из последних двух частей хотя бы одна не короче метра, поэтому монтёр сможет получить и метровый кусок.

2. Ответ: Аня загадала число 4603.

Решение. В записи чисел 5860 и 9432 все цифры различны, поэтому среди цифр 5, 8, 6, 0 и 9, 4, 3, 2 есть все цифры искомого числа. Значит, цифр 1 и 7 в Анином числе нет.

Рассматривая числа 1674 и 3017, делаем вывод, что цифры Аниного числа равны 6, 4 и 3, 0.

Цифра 0 не может занимать вторую и четвёртую позиции, также 0 не может быть первой цифрой числа. Значит, 0 — третья цифра.

Цифра 4 не может занимать вторую и четвёртую позиции, третью позицию занимает цифра 0, поэтому цифра 4 стоит на первом месте.

Цифра 6 не может находиться на втором месте, первая и третья позиции заняты цифрами 0 и 4, значит, цифра 6 — последняя, а оставшаяся цифра 3 — вторая.

Значит, Аня загадала число 4306.

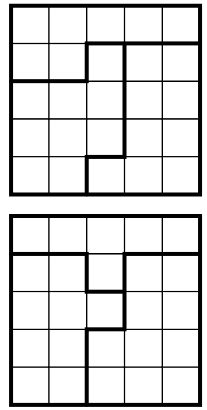

Рис. 5

3. Ответ: два из множества способов приведены на рис. 5.

4. Ответ: длина минимального пути равна 15; вот один из вариантов пути жука: $AA'D'C'B'BCDABB'A'D'DCC'$ (рис. 6).

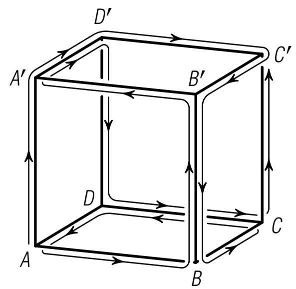

Рис. 6

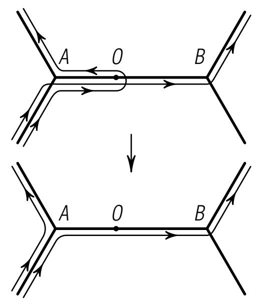

Рис. 7

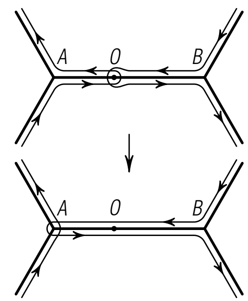

Рис. 8

Решение. Рассмотрим некоторый путь жука. Покажем, что длина этого пути не меньше 15.

Рассмотрим ситуацию, когда жук разворачивается на ребре. Пусть жук начинает ползти от вершины A, ползёт по ребру AB до точки O, разворачивается и возвращается в вершину A. (Очевидно, что жуку невыгодно разворачиваться на ребре AB несколько раз.) Выкинем кусок AOA из пути жука. Если оставшийся путь включает в себя отрезок AO, значит, выкинув этот кусок, мы только сократим путь, не уменьшая количество съеденного мёда (рис. 7). Если же оставшийся путь не включает в себя отрезок AO, значит, чтобы съесть мёд на отрезке OB, жук должен был проползти от вершины B к точке O (или даже дальше, но не до точки A), а потом вернуться обратно в B. Если мы заставим жука вместо BOB проползти BAB, а кусок AOA выкинем, длина пути жука не увеличится (рис. 8).

С помощью таких операций можно получить новый путь, который не длиннее исходного, но при этом все рёбра жук проползает целиком. Докажем, что этот новый путь (а, значит, и исходный) не короче 15.

Если жук приполз по ребру в какую-то вершину куба, и она не является конечной точкой его пути, он должен из этой вершины уползти. При этом, так как из вершины выходит три ребра, в каждую вершину, кроме начальной и конечной точек пути, он должен прийти как минимум дважды. Значит, минимум в шесть вершин жук по крайней мере дважды приполз и по крайней мере дважды из них уполз. Т. е. из каждой из этих вершин выходит по крайней мере одно ребро, пройденное дважды. Так как каждое ребро соединяет две вершины, всего таких рёбер не меньше трёх, а значит, общая длина пути не меньше, чем $12+3=15$.

5. Ответ: сыну потребуется 18 минут.

Решение. I способ. Отмерим четверть расстояния от моста до пляжа и установим там белый флажок. На таком же расстоянии от пляжа в сторону моста установим красный флажок.

Пусть теперь папа с сыном плывут от моста до пляжа. Дадим сыну фору: пусть отец начнёт плыть в тот момент, когда сын доплывёт до белого флажка. Тогда к пляжу они приплывут одновременно, через 9 минут.

Теперь пусть они плывут обратно к мосту. Снова дадим сыну фору: пусть папа начнёт заплыв, когда сын доплывёт до красного флажка. Тогда папа догонит сына через 9 минут (течение в равной степени мешает сейчас обоим пловцам, как до этого обоим помогало, так что на время, через которое отец догонит сына, наличие и направление течения не влияет). Но, так как папе до моста плыть 12 минут, он догонит сына точно у белого флажка. Сын, таким образом, плыл от красного флажка до белого 9 минут, а на расстояние от пляжа до моста потратит вдвое больше времени — 18 минут.

II способ. Пусть расстояние от моста до пляжа равно 1. Папа плывёт по течению со скоростью 1/9, а против течения — со скоростью 1/12, поэтому скорость течения равна $\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{12}\right):2=\frac{1}{72}$. Сын плывёт по течению со скоростью 1/12, поэтому против течения он плывёт со скоростью $\frac{1}{12}-\frac{1}{36}=\frac{1}{18}$. Поэтому, чтобы доплыть от пляжа до моста, ему потребуется 18 минут.

6. Ответ: при любом нечётном количестве карт в стопке их можно переложить в обратном порядке, при чётном же количестве карт этого сделать нельзя.

Решение. Сначала рассмотрим случай, когда количество карт n — нечётное число.

Перенумеруем карты сверху вниз. При $n=1$ задача уже решена. При $n\geqslant 3$ будем действовать так. Перевернём две нижние карты, потом вторую и третью, потом третью и четвёртую, и т. д. При такой операции нижняя карта (имеющая номер n) окажется на самом верху, а все остальные карты окажутся на одну позицию ниже. Действуя таким же образом, можно переложить карту с номером $n-1$, которая теперь является нижней, на второе место. После этого с помощью той же операции можно переложить карту с номером $n-2$ на третье место. И т. д. В конце концов, карты в стопке окажутся в обратном порядке.

Заметим, что при перекладывании стопки в обратном порядке новый номер каждой карты будет той же чётности, что и первоначальный. Поэтому каждая карта должна перевернуться чётное число раз. Значит, все карты в результате такого перекладывания окажутся «рубашкой» вверх.

Рассмотрим теперь случай, когда n — чётное число. Допустим, нам удалось переложить стопку в обратном порядке. При этом новый номер каждой карты получился другой чётности по сравнению с её первоначальным номером. Это значит, что карта была перевёрнута нечётное число раз. Значит, все карты в результате такого перекладывания оказались «рубашкой» вниз. Следовательно, переложить стопку из нечётного числа карт нужным образом нельзя.

7. Число с суммой цифр, равной единице, очевидно, является степенью десятки и не может делиться на 7.

Покажем, что для любой другой суммы цифр можно построить пример числа, кратного семи. Для этого воспользуемся тем, что число 1001 делится на 7 ($1001=7\cdot 143$).

Если сумма цифр чётна и равна $2k$, рассмотрим число $10011001\ldots1001$, где число 1001 написано k раз подряд. Оно делится на 7: $10011001\ldots1001=7\cdot 1430143\ldots0143$, а сумма его цифр равна $2k$.

Если сумма цифр нечётна и равна $2k+1$, то рассмотрим число $2110011001\ldots1001$, где после цифр 2 и 1 число 1001 выписано $k-1$ раз. Сумма его цифр равна $3+2(k-1)=2k+1$, и оно кратно 7: $2110011001\ldots1001=7\cdot 701430143\ldots0143$.

Математический праздник (для учащихся 6 и 7 классов) состоится 12 февраля 2006 года.

Приглашаются все желающие. Начало в 10.00. Место проведения: корпуса МГУ на Воробьёвых горах. Справки по тел. 241 12 37.

http://www.mccme.ru/olympiads/matprazdnik/ E-mail: matprazdnik@mccme.ru

---

Зимний тур 15-го турнира Архимеда по математике (для учащихся 5—7 классов) состоится 22 января 2006 года.

Приглашаются все желающие, предварительная заявка не требуется. Начало в 10.00. Турнир проводится по адресу: ул. Горчакова, д. 9, к. 1, школа № 2007. Проезд до ст. м. «Улица Горчакова» или от ст. м. «Ясенево» авт. 202, 101 до остановки «м/р Поляны» или авт. 165 до остановки «Плавский пр-д». При себе иметь тетрадь, ручку и конверт с маркой. Справки по тел. 716 29 35.

http://www.archimed.logic.ru/ E-mail: chulkov@logic.ru

Математическая регата для учащихся 7 классов состоится 4 марта 2006 года.

Принимают участие команды, состоящие из четырёх участников. Для участия в регате команда должна до 23 февраля 2006 года подать заявку по электронной почте: blinkov@mccme.ru

http://www.mccme.ru/olympiads/regata/

Малый мехмат — математические кружки для учащихся 6—11 классов.

Приглашаются все желающие, первый раз можно прийти на любое занятие. Начало занятий: 6—8 классы — в 16.00; 9—11 классы — в 18.00. Занятия проходят по субботам в Главном здании МГУ на Воробьёвых горах. Проезд до ст. м. «Университет», далее пешком или авт. 1, 113, 119, 661 до остановки «ДК МГУ». Справки по тел. 939 39 43.

http://mmmf.math.msu.su/

Математические кружки для учащихся 5—8 классов в Московском центре непрерывного математического образования.

5 классы — по вторникам в 16.00—17.00; 6 классы — по вторникам в 17.15—18.30; 7 классы — по субботам в 16.30—18.30. Адрес: Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до ст. м. «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком. Справки по тел. 241 05 00.

Математический кружок для учащихся 5—6 классов под руководством А. В. Спивака.

Занятия бесплатные, приглашаются все желающие. Занятия проходят по средам в 10.00—11.30 в школе № 17. Адрес: ул. Введенского, 28. Проезд до ст. м. «Беляево», далее пешком. Справки по тел. 420 98 11.

Вечерняя математическая школа для учащихся 6—7 классов.

Приглашаются все желающие. Занятия проходят по четвергам в 16.00—18.00 в гимназии № 1543. Адрес: ул. 26 Бакинских Комиссаров, 3, к. 5. Проезд до ст. м. «Юго-Западная», далее пешком. Справки по тел. 434 26 44, 433 56 65, 433 16 44, 433 76 29.