

**8 – 9 класс**

1. Дана прямоугольная полоска размером  $12 \times 1$ . Оклейте этой полоской в два слоя куб с ребром 1 (полоску можно сгибать, но нельзя надрезать).

2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$ . На продолжениях катетов  $AB$  и  $AC$  за вершины  $B$  и  $C$  отложили равные отрезки  $BK$  и  $CL$ .  $E$  и  $F$  — точки пересечения отрезка  $KL$  и прямых, перпендикулярных  $KC$  и проходящих через точки  $B$  и  $A$  соответственно. Докажите, что  $EF = FL$ .

3. Постройте параллелограмм  $ABCD$ , если на плоскости отмечены три точки: середины его высот  $BH$  и  $BP$  и середина стороны  $AD$ .

4. Пусть  $I$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Окружность, описанная около треугольника  $BIC$ , пересекает прямые  $AB$  и  $AC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что прямая  $EF$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

**8 – 9 класс**

5. Дан треугольник  $ABC$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  симметричны его вершинам относительно противоположных сторон.  $C_2$  — точка пересечения прямых  $AB_1$  и  $BA_1$ , точки  $A_2$  и  $B_2$  определяются аналогично. Докажите, что прямые  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  параллельны.

6. Внутри окружности зафиксирована точка  $P$ .  $C$  — произвольная точка окружности,  $AB$  — хорда, проходящая через точку  $P$  и перпендикулярная отрезку  $PC$ . Точки  $X$  и  $Y$  являются проекциями точки  $P$  на прямые  $AC$  и  $BC$ . Докажите, что все отрезки  $XY$  касаются одной и той же окружности.

**10 – 11 класс**

1. Треугольник разбили на пять треугольников, ему подобных. Верно ли, что исходный треугольник — прямоугольный?

2. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Точка  $A$  лежит на первой окружности, но вне второй. Прямые  $AP$  и  $AQ$  пересекают вторую окружность в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Укажите положение точки  $A$ , при котором треугольник  $ABC$  имеет наибольшую площадь.

3. В некоторой трапеции сумма длин боковой стороны и диагонали равна сумме длин другой боковой стороны и другой диагонали. Докажите, что трапеция равнобокая.

4. Середины противоположных сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведенные отрезки равны.

**10 – 11 класс**

5. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит четырехугольник  $ABCD$ , диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке  $P$ , и  $SP$  является высотой пирамиды. Докажите, что проекции точки  $P$  на боковые грани пирамиды лежат на одной окружности.

6. Дана окружность и точка  $P$  внутри нее. Два произвольных перпендикулярных луча с началом в точке  $P$  пересекают окружность в точках  $A$  и  $B$ . Точка  $X$  является проекцией точки  $P$  на прямую  $AB$ ,  $Y$  — точка пересечения касательных к окружности, проведенных через точки  $A$  и  $B$ . Докажите, что все прямые  $XY$  проходят через одну и ту же точку.