

8 – 9 класс

1. Дана прямоугольная полоска размером 12×1 . Оклейте этой полоской в два слоя куб с ребром 1 (полоску можно сгибать, но нельзя надрезать).

2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC . На продолжениях катетов AB и AC за вершины B и C отложили равные отрезки BK и CL . E и F — точки пересечения отрезка KL и прямых, перпендикулярных KC и проходящих через точки B и A соответственно. Докажите, что $EF = FL$.

3. Постройте параллелограмм $ABCD$, если на плоскости отмечены три точки: середины его высот BH и BP и середина стороны AD .

4. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Окружность, описанная около треугольника BIC , пересекает прямые AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что прямая EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC .

8 – 9 класс

5. Дан треугольник ABC . Точки A_1 , B_1 и C_1 симметричны его вершинам относительно противоположных сторон. C_2 — точка пересечения прямых AB_1 и BA_1 , точки A_2 и B_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 параллельны.

6. Внутри окружности зафиксирована точка P . C — произвольная точка окружности, AB — хорда, проходящая через точку P и перпендикулярная отрезку PC . Точки X и Y являются проекциями точки P на прямые AC и BC . Докажите, что все отрезки XY касаются одной и той же окружности.

10 – 11 класс

1. Треугольник разбили на пять треугольников, ему подобных. Верно ли, что исходный треугольник — прямоугольный?

2. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Точка A лежит на первой окружности, но вне второй. Прямые AP и AQ пересекают вторую окружность в точках B и C соответственно. Укажите положение точки A , при котором треугольник ABC имеет наибольшую площадь.

3. В некоторой трапеции сумма длин боковой стороны и диагонали равна сумме длин другой боковой стороны и другой диагонали. Докажите, что трапеция равнобокая.

4. Середины противоположных сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведенные отрезки равны.

10 – 11 класс

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке P , и SP является высотой пирамиды. Докажите, что проекции точки P на боковые грани пирамиды лежат на одной окружности.

6. Дана окружность и точка P внутри нее. Два произвольных перпендикулярных луча с началом в точке P пересекают окружность в точках A и B . Точка X является проекцией точки P на прямую AB , Y — точка пересечения касательных к окружности, проведенных через точки A и B . Докажите, что все прямые XY проходят через одну и ту же точку.