**IX всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина**

**XI устная олимпиада по геометрии**

**г. Москва, 14 апреля 2013 года**

## 8–9 класс

**1.** В треугольнике $ABC$ биссектриса $AK$ перпендикулярна медиане $CL$. Докажите, что в треугольнике $BKL$ также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

**2.** Циркулем и линейкой разбейте данный треугольник на два меньших треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

**3.** Биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке $I$. Прямая, проходящая через точку $C_1$ и перпендикулярная прямой $AA_1$, пересекает прямую, проходящую через $A_1$ и перпендикулярную $CC_1$, в точке $K$. Докажите, что середина отрезка $KI$ лежит на отрезке $AC$.

**4.** Дан треугольник $ABC$. На продолжениях сторон $AB$ и $CB$ за точку $B$ взяты точки $C_1$ и $A_1$ соответственно так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников $ABA_1$ и $CBC_1$ пересекаются на биссектрисе угла $B$.

---

## 8–9 класс

**5.** В треугольнике $ABC$: $\angle C = 60°$, $\angle A = 45°$. Пусть $M$ — середина $BC$, $H$ — ортоцентр треугольника $ABC$. Докажите, что прямая $MH$ проходит через середину дуги $AB$ описанной окружности треугольника $ABC$.

**6.** Дан треугольник $ABC$. На его сторонах $AB$ и $BC$ зафиксированы точки $C_1$ и $A_1$ соответственно. Найдите на описанной окружности треугольника $ABC$ точку $P$ такую, что расстояние между центрами описанных окружностей треугольников $APC_1$ и $CPA_1$ минимально.


**IX всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина**

**XI устная олимпиада по геометрии**

**г. Москва, 14 апреля 2013 года**

## 8–9 класс

**1.** В треугольнике $ABC$ биссектриса $AK$ перпендикулярна медиане $CL$. Докажите, что в треугольнике $BKL$ также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

**2.** Циркулем и линейкой разбейте данный треугольник на два меньших треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

**3.** Биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке $I$. Прямая, проходящая через точку $C_1$ и перпендикулярная прямой $AA_1$, пересекает прямую, проходящую через $A_1$ и перпендикулярную $CC_1$, в точке $K$. Докажите, что середина отрезка $KI$ лежит на отрезке $AC$.

**4.** Дан треугольник $ABC$. На продолжениях сторон $AB$ и $CB$ за точку $B$ взяты точки $C_1$ и $A_1$ соответственно так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников $ABA_1$ и $CBC_1$ пересекаются на биссектрисе угла $B$.

---

## 8–9 класс

**5.** В треугольнике $ABC$: $\angle C = 60°$, $\angle A = 45°$. Пусть $M$ — середина $BC$, $H$ — ортоцентр треугольника $ABC$. Докажите, что прямая $MH$ проходит через середину дуги $AB$ описанной окружности треугольника $ABC$.

**6.** Дан треугольник $ABC$. На его сторонах $AB$ и $BC$ зафиксированы точки $C_1$ и $A_1$ соответственно. Найдите на описанной окружности треугольника $ABC$ точку $P$ такую, что расстояние между центрами описанных окружностей треугольников $APC_1$ и $CPA_1$ минимально.

**IX всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина**

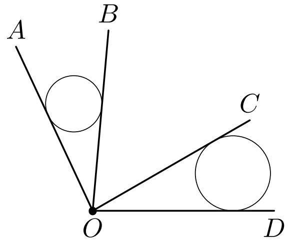
**XI устная олимпиада по геометрии**

**г. Москва, 14 апреля 2013 года**

## 10–11 класс

**1.** Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Описанные окружности треугольников $AOB$ и $COD$ пересекаются в точке $M$ на стороне $AD$. Докажите, что точка $O$ — центр вписанной окружности треугольника $BMC$.

**2.** Внутри угла $AOD$ проведены лучи $OB$ и $OC$, причём $\angle AOB = \angle COD$. В углы $AOB$ и $COD$ вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла $AOD$.




**3.** Существует ли многогранник, у которого отношение площадей любых двух граней не меньше 2?

**4.** На сторонах четырехугольника $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями во внешнюю сторону построены подобные треугольники $ABM$, $CBP$, $CDL$ и $ADK$ (соседние ориентированы по-разному). Докажите, что $PK = ML$.

---

## 10–11 класс

**5.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AP$ и $BQ$, а также медиана $CM$. Точка $R$ — середина $CM$. Прямая $PQ$ пересекает прямую $AB$ в точке $T$. Докажите, что $OR \perp TC$, где $O$ — центр описанной окружности треугольника $ABC$.

**6.** Трапеция $ABCD$ вписана в окружность $w$ ($AD||BC$). Окружности, вписанные в треугольники $ABC$ и $ABD$, касаются оснований трапеции $BC$ и $AD$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Точки $X$ и $Y$ — середины дуг $BC$ и $AD$ окружности $w$, не содержащих точек $A$ и $B$ соответственно. Докажите, что прямые $XP$ и $YQ$ пересекаются на окружности $w$.

**IX всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина**

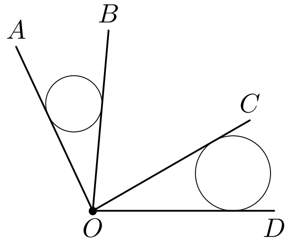
**XI устная олимпиада по геометрии**

**г. Москва, 14 апреля 2013 года**

## 10–11 класс

**1.** Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Описанные окружности треугольников $AOB$ и $COD$ пересекаются в точке $M$ на стороне $AD$. Докажите, что точка $O$ — центр вписанной окружности треугольника $BMC$.

**2.** Внутри угла $AOD$ проведены лучи $OB$ и $OC$, причём $\angle AOB = \angle COD$. В углы $AOB$ и $COD$ вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла $AOD$.



**3.** Существует ли многогранник, у которого отношение площадей любых двух граней не меньше 2?

**4.** На сторонах четырехугольника $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями во внешнюю сторону построены подобные треугольники $ABM$, $CBP$, $CDL$ и $ADK$ (соседние ориентированы по-разному). Докажите, что $PK = ML$.

---

## 10–11 класс

**5.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AP$ и $BQ$, а также медиана $CM$. Точка $R$ — середина $CM$. Прямая $PQ$ пересекает прямую $AB$ в точке $T$. Докажите, что $OR \perp TC$, где $O$ — центр описанной окружности треугольника $ABC$.

**6.** Трапеция $ABCD$ вписана в окружность $w$ ($AD||BC$). Окружности, вписанные в треугольники $ABC$ и $ABD$, касаются оснований трапеции $BC$ и $AD$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Точки $X$ и $Y$ — середины дуг $BC$ и $AD$ окружности $w$, не содержащих точек $A$ и $B$ соответственно. Докажите, что прямые $XP$ и $YQ$ пересекаются на окружности $w$.