Одиннадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

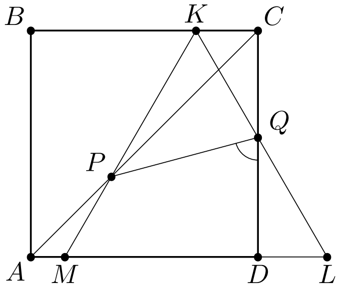
Тринадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 12 апреля 2015 года

8–9 класс

1. В треугольнике ABC высота AH проходит через середину медианы BM. Докажите, что в треугольнике BMC также одна из высот проходит через середину одной из медиан.

2. Квадрат $ABCD$ и равносторонний треугольник MKL расположены так, как это показано на рисунке. Найдите угол PQD.



3. В треугольнике ABC на сторонах AC, BC и AB отметили точки D, E и F соответственно, так, что $AD = AB$, $EC = DC$, $BF = BE$. После этого стерли все, кроме точек E, F и D. Восстановите треугольник ABC (*исследование проводить не требуется*).

4. В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекаются в точке E, лежащей на боковой стороне BC. Эти биссектрисы разбивают трапецию на три треугольника, в которые вписали окружности. Одна из этих окружностей касается основания AB в точке K, а две другие касаются биссектрисы DE в точках M и N. Докажите, что $BK = MN$.

8–9 класс

5. На стороне BE правильного треугольника ABE вне его построен ромб $BCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке F. Докажите, что $AF < BD$.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH. На сторонах AC и AB отмечены точки B_1 и C_1 соответственно, так, что HA — биссектриса угла B_1HC_1 и четырехугольник BC_1B_1C — вписанный. Докажите, что B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC.

Одиннадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

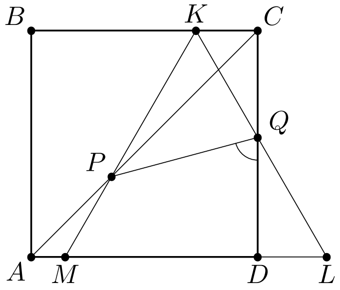
Тринадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 12 апреля 2015 года

8–9 класс

1. В треугольнике ABC высота AH проходит через середину медианы BM. Докажите, что в треугольнике BMC также одна из высот проходит через середину одной из медиан.

2. Квадрат $ABCD$ и равносторонний треугольник MKL расположены так, как это показано на рисунке. Найдите угол PQD.



3. В треугольнике ABC на сторонах AC, BC и AB отметили точки D, E и F соответственно, так, что $AD = AB$, $EC = DC$, $BF = BE$. После этого стерли все, кроме точек E, F и D. Восстановите треугольник ABC (*исследование проводить не требуется*).

4. В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекаются в точке E, лежащей на боковой стороне BC. Эти биссектрисы разбивают трапецию на три треугольника, в которые вписали окружности. Одна из этих окружностей касается основания AB в точке K, а две другие касаются биссектрисы DE в точках M и N. Докажите, что $BK = MN$.

8–9 класс

5. На стороне BE правильного треугольника ABE вне его построен ромб $BCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке F. Докажите, что $AF < BD$.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH. На сторонах AC и AB отмечены точки B_1 и C_1 соответственно, так, что HA — биссектриса угла B_1HC_1 и четырехугольник BC_1B_1C — вписанный. Докажите, что B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC.

Одиннадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Тринадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 12 апреля 2015 года

10–11 класс

1. У двух трапеций соответственно равны углы и диагонали. Верно ли, что такие трапеции равны?

2. Прямая l перпендикулярна одной из медиан треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам этого треугольника пересекают прямую l в трех точках. Докажите, что одна из них является серединой отрезка, образованного двумя оставшимися.

3. O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Прямая, проходящая через C и точку, симметричную B относительно O, пересекает основание AD в точке K. Докажите, что $S_{AOK} = S_{AOB} + S_{DOK}$.

4. В треугольнике ABC: точка M — середина BC, P — точка пересечения касательных в точках B и C к описанной окружности, N — середина отрезка MP. Отрезок AN пересекает описанную окружность в точке Q. Докажите, что $\angle PMQ = \angle MAQ$.

10–11 класс

5. В пространстве дан треугольник ABC и сферы S_1 и S_2, каждая из которых проходит через точки A, B и C. Для точек M сферы S_1, не лежащих в плоскости треугольника ABC, проводятся прямые MA, MB и MC, пересекающие сферу S_2 вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что плоскости, проходящие через точки A_1, B_1 и C_1, касаются фиксированной сферы либо проходят через фиксированную точку.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты CC_1 и BB_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A и параллельную прямой BC, в точках P и Q. Пусть A_0 — середина стороны BC, а AA_1 — высота. Прямые A_0C_1 и A_0B_1 пересекают прямую PQ в точках K и L. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PQA_1, KLA_0, $A_1B_1C_1$ и окружность с диаметром AA_1 пересекаются в одной точке.

Одиннадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Тринадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 12 апреля 2015 года

10–11 класс

1. У двух трапеций соответственно равны углы и диагонали. Верно ли, что такие трапеции равны?

2. Прямая l перпендикулярна одной из медиан треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам этого треугольника пересекают прямую l в трех точках. Докажите, что одна из них является серединой отрезка, образованного двумя оставшимися.

3. O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Прямая, проходящая через C и точку, симметричную B относительно O, пересекает основание AD в точке K. Докажите, что $S_{AOK} = S_{AOB} + S_{DOK}$.

4. В треугольнике ABC: точка M — середина BC, P — точка пересечения касательных в точках B и C к описанной окружности, N — середина отрезка MP. Отрезок AN пересекает описанную окружность в точке Q. Докажите, что $\angle PMQ = \angle MAQ$.

10–11 класс

5. В пространстве дан треугольник ABC и сферы S_1 и S_2, каждая из которых проходит через точки A, B и C. Для точек M сферы S_1, не лежащих в плоскости треугольника ABC, проводятся прямые MA, MB и MC, пересекающие сферу S_2 вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что плоскости, проходящие через точки A_1, B_1 и C_1, касаются фиксированной сферы либо проходят через фиксированную точку.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты CC_1 и BB_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A и параллельную прямой BC, в точках P и Q. Пусть A_0 — середина стороны BC, а AA_1 — высота. Прямые A_0C_1 и A_0B_1 пересекают прямую PQ в точках K и L. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PQA_1, KLA_0, $A_1B_1C_1$ и окружность с диаметром AA_1 пересекаются в одной точке.