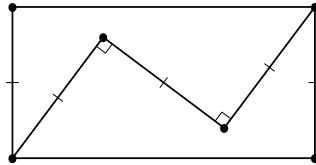


8–9 класс

1. В шестиугольнике равны углы, три главные диагонали равны между собой и шесть остальных диагоналей также равны между собой. Верно ли, что у него равны стороны?

2. В прямоугольнике проведена ломаная, соседние звенья которой перпендикулярны и равны меньшей стороне прямоугольника (см. рис). Найдите отношение сторон прямоугольника.



3. Окружность с центром O проходит через концы гипотенузы прямоугольного треугольника и пересекает его катеты в точках M и K . Докажите, что расстояние от точки O до прямой MK равно половине гипотенузы.

4. Пусть M и N — середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC соответственно. Внеписанная окружность треугольника ACM касается стороны AM в точке Q , а прямой AC — в точке P . Докажите, что точки P , Q и N лежат на одной прямой.

8–9 класс

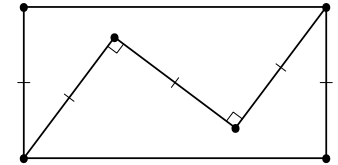
5. Точки I_A, I_B, I_C — центры внеписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон BC, AC и AB соответственно. Перпендикуляр из I_A на AC пересекает перпендикуляр из I_B на BC в точке X_C . Аналогично определяются точки X_A и X_B . Докажите, что прямые $I_A X_A, I_B X_B$ и $I_C X_C$ пересекаются в одной точке.

6. Дан квадратный лист бумаги со стороной 2016. Можно ли, согнув его не более десяти раз, построить отрезок длины 1?

8–9 класс

1. В шестиугольнике равны углы, три главные диагонали равны между собой и шесть остальных диагоналей также равны между собой. Верно ли, что у него равны стороны?

2. В прямоугольнике проведена ломаная, соседние звенья которой перпендикулярны и равны меньшей стороне прямоугольника (см. рис). Найдите отношение сторон прямоугольника.



3. Окружность с центром O проходит через концы гипотенузы прямоугольного треугольника и пересекает его катеты в точках M и K . Докажите, что расстояние от точки O до прямой MK равно половине гипотенузы.

4. Пусть M и N — середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC соответственно. Внеписанная окружность треугольника ACM касается стороны AM в точке Q , а прямой AC — в точке P . Докажите, что точки P , Q и N лежат на одной прямой.

8–9 класс

5. Точки I_A, I_B, I_C — центры внеписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон BC, AC и AB соответственно. Перпендикуляр из I_A на AC пересекает перпендикуляр из I_B на BC в точке X_C . Аналогично определяются точки X_A и X_B . Докажите, что прямые $I_A X_A, I_B X_B$ и $I_C X_C$ пересекаются в одной точке.

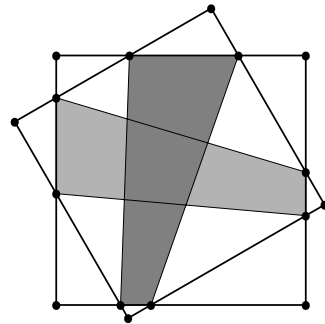
6. Дан квадратный лист бумаги со стороной 2016. Можно ли, согнув его не более десяти раз, построить отрезок длины 1?

10–11 класс

1. Прямая, проходящая через центр I вписанной окружности треугольника ABC , перпендикулярна AI и пересекает стороны AB и AC в точках C' и B' соответственно. В треугольниках $BC'I$ и $CB'I$ провели высоты $C'C_1$ и $B'B_1$ соответственно. Докажите, что середина отрезка B_1C_1 лежит на прямой, проходящей через точку I и перпендикулярной BC .

2. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X , а прямые A_3A_5 и A_1A_6 — в точке Y . Докажите, что прямые A_1A_2 и XU параллельны.

3. Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что площади заштрихованных четырехугольников равны.



4. В выпуклой n -угольной призме равны все боковые грани. При каких n эта призма прямая?

10–11 класс

5. Из точки A к окружности w проведена касательная AD и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках B и C (B лежит между точками A и C). Докажите, что окружность, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD , проходит через фиксированную точку (отличную от D).

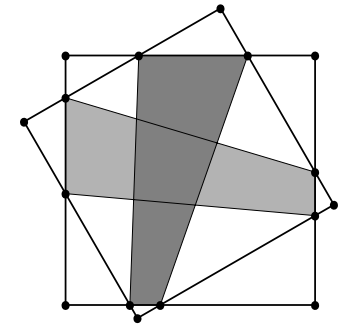
6. Дан остроугольный треугольник ABC . Пусть A' — точка, симметричная A относительно BC , O_A — центр окружности, проходящей через A и середины отрезков $A'B$ и $A'C$. Точки O_B и O_C определяются аналогично. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABC и $O_AO_BO_C$.

10–11 класс

1. Прямая, проходящая через центр I вписанной окружности треугольника ABC , перпендикулярна AI и пересекает стороны AB и AC в точках C' и B' соответственно. В треугольниках $BC'I$ и $CB'I$ провели высоты $C'C_1$ и $B'B_1$ соответственно. Докажите, что середина отрезка B_1C_1 лежит на прямой, проходящей через точку I и перпендикулярной BC .

2. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X , а прямые A_3A_5 и A_1A_6 — в точке Y . Докажите, что прямые A_1A_2 и XU параллельны.

3. Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что площади заштрихованных четырехугольников равны.



4. В выпуклой n -угольной призме равны все боковые грани. При каких n эта призма прямая?

10–11 класс

5. Из точки A к окружности w проведена касательная AD и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках B и C (B лежит между точками A и C). Докажите, что окружность, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD , проходит через фиксированную точку (отличную от D).

6. Дан остроугольный треугольник ABC . Пусть A' — точка, симметричная A относительно BC , O_A — центр окружности, проходящей через A и середины отрезков $A'B$ и $A'C$. Точки O_B и O_C определяются аналогично. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABC и $O_AO_BO_C$.