Пятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Семнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2019 года

8–9 класс

1. В треугольнике ABC: I — центр вписанной окружности, точка M лежит на стороне BC, причем $\angle BIM = 90°$. Докажите, что расстояние от точки M до прямой AB равно диаметру окружности, вписанной в треугольник ABC.

2. На стороне AC треугольника ABC во внешнюю сторону построен параллелограмм $ACDE$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, N и K — середины сторон BC и BA соответственно. Докажите, что прямые DK, EN и BO пересекаются в одной точке.

3. В остроугольном треугольнике ABC $\angle ABC = 60°$, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W; X — точка пересечения отрезков WH и AC. Докажите, что точки O, L, X и H лежат на одной окружности.

4. Серединный перпендикуляр к биссектрисе BL треугольника ABC пересекает биссектрисы его внешних углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PBQ, касается окружности, описанной около треугольника ABC.

8–9 класс

5. Даны отрезок PQ и окружность. По окружности движется хорда AB, равная PQ. Пусть T — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AP и BQ. Докажите, что все полученные таким образом точки T лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике ABC точка I_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB; A_1 и B_1 — точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами BC и CA соответственно; C' — точка на описанной окружности, диаметрально противоположная точке C. Докажите, что прямые I_cC' и A_1B_1 перпендикулярны.

Пятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Семнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2019 года

8–9 класс

1. В треугольнике ABC: I — центр вписанной окружности, точка M лежит на стороне BC, причем $\angle BIM = 90°$. Докажите, что расстояние от точки M до прямой AB равно диаметру окружности, вписанной в треугольник ABC.

2. На стороне AC треугольника ABC во внешнюю сторону построен параллелограмм $ACDE$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, N и K — середины сторон BC и BA соответственно. Докажите, что прямые DK, EN и BO пересекаются в одной точке.

3. В остроугольном треугольнике ABC $\angle ABC = 60°$, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W; X — точка пересечения отрезков WH и AC. Докажите, что точки O, L, X и H лежат на одной окружности.

4. Серединный перпендикуляр к биссектрисе BL треугольника ABC пересекает биссектрисы его внешних углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PBQ, касается окружности, описанной около треугольника ABC.

8–9 класс

5. Даны отрезок PQ и окружность. По окружности движется хорда AB, равная PQ. Пусть T — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AP и BQ. Докажите, что все полученные таким образом точки T лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике ABC точка I_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB; A_1 и B_1 — точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами BC и CA соответственно; C' — точка на описанной окружности, диаметрально противоположная точке C. Докажите, что прямые I_cC' и A_1B_1 перпендикулярны.

Пятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Семнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2019 года

10–11 класс

1. Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается сторон AB и CD в точках M и K соответственно. Прямая BK пересекает эту окружность в точке L; X — середина KL. Найдите угол MXK.

2. Углы одного четырехугольника соответственно равны углам другого четырехугольника. Кроме того, равны соответствующие углы между их диагоналями. Обязательно ли такие четырехугольники подобны?

3. Восстановите остроугольный треугольник ABC по вершине A, основанию высоты, проведенной из вершины B и центру окружности, описанной около треугольника BHC (точка H — ортоцентр треугольника ABC).

4. Дан прямоугольный треугольник ABC. Вневписанная окружность касается гипотенузы AB в точке C_1; A_1 — точка касания с прямой BC вневписанной окружности, касающейся стороны AC; B_1 — точка касания с прямой AC вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Найдите угол $A_1C_1B_1$.

10–11 класс

5. На сторонах AB и BC неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1 так, что четырехугольник AC_1A_1C вписанный. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке P. Прямая BP пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q. Докажите, что прямые QC_1 и CM, где M — середина A_1C_1, пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

6. Сумма косинусов плоских углов трехгранного угла равна -1. Найдите сумму его двугранных углов.

Пятнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Семнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 14 апреля 2019 года

10–11 класс

1. Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается сторон AB и CD в точках M и K соответственно. Прямая BK пересекает эту окружность в точке L; X — середина KL. Найдите угол MXK.

2. Углы одного четырехугольника соответственно равны углам другого четырехугольника. Кроме того, равны соответствующие углы между их диагоналями. Обязательно ли такие четырехугольники подобны?

3. Восстановите остроугольный треугольник ABC по вершине A, основанию высоты, проведенной из вершины B и центру окружности, описанной около треугольника BHC (точка H — ортоцентр треугольника ABC).

4. Дан прямоугольный треугольник ABC. Вневписанная окружность касается гипотенузы AB в точке C_1; A_1 — точка касания с прямой BC вневписанной окружности, касающейся стороны AC; B_1 — точка касания с прямой AC вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Найдите угол $A_1C_1B_1$.

10–11 класс

5. На сторонах AB и BC неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1 так, что четырехугольник AC_1A_1C вписанный. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке P. Прямая BP пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q. Докажите, что прямые QC_1 и CM, где M — середина A_1C_1, пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

6. Сумма косинусов плоских углов трехгранного угла равна -1. Найдите сумму его двугранных углов.