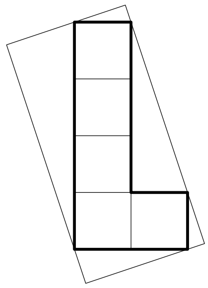
Вторая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Четвертая устная олимпиада по геометрии
г. Москва, 2 апреля 2006 года

8 – 9 класс

1. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK, параллельна CD.

2. Определите отношение сторон прямоугольника, описанного около уголка из пяти клеток (см. рисунок).



3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки C', A' и B' соответственно так, что угол $A'C'B'$ — прямой. Докажите, что отрезок $A'B'$ длиннее диаметра вписанной окружности треугольника ABC.

4. Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, проходящую через вершину B и делящую его на два треугольника, радиусы вписанных окружностей которых равны.

---

8 – 9 класс

5. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. На отрезке A_1B_1 во внешнюю сторону треугольника $A_1B_1C_1$ построен правильный треугольник $A_1B_1C_2$. Докажите, что C — середина отрезка C_1C_2.

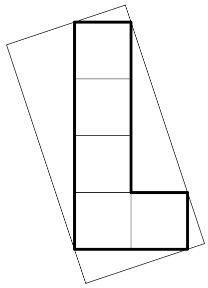
6. В остроугольном треугольнике один из углов равен $60°$. Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан треугольника, отсекает от него равносторонний треугольник.

Вторая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Четвертая устная олимпиада по геометрии
г. Москва, 2 апреля 2006 года

8 – 9 класс

1. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK, параллельна CD.

2. Определите отношение сторон прямоугольника, описанного около уголка из пяти клеток (см. рисунок).



3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки C', A' и B' соответственно так, что угол $A'C'B'$ — прямой. Докажите, что отрезок $A'B'$ длиннее диаметра вписанной окружности треугольника ABC.

4. Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, проходящую через вершину B и делящую его на два треугольника, радиусы вписанных окружностей которых равны.

---

8 – 9 класс

5. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. На отрезке A_1B_1 во внешнюю сторону треугольника $A_1B_1C_1$ построен правильный треугольник $A_1B_1C_2$. Докажите, что C — середина отрезка C_1C_2.

6. В остроугольном треугольнике один из углов равен $60°$. Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан треугольника, отсекает от него равносторонний треугольник.

Вторая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Четвертая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 2 апреля 2006 года

10 – 11 класс

1. Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, разбивающую его на два многоугольника, у которых равны радиусы описанных окружностей.

2. Шесть отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?

3. На плоскости даны две непересекающиеся окружности C_1 и C_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами $2R$ и R соответственно. Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, у которых одна вершина лежит на C_1, а две другие — на C_2.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Касательные к окружности в точках A и C и прямая, симметричная BD относительно точки O, пересекаются в одной точке. Докажите, что произведения расстояний от O до противоположных сторон четырехугольника равны.

---

10 – 11 класс

5. Основанием пирамиды служит выпуклый четырехугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основание и являющееся вписанным четырехугольником?

6. Даны треугольник ABC и произвольная точка P. A_1, B_1 и C_1 — вторые точки пересечения прямых AP, BP и CP с окружностью, описанной около треугольника ABC; A_2, B_2 и C_2 — точки, симметричные A_1, B_1 и C_1 относительно прямых BC, CA и AB, соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

Вторая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Четвертая устная олимпиада по геометрии
г. Москва, 2 апреля 2006 года

10 – 11 класс

1. Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, разбивающую его на два многоугольника, у которых равны радиусы описанных окружностей.

2. Шесть отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?

3. На плоскости даны две непересекающиеся окружности C_1 и C_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами $2R$ и R соответственно. Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, у которых одна вершина лежит на C_1, а две другие — на C_2.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Касательные к окружности в точках A и C и прямая, симметричная BD относительно точки O, пересекаются в одной точке. Докажите, что произведения расстояний от O до противоположных сторон четырехугольника равны.

---

10 – 11 класс

5. Основанием пирамиды служит выпуклый четырехугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основание и являющееся вписанным четырехугольником?

6. Даны треугольник ABC и произвольная точка P. A_1, B_1 и C_1 — вторые точки пересечения прямых AP, BP и CP с окружностью, описанной около треугольника ABC; A_2, B_2 и C_2 — точки, симметричные A_1, B_1 и C_1 относительно прямых BC, CA и AB, соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.