Департамент образования г. Москвы
Московский центр непрерывного математического образования
Центр педагогического мастерства
Школа №218 г. Москвы и филиал Малого мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова
Гимназия №1543 г. Москвы
Школа-интернат «Интеллектуал»

ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
6 И 7 КЛАССОВ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Москва
9 марта 2015 года

Результаты Городской устной математической олимпиады будут опубликованы на сайте

http://www.mccme.ru/ustn/

Олимпиада проводится на базе следующих школ:

гимназия №1543, школа №218,
школа-интернат «Интеллектуал»

Варианты подготовили:

6 *класс*: *Т. Баранова*, *И. Эльман*
7 *класс*: *Е. Гладкова*, *Н. Наконечный*
Редакторы: *А. Блинков*, *И. Раскина*, *А. Хачатурян*

Городская устная математическая олимпиада
Задачи и решения

Технический редактор: *А. Горская*

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 класс

Первый тур (каждая задача оценивается в 7 баллов)

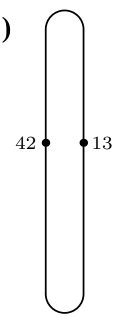
1. ДВЕ СТРОКИ В первой строке таблицы записаны подряд все числа от 1 до 9. Можно ли заполнить вторую строку этой таблицы теми же числами от 1 до 9 в каком-нибудь порядке так, чтобы сумма двух чисел в каждом столбце оказалась точным квадратом?

2. ВОЛЧИЙ ХВОСТ Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

3. ОРЕХИ В ряд стояло 10 детей. В сумме у девочек и у мальчиков орехов было поровну. Каждый ребёнок отдал по ореху каждому из стоящих правее его. После этого у девочек стало на 25 орехов больше, чем было. Сколько в ряду девочек?

Второй тур (каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. ПОДЪЕМНИК Кабинки горнолыжного подъёмника занумерованы подряд числами от 1 до 99. Игорь сел в кабинку №42 подъёмника у подножия горы и в какой-то момент заметил, что он поравнялся с движущейся вниз кабинкой №13 (см. рисунок), а через 15 секунд его кабинка поравнялась с кабинкой №12. Через какое время Игорь прибудет на вершину горы?



5. РАВЕНСТВО Может ли в равенстве $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ одно из чисел x, y или z быть однозначным, другое — двузначным, третье — трёхзначным?

6. КВАДРАТ Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составьте квадрат наименьшего возможного размера.

Третий тур (каждая задача оценивается в 13 баллов)

7. ОЛИМПИАДА Придя в школу, Коля и Алиса обнаружили на доске надпись: «ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА». Они договорились сыграть в следующую игру: за один ход в этой надписи разрешается стереть произвольное количество одинаковых букв, а выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Первым ходил Коля и стёр последнюю букву «А». Как надо играть Алисе, чтобы обеспечить себе выигрыш?

8. КУБИКИ Есть 16 кубиков, каждая грань которых покрашена в белый, чёрный или красный цвет (различные кубики могут быть покрашены по-разному). Посмотрев на их раскраску, барон Мюнхгаузен сказал, что может так поставить их на стол, что будет виден только белый цвет, может поставить так, что будет виден только чёрный, а может и так, что будет виден только красный. Могут ли его слова быть правдой?

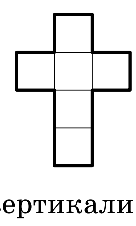
9. ФАЛЬШИВАЯ МОНЕТА Есть 13 золотых и 14 серебряных монет, из которых ровно одна фальшивая. Известно, что если фальшивая монета — золотая, то она легче настоящей, так как сделана из меньшего количества золота, а если фальшивая монета — серебряная, то она тяжелее настоящей, так как сделана из более дешевого и тяжелого металла. Как найти фальшивую монету за три взвешивания на чашечных весах без гирь? (*Настоящие золотые монеты весят одинаково и настоящие серебряные монеты весят одинаково*.)

7 класс

Первый тур (каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. МОНЕТЫ Три пирата делили мешок монет. Первый забрал $\frac{3}{7}$ всех монет, второй — 51% остатка, после чего третьему осталось на 8 монет меньше, чем получил второй. Сколько монет было в мешке?

2. РАЗВЁРТКА КУБА Петя склеил бумажный кубик и записал на его гранях числа от 1 до 6 так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях были одинаковыми. Вася хочет разрезать этот кубик так, чтобы получить развёртку, показанную на рисунке. При этом Вася старается, чтобы суммы чисел по горизонтали и по вертикали в этой развёртке отличались как можно меньше. Какая самая маленькая положительная разность может у него получиться, независимо от того, каким образом расставлял числа Петя?

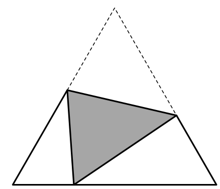


3. ТОЧНЫЙ КВАДРАТ Из натуральных чисел от 1 до 100 выбрано 50 различных. Оказалось, что сумма никаких двух из них не равна 100. Верно ли, что среди выбранных чисел всегда найдется квадрат какого-нибудь целого числа?

Второй тур (каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. ЧИСЛОВОЙ КРУГ Незнайка хочет записать по кругу 2015 натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел частное от деления большего на меньшее было простым числом. Знайка утверждает, что это невозможно. Прав ли Знайка?

5. РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (см. рисунок). Докажите, что углы двух белых треугольников соответственно равны.

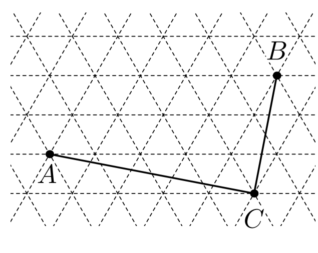


6. КОНКУРС Среди 25 жирафов, любые два из которых — различного роста, проводится конкурс «Кто выше?». За один раз на сцену выходят пять жирафов, а жюри справедливо (согласно росту) присуждает им места с первого по пятое. Каким образом надо организовать выходы жирафов, чтобы после семи выходов определить первого, второго и третьего призёров конкурса?

Третий тур (каждая задача оценивается в 13 баллов)

7. ПОЕЗДА У Пети есть 12 одинаковых разноцветных вагончиков (некоторые, возможно, одного цвета, но неизвестно, сколько вагончиков какого цвета). Петя считает, что различных 12-вагонных поездов он сможет составить больше, чем 11-вагонных. Не ошибается ли Петя? (*Поезда считаются одинаковыми, если в них на одних и тех же местах находятся вагончики одного и того же цвета.*)

8. УГОЛ. На сетке из равносторонних треугольников построен угол ACB (см. рисунок). Найдите его величину.



9. КВАДРАТ СУММЫ На каждой из ста карточек записано по одному числу, отличному от нуля, так, что каждое число равно квадрату суммы всех остальных. Какие это числа?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. Ответ: да, можно.

См. таблицу.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	6	5	4	3	9	1	7

Отметим, что указанная расстановка — единственная.

Д. Калинин (*Устная олимпиада «Открытие»* 2008/09 *уч. года, г. Кострома*)

2. Ответ: 5 простых людей и 3 творческих человека.

Каждый рассказчик удваивал или утраивал длину хвоста, поэтому 864 является произведением некоторого количества двоек и троек. Так как $864 = 2^5 \cdot 3^3$ и разложение любого числа на простые множители осуществляется единственным образом, то хвост волку «удлиняло» пять простых людей и трое творческих.

Л. Федулкин, И. Раскина

3. Ответ: 5 девочек.

Первый слева ребенок отдал 9 орехов, то есть у него стало на 9 орехов меньше, второй ребенок отдал 8 орехов, а получил 1, то есть у него стало на 7 орехов меньше. Продолжая аналогичные рассуждения, заметим, что у первых пяти детей стало меньше на 9, 7, 5, 3 и 1 орехов соответственно, а у следующих пяти — больше на 1, 3, 5, 7 и 9 орехов соответственно. Так как $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, то девочками могли быть только последние пять детей.

А. Шаповалов

4. Ответ: через 17 минут 15 секунд.

Так как Игорь сначала поравнялся с кабинкой №13, а потом с кабинкой №12, то нумерация идёт по направлению движения подъёмника. Примем расстояние между соседними кабинками за единицу. Тогда расстояние по тросу подъёмника между кабинками №42 и №12 равно 69 единицам: 57 единиц до кабинки №99 и еще 12 единиц до кабинки №12. Значит, расстояние между Игорем и вершиной горы равно половине этого количества, то есть 34,5 единицы.

Так как кабинки, с которыми поравнялась кабинка №42, движутся навстречу с той же скоростью, то скорость сближения кабинок в два раза больше скорости подъёмника. Значит, на преодоление одной кабинкой одной единицы расстояния уходит 30 секунд, а Игорь будет на вершине горы через $34{,}5 \cdot 30 : 60 = 17{,}25$ (минут).

И. Эльман

5. Ответ: нет, не может.

Предположим, такие числа нашлись. Если однозначное число — это y или z, то правая часть равенства заведомо больше левой. Таким образом, однозначным числом может быть только x. В этом случае левая часть не меньше, чем $\frac{1}{9}$, а правая часть не больше, чем $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} = \frac{11}{100}$. Так как $\frac{1}{9} > \frac{11}{100}$, то получим противоречие, то есть таких чисел нет.

А. Шаповалов

6. Ответ: например, см. рис. 1.

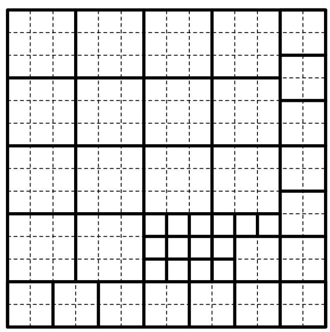


Рис. 1

Докажем, что нельзя составить квадрат меньше, чем со стороной 14.

Действительно, пусть искомый квадрат составлен из n квадратов каждого вида. Тогда его площадь равна $n \cdot 1^2 + n \cdot 2^2 + n \cdot 3^2 = 14n = 2 \cdot 7 \cdot n$. Так как длина стороны искомого квадрата должна быть целой, то полученное число должно являться точным квадратом. Значит, число n должно содержать множители 2 и 7, то есть $n \geqslant 14$, поэтому и длина стороны искомого квадрата — также не меньше, чем 14.

Можно не раскладывать 14 *на множители, а непосредственной проверкой убедиться, что при* $n \leqslant 13$ *выражение* $14n$ *не является точным квадратом.*

По мотивам задачи А. Шаповалова и И. Раскиной

7. Назовём кратностью буквы то количество раз, в котором эта буква встречается в надписи. После хода Коли, буквы «А» и «О» имеют кратность 3, буквы «Д», «И», «С» и «Я» — кратность 2, а буквы «Г», «К», «Л», «М», «Н», «П», «Р», «Т» и «У» — кратность 1. Для того, чтобы выиграть, Алисе надо сначала стереть любую букву кратности 1, чтобы количество букв каждой кратности стало чётным. Далее Алисе надо играть так, чтобы после каждого её хода количество букв каждой кратности было чётным. Для этого ей следует в ответ на каждый Колин ход стирать такое же количество букв той же кратности. Например, если Коля сотрёт три буквы «А», то Алиса должна стереть три буквы «О», а если Коля сотрёт одну букву «Д», то Алиса может стереть также одну букву «И». Тогда на каждый ход Коли у Алисы будет ответный ход, поэтому именно она сделает последний ход и выиграет.

Наглядно эту стратегию можно представить, например, так. Пусть Алиса мысленно упорядочит буквы по-другому:

«*АААДДИИКЛМНГПРТУССЯЯООО*».

Тогда первым своим ходом она стирает букву «Г», *а далее делает ходы, симметричные ходам Коли относительно середины этого* «*слова*».

Фольклор

8. Ответ: да, могут.

Выстроим кубики в виде параллелепипеда размером $4 \times 2 \times 2$ (см. рис. 2). Заметим, что у четырёх верхних угловых кубиков видно по три грани, сходящихся в одной вершине, у четырёх нижних не угловых кубиков видно по одной грани, а у восьми оставшихся кубиков видно по две соседние грани.

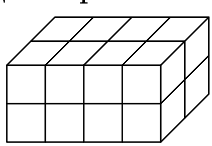


Рис. 2

Таким образом, кубики могут быть покрашены так: у четырёх кубиков — 3 белые грани с общей вершиной, 2 чёрные с общим ребром и одна красная; еще у четырёх кубиков — 3 чёрные грани с общей вершиной, 2 красные с общим ребром и одна белая; у следующих четырех — 3 красные с общей вершиной, 2 белые с общим ребром и одна чёрная грань, а у оставшихся четырёх кубиков — по две грани каждого цвета с общим ребром. В этом случае для каждого цвета найдутся четыре кубика с тремя гранями, восемь кубиков с двумя гранями и четыре кубика с одной гранью этого цвета. Следовательно, их можно будет поставить на соответствующие места параллелепипеда, и слова Мюнхаузена будут правдой.

Так как у 16 *кубиков всего* 96 *граней, то для решения задачи требуется найти такую расстановку кубиков на столе, в которой видно не более, чем* 32 *грани.*

Также кубики можно было поставить на столе в один слой в виде квадрата 4×4.

А. Банникова

9. Разобьём монеты три группы: две — по 4 золотых и 5 серебряных монет в каждой и одну группу из 5 золотых и 4 серебряных монет. Первым взвешиванием сравним веса первых двух групп. Если они равны, то фальшивая монета в третьей группе. Если не равны, то фальшивая монета или среди четырёх золотых с более легкой чаши, или среди пяти серебряных с более тяжёлой чаши.

Пусть фальшивая монета — среди 4 золотых и 5 серебряных (случай фальшивой монеты среди 5 золотых и 4 серебряных монет разбирается аналогично). Опять разобьём монеты на три группы: в двух группах — по 1 золотой и по 2 серебряных, а в третьей — 2 золотые и 1 серебряная монета. Далее выбираем группу с фальшивой монетой аналогично первому взвешиванию.

Если фальшивая монета оказалась в группе, где 1 золотая и 2 серебряные, то в третий раз взвешиваем две серебряные монеты. Тогда либо более тяжёлая из них — фальшивая, либо (если их веса равны) фальшивая монета — золотая. Фальшивая монета, оказавшаяся в группе, где 2 золотые и 1 серебряная, определяется аналогично.

Заочный математический конкурс 2009/10 *уч. года, г. Курган*

7 класс

1. Ответ: 700 монет.

Первый способ. Так как второй пират забрал 51% монет, оставшихся после первого, то третьему пирату досталось 49% этого количества. Следовательно, 8 монет составляют 2% монет, оставшихся после первого пирата. Значит, на долю второго и третьего пришлось

$8 \cdot 50 = 400$ монет, что составляет $\frac{4}{7}$ от их общего количества. Таким образом, в мешке было $400 : \frac{4}{7} = 700$ (монет).

Второй способ. Пусть в мешке было x монет. Тогда после первого пирата в мешке осталось $\frac{4}{7}x$ монет, значит второму пирату досталось $0{,}51 \cdot \frac{4}{7}x$, а третьему — $0{,}49 \cdot \frac{4}{7}x$ монет. Так как второму досталось на 8 монет больше, то $0{,}51 \cdot \frac{4}{7}x - 0{,}49 \cdot \frac{4}{7}x = 8$. Решая это уравнение, получим, что $x = 700$.

Уравнение можно составить и иначе, например,

$$\frac{3}{7}x + 0{,}51 \cdot \frac{4}{7}x + \left(0{,}51 \cdot \frac{4}{7}x - 8\right) = x.$$

Фольклор

2. Ответ: 1.

Первый способ. Заметим, что в указанной развёртке противоположными гранями являются крайние по горизонтали, а также первая и третья сверху по вертикали. Поэтому, независимо от расположения чисел на развёртке, разностью между суммами по вертикали и по горизонтали является число, записанное в нижнем квадрате. Следовательно, Васе надо разрезать кубик так, чтобы в этом квадрате была записана цифра 1. В этом случае на пересечении полос будет цифра 6, одна из пар (2; 5) и (3; 4) окажется на горизонтали, а другая — на вертикали, например так, как показано на рис. 3.

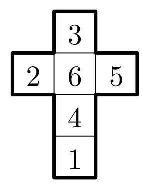


Рис. 3

Второй способ. Из условия задачи следует, что сумма чисел на противоположных гранях кубика равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) : 3 = 7$. Рассмотрим вертикальную полоску. На ней расположены две пары чисел, которые записаны на противоположных гранях кубика, поэтому сумма чисел на этой полоске равна 14. Рассмотрим горизонтальную полоску. Сумма чисел на ее крайних квадратах равна 7, значит для того, чтобы сумма чисел на этой полоске как можно меньше отличалась от 14, Васе нужно разрезать кубик так, чтобы в пересечении полосок была цифра 6. В этом случае в нижнем квадрате будет расположена цифра 1. Один из примеров развёртки, которую может получить Вася, показан на рис. 3.

Задачу можно также решить и полным перебором, рассмотрев шесть случаев (*с точностью до симметрии*) *расположения пар* (1; 6), (2; 5) *и* (3; 4).

Б. Френкин

3. Ответ: да, верно.

Если среди выбранных есть число 100, то оно и будет точным квадратом. Если же 100 не выбрано, то все остальные числа, кроме числа 50, можно разбить на 49 пар так, чтобы сумма чисел в каждой паре равнялась 100: $1 + 99$, $2 + 98$, ..., $49 + 51$. Из условия задачи следует, что из каждой такой пары выбрано ровно одно число (а также выбрано число 50). Но в паре $36 + 64$ оба слагаемых являются квадратами целых чисел, и хотя бы одно из них должно быть среди выбранных.

Олимпиада Австралии

4. Ответ: Знайка прав.

Пусть Незнайке удалось расположить числа по кругу так, как указано в условии. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Соединим стрелочками соседние числа, двигаясь, например, по часовой стрелке. На каждой стрелочке запишем частное от деления числа, стоящего в её конце, на число, стоящее в её начале. По условию, это либо простое число, либо число, обратное простому. Заметим, что каждое из исходных чисел ровно один раз было в роли делимого и ровно один раз — в роли делителя. Значит, произведение всех чисел, записанных на стрелочках, равно 1. Следовательно, для каждой дроби вида $\frac{p}{1}$ среди них должна найтись соответствующая ей дробь вида $\frac{1}{p}$. Но тогда дробей каждого типа поровну, что невозможно, так как их общее количество равно 2015.

Второй способ. Рассмотрим разложение каждого из записанных чисел на простые множители. Подсчитаем количество простых множителей у каждого числа (если среди простых множителей есть одинаковые, то их учитываем столько раз, с каким показателем степени они входят в разложение, а разложение числа 1, если оно оказалось среди записанных 2015, будем считать состоящим из нуля простых множителей). Так как отношение соседних чисел равно простому числу, то количества простых множителей в разложениях этих чисел отличаются ровно на 1. Поэтому у всех чисел, стоящих на нечётных местах, количество простых множителей имеет одну и ту же чётность: либо все они чётны, либо все нечётны. Но первое и 2015-е число стоят рядом, а потому количества их простых множителей должны отличаться на 1 и не могут иметь одну чётность. Полученное противоречие показывает, что требуемое расположение чисел невозможно.

По мотивам задачи А. Шаповалова (*окружной тур ВОШ*, 1994/95)

5. Введем обозначения так, как показано на рис. 4. Исходный треугольник — равносторонний, поэтому $\angle MCK = \angle A = \angle B = 60^\circ$. Угол ACB — развернутый, значит, $\angle 1 + \angle 2 = 120^\circ$ (*). Из треугольника KBC по теореме о сумме углов треугольника, получим: $\angle 2 + \angle 3 = 120^\circ$ (**). Из равенств (*) и (**) следует, что $\angle 1 = \angle 3$.

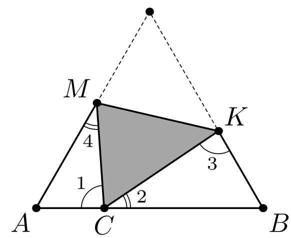


Рис. 4

Равенство углов 2 и 4 можно либо доказать аналогично, рассмотрев сумму углов в треугольнике MAC, либо воспользоваться тем, что в треугольниках MAC и KBC соответственно равны две пары углов, поэтому равны и третьи углы.

А. Кулыгин

6. Разобьём всех жирафов на пять групп по пять жирафов в каждой. Сравним жирафов внутри каждой группы. На это потребуется 5 выходов. Шестым выходом сравним самых высоких жирафов каждой группы. После этого обозначим группы буквами А, Б, В, Г, Д в порядке убывания роста самых высоких в группе, а жирафов внутри группы обозначим индексами 1, 2, 3, 4, 5 также в порядке убывания их роста.

$А_1$	$Б_1$	$В_1$	$Г_1$	$Д_1$
$А_2$	$Б_2$	$В_2$	$Г_2$	$Д_2$
$А_3$	$Б_3$	$В_3$	$Г_3$	$Д_3$
$А_4$	$Б_4$	$В_4$	$Г_4$	$Д_4$
$А_5$	$Б_5$	$В_5$	$Г_5$	$Д_5$

Рис. 5

Составим таблицу роста жирафов (см. рис. 5). Заметим, что жирафы из групп Г и Д не могут быть призёрами, так как рост каждого из них меньше, чем рост жирафов $А_1$, $Б_1$ и $В_1$. Также призерами не могут быть жирафы $А_4$, $Б_4$, $В_4$, $А_5$, $Б_5$, $В_5$. Кроме того, так как $А_1 > Б_1 > В_1 > В_2 > В_3$, то призёрами не могут быть жирафы $В_2$ и $В_3$. А так как $А_1 > Б_1 > Б_2 > Б_3$, то и $Б_3$ — не призер. Таким образом, призёрами могут оказаться только шесть жирафов: $А_1$, $А_2$, $А_3$, $Б_1$, $Б_2$, $В_1$. Но уже известно, что жираф, обозначенный $А_1$, — самый высокий, значит седьмым выходом мы сравним еще 5 жирафов и тем самым выявим жирафов, занявших 2 и 3 место.

Фольклор

7. Ответ: Петя ошибается.

Для краткости будем называть поезд из 11 вагончиков — «поезд-11», а поезд из двенадцати вагончиков – «поезд-12». Докажем, что «поездов-11» не меньше, чем «поездов-12».

Действительно, рассмотрим два различных «поезда-12» и отцепим от них последние вагончики. Если эти вагончики у них одинаковые, то, отцепив их, мы получим различные «поезда-11» (так как «поезда-12» были различными, а отцеплены одинаковые вагончики). Если же последние вагончики были различными, то на каком-то месте в этих поездах также должны находиться различные вагончики, так как все поезда составлены из одного и того же набора вагончиков (из всех вагончиков, которые есть у Пети).

Таким образом, все получившиеся «поезда-11» будут состоять из различных наборов вагончиков, то есть также будут различными. Следовательно, из различных «поездов-12» получаются различные «поезда-11», то есть «поездов-11» не меньше, чем «поездов-12».

*На самом деле, «поездов-*11*» ровно столько же, сколько и «поездов-*12*». Действительно, если рассмотреть два различных «поезда-*11*», то после добавления к ним последнего вагончика не могут получиться одинаковые «поезда-*12*», так как среди первых* 11 *вагончиков есть отличия. Поэтому из различных «поездов-*11*» получаются различные «поезда-*12*», то есть «поездов-*12*» не меньше чем «поездов-*11*».*

*В итоге мы установили взаимно однозначное соответствие между двумя множествами: различных «поездов-*12*» и различных «поездов-*11*».*

Е. Гладкова

8. Ответ: 90°.

Первый способ. Продлив отрезок BC на его длину за точку C, получим точку D (см. рис. 6а). Проведя отрезки AD и AB, заметим, что они равны, то есть треугольник ABD — равнобедренный. Так как AC — медиана этого треугольника, проведенная к его основанию, то AC — высота, то есть $\angle ACB = 90^\circ$.

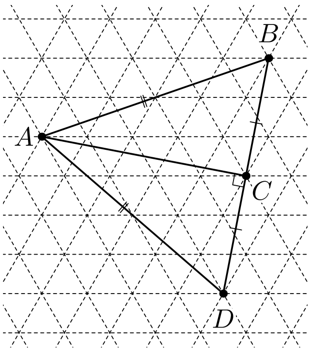


Рис. 6а

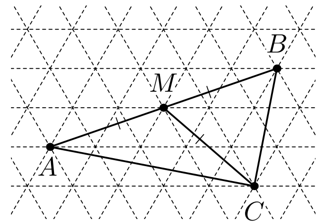


Рис. 6б

Второй способ. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть M — середина AB, тогда CM — медиана этого треугольника (см. рис. 6б). Заметим, что $AM = BM = CM$, то есть медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Значит, треугольник ABC — прямоугольный: $\angle ACB = 90^\circ$.

Школьники, еще не знакомые с использованным признаком прямоугольного треугольника, могут завершить это решение иначе: треугольники AMC и BMC — равнобедренные, значит, $\angle MAC = \angle MCA$ и $\angle MBC = \angle MCB$. Так как сумма этих четырёх углов равна 180°, *то* $\angle ACB = \angle MCA + \angle MCB = 90^\circ$.

Е. Бакаев

9. Ответ: сто чисел, каждое из которых равно $\frac{1}{99^2}$.

Докажем, что все записанные числа должны быть одинаковыми. Действительно, каждое из этих чисел является квадратом числа, отличного от нуля, поэтому все записанные числа должны быть положительными. Предположим, что число, записанное на одной из карточек, больше числа, записанного на другой. Отложим карточку с бо́льшим числом в сторону. По условию это число равно квадрату суммы остальных чисел. Поменяем местами карточки с бо́льшим и меньшим числами. Тогда отложенное число уменьшилось, а сумма всех остальных чисел (а значит и её квадрат) увеличилась, и равенство уже выполняться не может.

Обозначим число, записанное на каждой карточке, через x. Тогда $\left(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{99}\right)^2 = x$, то есть $(99x)^2 = x$. Так как $x \neq 0$, то $x = \frac{1}{99^2}$.

Доказать, что все записанные на карточках числа — одинаковые, можно и алгебраически. Пусть среди записанных чисел a_1, a_2, ..., a_{100} есть хотя бы два различных, например, a_1 и a_2. Тогда $a_1 = (a_2+a_3+\ldots+a_{100})^2$ и $a_2 = (a_1+a_3+\ldots+a_{100})^2$. Вычитая почленно первое равенство из второго, получим:

$$a_2 - a_1 = (a_1 + a_3 + \ldots + a_{100})^2 - (a_2 + a_3 + \ldots + a_{100})^2.$$

Используя формулу разности квадратов, упростим полученное равенство:

$$a_2 - a_1 = (a_1 + a_2 + 2a_3 + \ldots + 2a_{100})(a_1 - a_2).$$

Учитывая, что $a_1 \neq a_2$, получим, что

$$a_1 + a_2 + 2a_3 + \ldots + 2a_{100} = -1.$$

Это противоречит тому, что все записанные числа — положительные.

Фольклор

Математические кружки в школе №218

В школе №218 продолжает работу филиал Малого мехмата МГУ (5–7 классы) математические кружки для 8, 9 и 10-11 классов. Присоединиться к работе кружка можно на любом занятии (при наличии свободных мест). Занятия бесплатные. Адрес: Дмитровское шоссе, д. 5а (ст. м. «Дмитровская», «Тимирязевская»). Справки: blinkov@mccme.ru, тел. (499) 976-19-85 (вт, чт, птн.) 14.00–15.00.

Расписание занятий: http://school218.ru/node/394

Школа №218 объявляет набор учащихся на 2015/16 учебный год

Обучение по инд. уч. планам в 8, 9 и 10 классы (угл. изуч. ряда предметов). Справки: blinkov@mccme.ru, тел. (499) 976-19-85 (вт, чт, птн. 14.00–15.00). Подробная информация на сайтах

http://sch218.mskobr.ru и http://school218.ru

Московская гимназия на Юго-Западе №1543 объявляет набор в 8-е профильные классы

Набираются классы: математический (первый экзамен: математика 2 апреля), физико-химический (первый экзамен: физика 8 апреля), биологический (первый экзамен: биология 7 апреля), историко-филологический (первый экзамен: русский язык 30 марта). Начало всех экзаменов в 16.00. Возможен добор в старшие профильные классы.

Адрес гимназии: ул. 26 Бакинских комиссаров, д. 3, корп. 5. Гимназия находится недалеко от ст. м. «Юго-Западная».
Справки по тел. (495) 433-16-44, (495) 434-26-58,
http://1543.ru http://s43.mccme.ru/math/

Набор в школу-интернат «Интеллектуал»

Школа-интернат «Интеллектуал» объявляет набор в 5-й класс (регистрация до 9 марта), добор в 6-10 классы (регистрация до 16 марта). Приёмные экзамены: март-июнь.

Сайт: http://sch-int.ru

Летняя школа интенсивного обучения «Интеллектуал» для школьников, окончивших 7 и 8 класс и интересующихся математикой и естественными науками, состоится 4-18 июня 2015 года. Для поступления надо с 1 марта по 25 апреля написать заочную олимпиаду.

Сайт: http://www.sch-int.ru/summer

Математические кружки в МЦНМО для 4–8 классов

Подробную информацию можно посмотреть на сайте
http://www.mccme.ru/circles/mccme/2015
Расписание: 4 класс — по вторникам 16.00–17.00, 5 класс — по вторникам 17.15–18.30, 6–8 классы — по субботам 16.30–18.30.