XIV Устная математическая олимпиада для 6–7 классов. 20 марта 2016 года

7 класс.

1. СЕМЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ. Мальвина велела Буратино разрезать квадрат на 7 прямоугольников (необязательно различных), у каждого из которых одна сторона в два раза больше другой. Выполнимо ли это задание?

Ответ: да, выполнимо.

Решение. Существует много примеров. На рис. 1.1 а, б показаны два из них: для клетчатых квадратов со сторонами 6 и 8 клеток соответственно.

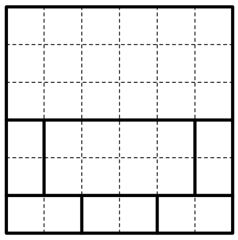


Рис. 7.1а

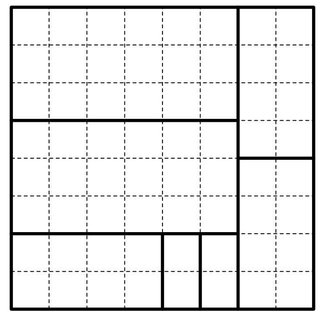


Рис. 7.1б

Фольклор

2. НЕИСПРАВНЫЕ ЧАСЫ. В комнате у Папы Карло на каждой стене висят часы, причем они все показывают неверное время: первые часы ошибаются на 2 минуты, вторые — на 3 минуты, третьи — на 4 минуты и четвертые — на 5 минут. Однажды Папа Карло, выходя на улицу, решил узнать точное время и увидел такие показания часов: 14 : 54, 14 : 57, 15 : 02 и 15 : 03. Помогите Папе Карло определить точное время.

Ответ: 14 : 59.

Решение. Показания первых и четвертых часов различаются на 9 минут. Значит, из них одни ошибаются на 4 минуты, а другие — на 5 минут. Следовательно, точное время: 14 : 59 или 14 : 58.

В первом случае вторые часы на 2 минуты отстают, а третьи — на три минуты спешат. Это не противоречит условию задачи.

Второй случай невозможен, так как часы, показывающие 14 : 57, ошибаются ровно на 1 минуту, что противоречит условию.

Олимпиада республики Беларусь

3. ЦВЕТНЫЕ ДРОБИ. Мальвина записала по порядку 2016 обыкновенных правильных дробей: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, ... (в том числе, и сократимые). Дроби, значение которых меньше чем 1/2, она покрасила в красный цвет, а остальные дроби — в синий. На сколько количество красных дробей меньше количества синих?

Ответ: на 32.

Решение. Заметим, что записана только одна дробь со знаменателем 2, ровно две дроби со знаменателем 3, ровно три — со знаменателем 4, и так далее. Так как $2016 = 64 \cdot 63 : 2$, то число 2016 равно сумме всех натуральных чисел от 1 до 63. Значит, Мальвина записала все дроби со знаменателями 2, 3, ..., 64.

Рассмотрим дроби с одинаковым знаменателем, записанные в порядке возрастания. Если знаменатель нечетный, то каждая из дробей первой половины меньше чем 1/2, а каждая из дробей второй половины больше, чем 1/2. Если знаменатель четный, то есть дробь, равная 1/2, а из остальных дробей половина меньше чем 1/2, а другая половина — больше чем 1/2.

Таким образом, количество красных дробей меньше количества синих в точности на количество дробей, равных 1/2. Это дроби 1/2, 2/4, 3/6, ..., 32/64, их количество равно $64 : 2 = 32$.

Э. Акопян, Д. Калинин

4. ФАЛЬШИВАЯ МОНЕТА. У Буратино есть 5 монет, ровно одна из них — фальшивая. Какая именно — известно только Коту Базилио. Буратино может выбрать три монеты, одну из них отдать Коту, и за это узнать про другие две, есть ли среди них фальшивая. Буратино знает, что Кот за настоящую монету скажет правду, а за фальшивую — соврет. Как Буратино определить фальшивую монету среди всех пяти, задав не более трех вопросов?

Решение. 1) Буратино спрашивает про две любые монеты, заплатив третьей. Если Кот утверждает, что среди монет нет фальшивой, то эти три монеты настоящие. Если же Кот утверждает, что среди монет есть фальшивая, то какая-то из этих трех монет фальшивая, значит, две оставшиеся монеты настоящие. В любом случае из четырех монет, оставшихся у него, Буратино определит две настоящие.

2) Буратино отдает одну из известных ему настоящих монет Коту, а другую объединяет в пару с одной из неизвестных и показывает эту пару Коту. Ответ будет правдив, поэтому либо фальшивая монета в этой паре (и тогда Буратино ее определит), либо обе монеты настоящие и тогда фальшивой может быть либо третья его монета, либо первая монета, выплаченная Коту.

3) Буратино опять отдает настоящую монету Коту и спрашивает про две оставшиеся у него монеты. Ответ опять правдив, поэтому фальшивая монета однозначно определяется.

А. Банникова

5. ПЕСТИКИ – ТЫЧИНКИ. Артемон подарил Мальвине букет из аленьких цветочков и черных роз. У каждой черной розы 4 пестика и 4 тычинки, а на стебле 2 листка. У каждого аленького цветочка 8 пестиков и 10 тычинок, а на стебле 3 листка. Листков в букете на 108 меньше, чем пестиков. Сколько тычинок в букете?

Ответ: 216.

Решение. Пусть в букете a аленьких цветочков и b черных роз. Тогда листков в нем $3a + 2b$, а пестиков $8a+4b$. Из условия задачи следует равенство $3a+2b+108 = 8a+4b$, откуда $5a+2b = 108$. Тогда количество тычинок в букете равно $10a + 4b = 2(5a + 2b) = 216$.

А. Шаповалов

6. УРОК МАТЕМАТИКИ. Мальвина записала равенство МА·ТЕ·МА·ТИ·КА = 2016000 и предложила Буратино заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами, чтобы равенство стало верным. Есть ли у Буратино шанс выполнить задание или таких замен не существует?

Ответ: Такие замены существуют. Возможны, например, такие варианты: $10 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 28 \cdot 30 = 2016000$ или $10 \cdot 28 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 30 = 2016000$.

Поиск ответа удобно начать с разложения числа 2016000 *на простые множители*: $2016000 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$.

Э. Акопян

7. ДВЕ СПИЧКИ. Буратино выложил на стол 2016 спичек и предложил Арлекину и Пьеро сыграть в игру, беря по очереди спички со стола: Арлекин может своим ходом брать либо 5 спичек, либо 26, а Пьеро — либо 9, либо 23. Не дождавшись начала игры, Буратино ушел, а когда он вернулся, партия уже закончилась. На столе осталось две спички, а проиграл тот, кто не смог сделать очередной ход. Хорошенько подумав, Буратино понял, кто ходил первым, и кто выиграл. Выясните это и вы!

Ответ: первым ходил Арлекин, он и выиграл.

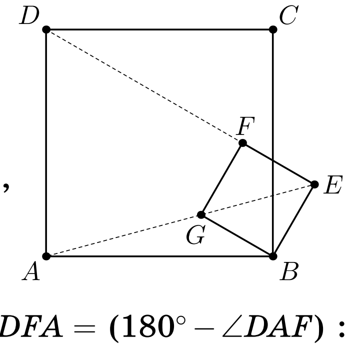
Решение. Заметим, что при делении на 7 количество спичек, взятых Арлекином, дает остаток 5, а количество спичек, взятых Пьеро, дает остаток 2. Число 2016 кратно семи, поэтому после любого хода игрока, ходившего вторым, количество оставшихся спичек также будет кратно семи.

Так как на столе осталось две спички, а 2 при делении на 7 дает остаток 2, то последним ходом было взято число спичек, дающее при делении на 7 остаток 5. Значит, последний ход сделал Арлекин и выиграл.

Все ходы, кроме последнего, разбиваются на пары, в которых общее количество взятых спичек кратно семи, поэтому первый ход также сделал Арлекин.

В. Клепцын

8. ДВА КВАДРАТА. Квадраты $ABCD$ и $BEFG$ расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что точки A, G и E лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки D, F и E также лежат на одной прямой.



Решение. *Первый способ.* Рассмотрим треугольники AGB и AGF (см. рис. 7.8а): AG — общая сторона, $GB = GF$ (равные стороны квадрата $BEFG$), $\angle AGB = AGF = 135^\circ$ (углы, смежные с углами BGE и FGE, равными по 45°). Следовательно, $\triangle AGB = \triangle AGF$ (по I признаку). Тогда $AB = AF = AD$, $\angle GAB = GAF = \alpha$, $\angle GFA = 180^\circ - \angle AGF - \angle GAF = 45^\circ - \alpha$.

В равнобедренном треугольнике ADF: $\angle DAF = 90^\circ - \angle FAB = 90^\circ - 2\alpha$, $\angle DFA = (180^\circ - \angle DAF) : 2 = (90^\circ + 2\alpha) : 2 = 45^\circ + \alpha$.

Таким образом, $\angle DFG = \angle GFA + \angle DFA = (45^\circ - \alpha) + (45^\circ + \alpha) = 90^\circ$, тогда $\angle DFG + \angle EFG = 180^\circ$, значит, точки D, F и E лежат на одной прямой.

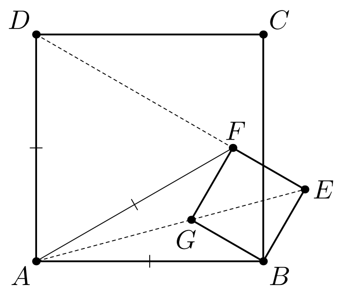


Рис. 7.8а

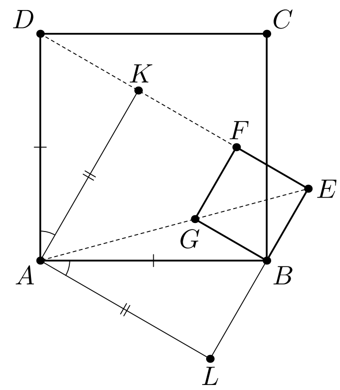


Рис. 7.8б

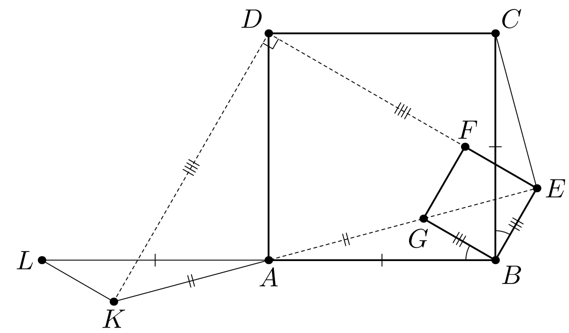


Рис. 7.8в

Второй способ. Опустим перпендикуляры AK и AL на прямые EF и EB соответственно (см. рис. 7.8б). Тогда достаточно доказать, что на одной прямой лежат точки D, K и F. Четырехугольник $AKEL$ — квадрат, так как три его угла — прямые, а диагональ EG — биссектриса угла E.

Треугольники DAK и BAL равны (по I признаку), так как $AD = AB$, $AK = AL$, $\angle DAK = 90^\circ - \angle BAK = \angle BAL$. Значит, $\angle DKA = \angle BLA = 90^\circ$, откуда и следует, что точки D, K и F лежат на одной прямой.

Третий способ. Так как $FE || GB$, то достаточно доказать параллельность прямых DE и GB.

На лучах BA и GA отметим точки L и K так, что $LA = AB$, $KA = AG$ (см. рис. 7.8в). Тогда $\triangle ABG = \triangle ALK$ (по I признаку).

Так как $\angle ABC = \angle GBE = 90^\circ$, то $\angle ABG = \angle CBE$, откуда, учитывая, что $AB = CB$ и $BG = BE$, следует равенство треугольников ABG и CBE.

Значит, $AK = AG = CE$, $\angle DAK = 90^\circ + \angle KAL = 90^\circ + \angle BAG = 90^\circ + \angle BCE = \angle DCE$. Учитывая, что $AD = CD$, получим: $\triangle DAK = \triangle DCE$, откуда $DK = DE$. Из равенства углов CDE и ADK следует, что $\angle KDE = 90^\circ$. Тогда треугольник EDK равнобедренный и прямоугольный, значит, $\angle DEG = 45^\circ = \angle EGB$, то есть $DE \parallel GB$.

Е. Бакаев

9. ШАХМАТНЫЙ ТУРНИР. Среди актеров театра Карабаса Барабаса прошел шахматный турнир. Каждый участник сыграл с каждым из остальных ровно один раз. За победу давали один сольдо, за ничью — полсольдо, за поражение не давалось ничего. Оказалось, что среди любых трех участников найдется шахматист, заработавший в партиях с двумя другими ровно 1,5 сольдо. Какое наибольшее количество актеров могло участвовать в таком турнире?

Ответ: 5.

Решение. *Пример.* Обозначим участников буквами А, Б, В, Г, Д. Пусть А выиграл у Б, Б выиграл у В, В — у Г, Г — у Д, Д — у А, а остальные партии закончились вничью. Условие задачи выполняется.

Оценка (*первый способ*). Заметим, что из условия задачи следует, что для этого турнира должны выполняться два условия:

(1) не может быть трех игроков, все партии между которыми закончились вничью;

(2) не может быть трех игроков, в партиях между которыми не было ничейных результатов.

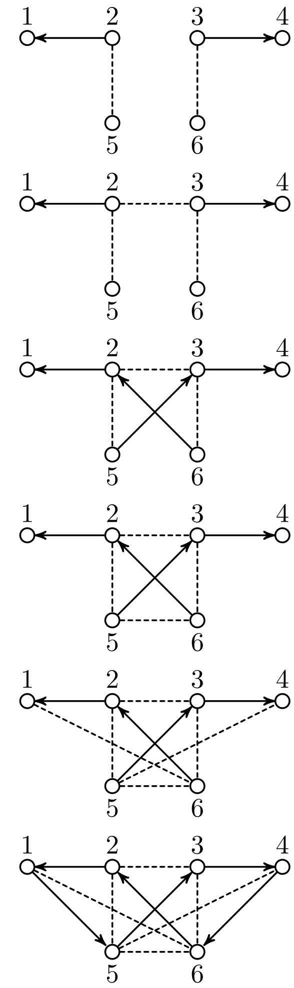
Предположим, что в турнире участвовало не менее шести игроков. Пусть один из них — Б (*Буратино*). Так как он сыграл не менее пяти партий, то среди них либо есть три ничейные (пусть с В, Г и Д), либо есть три результативные (с К, Л и М).

В первом случае, чтобы избежать ситуации (1) в тройках БВГ, БГД и БВД, в партиях между В, Г и Д не должно быть ничьих, что для этой тройки противоречит (2).

Во втором случае чтобы избежать ситуаций (2) в тройках БКЛ, БЛМ и БКМ, все партии между К, Л и М должны были закончиться вничью, что противоречит (1) для тройки КЛМ.

Полученные противоречия показывают, что больше пяти актеров в таком турнире участвовать не могло.

Оценка (*второй способ*). Если в турнире участвовало не менее шести игроков, то для любых шести из них выполняются все ограничения, указанные в условии. Пусть это игроки с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, причем в тройке 1-2-5 игрок 2 набрал 1,5 сольдо, выиграв у 1 и сыграв вничью с 5, а в тройке 3-4-6 игрок 3 набрал 1,5 сольдо, выиграв у 4 и сыграв вничью с 6. Эта ситуация показана на схеме 1.



Отметим факты, следующие из условия:

(1) никто из участников не мог выиграть две партии (иначе тройка, составленная из него и тех, кто ему проиграл, противоречит условию);

(2) никакие три участника не могут все партии между собой закончить вничью;

(3) среди любых трех игроков какие-то двое сыграли вничью.

Схема 2: в партии 2–3 не может никто выиграть, иначе кто-то из них создаст противоречие (1).

Схема 3: определяются результаты партий 3–5 и 2–6, так как ничьи создают противоречие (2) в тройках 2-3-5 или 2-3-6, а игроки 2 и 3 не могут опять выиграть.

Схема 4: партия 5–6 может окончиться только вничью (аналогично тому, что было между 2 и 3).

Схема 5: по причине (3) партии 1–6 (для тройки 1-2-6) и 4–5 (для тройки 3-4-5) окончились вничью.

Схема 6: по причине (3) партии 1–5 (для тройки 1-5-6) и 4–6 (для тройки 4-5-6) не могут закончиться вничью, так как 5 и 6 уже выигрывали, то результат таков, как на схеме.

Из схемы 6 видно, что ничейный результат между 1 и 3 невозможен (по причине (2) для тройки 1-3-6), иной результат также невозможен, так как и 1, и 3 уже выигрывали — см. (1).

Таким образом, количество участников турнира не превосходит пяти.

Олимпиада республики Беларусь

Вариант составили: *Э. Акопян*, *А. Банникова*, *Д. Калинин.*