**XV Устная математическая олимпиада для 6 – 7 классов**
**19.03.2017**
**6 класс**

## 1. МОРОЖЕНОЕ

В Стране дураков ходят монеты в 1, 2, 3, … 19, 20 сольдо (других нет). У Буратино была одна монета. Он купил мороженое и получил одну монету сдачи. Снова купил такое же мороженое и получил сдачу тремя монетами разного достоинства. Буратино хотел купить третье такое же мороженое, но денег не хватило. Сколько стоит мороженое?

*М. Евдокимов*

**Ответ**: 7 сольдо.

**Решение**. Сдача тремя разными монетами составляет не меньше чем 1 + 2 + 3 = 6 сольдо. Так как этих денег не хватило на мороженое, то оно стоит не меньше чем 7 сольдо. Больше чем 7 сольдо мороженое стоить не может, иначе на два мороженых Буратино потратил бы не меньше чем 8 + 8 = 16 сольдо, но у него была всего одна монета, то есть не больше чем 20 сольдо, и тогда он не смог бы получить 6 сольдо сдачи. Значит, мороженое может стоить только 7 сольдо.

Действительно, тогда процесс платы за мороженое выглядел так: 20 – 7 = 13; 13 – 7 = 6 = 1 + 2 + 3.

## 2. ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ

Саша и Ваня родились 19 марта. Каждый из них отмечает свой день рождения тортом со свечками по количеству исполнившихся ему лет. В тот год, когда они познакомились, у Саши на торте было столько же свечек, сколько у Вани сегодня. Известно, что суммарное количество свечек на четырёх тортах Вани и Саши (тогда и сегодня) равно 216. Сколько лет исполнилось Ване сегодня?

*А. Блинков*

**Ответ**: 54.

**Решение**. Пусть сегодня на торте у Вани – $V$ свечек. В год знакомства, на $t$ лет раньше, на торте у Саши было также $V$ свечек, а на торте Вани было $V - t$ свечек. Следовательно, сегодня на торте у Саши – $(V + t)$ свечек. Тогда указанное в условии суммарное количество свечей: $V + V + (V - t) + (V + t) = 4V$. Таким образом, $4V = 216$, то есть $V = 54$. Значит, сегодня Ване исполнилось 54 года.

## 3. КОВРЫ

В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м$^2$, а когда их положили в соседние углы, то 14 м$^2$. Каковы размеры зала?

*Д. Калинин*

**Ответ**: 19×19 м$^2$.

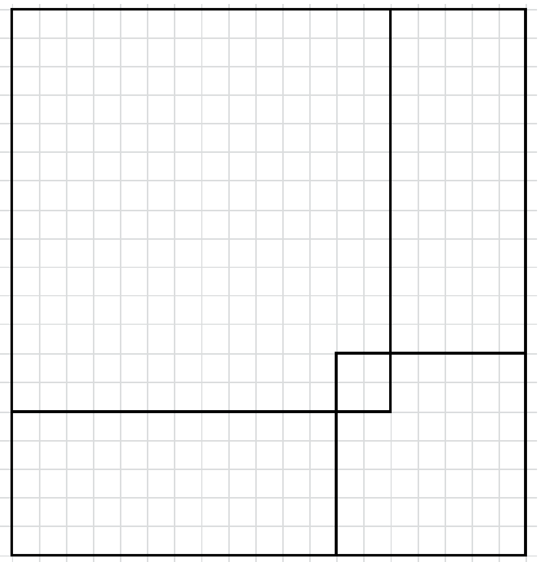


Рис. 3а

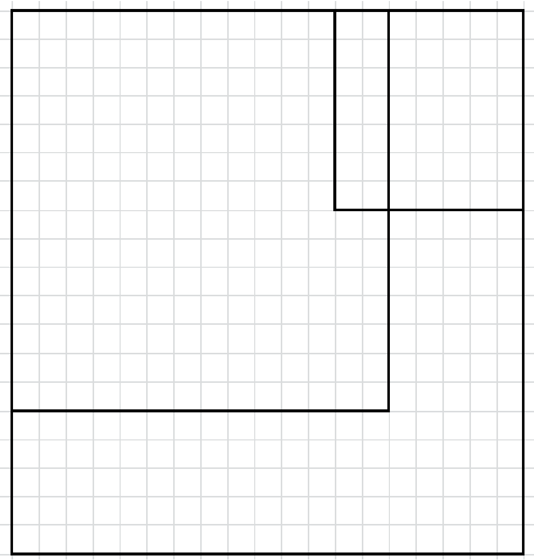


Рис. 3б

**Решение**. В первом случае пересечением ковров является квадрат площади 4 м$^2$ (см. рис. 3а), значит, длина стороны этого квадрата равна 2 м. Во втором случае, пересечение – прямоугольник, одна сторона которого также равна 2 м (см. рис. 3б). Следовательно, другая сторона этого прямоугольника равна 14 : 2 = 7 (м), а это и есть длина стороны меньшего ковра. Значит, сторона большего ковра имеет длину 14 м. Так как стороны ковров накладываются друг на друга на 2 м, то длина стороны зала равна 7 + 14 – 2 = 19 (м).

*От школьников не требуется обосновывать, что пересечением двух квадратов в первом случае является квадрат, а во втором случае – прямоугольник.*

**4. КВАРТИРА**

Петров забронировал квартиру в доме-новостройке, в котором 5 одинаковых подъездов. Изначально подъезды нумеровались слева направо, и квартира Петрова имела номер 636. Потом застройщик поменял нумерацию на противоположную (справа налево, см. рисунок). Тогда квартира Петрова стала иметь номер 242. Сколько квартир в доме? (*Порядок нумерации квартир внутри подъезда не изменялся*.)


*Т. Казицына*

**Ответ**: 985.

**Решение**. Первый способ. Номер квартиры уменьшился, поэтому при изначальной нумерации она была в четвёртом или в пятом подъезде, а потом стала во втором или в первом. Если бы она после смены нумерации оказалась в первом подъезде, то в каждом подъезде должно быть не менее 242 квартир, но тогда квартира 636 имеет слишком маленький номер для пятого подъезда. Значит, квартира Петрова была в четвёртом подъезде, а стала во втором. Следовательно, её номер уменьшился на количество квартир в двух подъездах. То есть в двух подъездах 636 – 242 = 394 квартиры, а в одном подъезде 394 : 2 = 197 квартир. Значит, в этом доме 197·5 = 985 квартир.

*Можно также не выяснять в каком именно подъезде находилась квартира Петрова, а провести более общее рассуждение.*

*Из условия задачи следует, что количества подъездов, находящихся слева и справа от подъезда Петрова различаются на 0, 2 или 4, то есть на чётное число. При этом разница между номерами квартир Петрова при двух вариантах нумерации показывает, на сколько больше квартир в подъездах, находящихся слева от подъезда Петрова, чем в подъездах, находящихся от него справа. Следовательно, 636 – 242 = 394 – это количество квартир в чётном количестве подъездов. Так как 394 = 197·2, а 197 – простое число, то в подъезде должно быть197 квартир. Значит, в этом доме 197·5 = 985 квартир.*

Второй способ. Пусть $x$ – количество квартир в каждом подъезде, а квартира Петрова – $n$-ая по счёту среди квартир своего подъезда. Если при изначальной нумерации она располагалась в подъезде с номером $k$, то после смены нумерации этот подъезд получил номер $6 – k$.

Из условия задачи следует, что $636 = (k – 1)x + n$ и $242 = (6 – k – 1)x + n$. Вычитая почленно из первого равенства второе, получим: $394 = (2k – 6)x$. Разделим обе части этого равенства на 2, тогда $197 = (k – 3)x$. Заметим, что 197 – простое число, а $x > 1$. Значит, $x = 197$. Следовательно, в доме 197·5 = 985 квартир.

*Из приведенного рассуждения следует, что $k = 4$; $n = 45$, то есть квартира Петрова – сорок пятая по счёту квартира в четвёртом подъезде (в изначальной нумерации подъездов).*

*Кроме того, полученный ответ показывает, что количество квартир на разных этажах дома не одинаковое.*

**5. РАВЕНСТВО**

Можно ли в равенстве $\frac{*}{*}+\frac{*}{*}+\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=*$ заменить звездочки цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, так, чтобы равенство стало верным?

*Э. Акопян, Д. Калинин*

**Ответ**: можно.

**Решение**. Из возможных примеров приведем два:

1) $\frac{7}{4}+\frac{6}{8}+\frac{5}{1}+\frac{3}{2}=9$; 2) $\frac{5}{4}+\frac{6}{8}+\frac{9}{3}+\frac{2}{1}=7$.

*От школьников требуется показать, что каждую из девяти цифр он использовал один раз, и что равенство действительно будет верным.*

**6. ВЗВЕШИВАНИЯ**

Четыре внешне одинаковые монетки весят 1, 2, 3 и 4 грамма. Можно ли за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь узнать, какая из них сколько весит?

*К. Кноп*

**Ответ**: можно.

**Решение**. Положим на чаши весов по две монеты и взвесим. Возможны два исхода: 1) одна из чаш перевесила; 2) равновесие.

1) На более тяжёлой чаше лежат монеты 4 г и 2 г или 4 г и 3 г. Тогда на более лёгкой – 1 г и 3 г или 1 г и 2 г. За следующие два взвешивания сравним монеты на каждой чаше между собой и определим те, которые весят 1 г и 4 г. Четвёртым взвешиванием сравним оставшиеся две монеты, определив, какая из них весит 2 г, а какая – 3 г.

2) На одной чаше лежат монеты 2 г и 3 г, а на другой – 1 г и 4 г. Следующими двумя взвешиваниями сравниваем монеты на каждой чаше между собой, а затем сравним две монеты, оказавшиеся более тяжёлыми, определив, какая из них весит 4 г, а какая – 3 г. Сравнение двух монет, оказавшимися по результатам второго и третьего взвешивания более лёгкими, происходит автоматически.

*Отметим, что для выполнения алгоритма стандартной сортировки четырёх объектов недостаточно четырёх сравнений.*

**7. ПИРАТЫ**

Два пирата, Билл и Джон, имея каждый по 74 золотые монеты, решили сыграть в такую игру: они по очереди будут выкладывать на стол монеты, за один ход – одну, две или три, а выиграет тот, кто положит на стол сотую по счёту монету. Начинает Билл. Кто выиграет в такой игре, независимо от того, как будет действовать соперник?

*Р. Женодаров (вариация)*

**Ответ**: выиграет Джон.

**Решение**. Заметим, что если бы пираты имели неограниченное количество монет, то выигрышная стратегия Джона была бы простой: на любой ход Билла ему достаточно дополнять количество монет, которое положил Билл, до четырёх. Действительно, в этом случае, количество монет после каждого хода Джона будет кратно четырём, а 100 делится на 4, поэтому сотую монету Джон смог бы положить своим двадцать пятым ходом.

Но у пиратов по 74 монеты, поэтому, если Билл каждый раз будет класть по одной монете, то Джону придётся каждым ходом класть по 3 монеты. Тогда на двадцать пятый ход Джону монет не хватит. Следовательно, чтобы сохранить такую выигрышную стратегию, Джон должен в какой-то момент положить одну или две монеты. Покажем, что это возможно.

Если первым ходом Билл положит 2 или 3 монеты, то Джон сэкономит монеты уже на первом ходу и выиграет. Пусть Билл первым ходом положил одну монету. Тогда Джон в ответ также кладёт одну монету. Далее возможны три случая:

1) Если вторым ходом Билл положит одну монету, то Джон также положит одну монету. На столе будет 4 монеты, а дальше Джон сможет применять стратегию, описанную выше, и ему хватит монет для выигрыша.
2) Если вторым ходом Билл положит две монеты, то на столе окажутся 4 монеты. Джон положит 1 монету. Билл не должен допустить, чтобы после хода Джона количество монет делилось на 4, поэтому должен положить 3 монеты. Каждым следующим ходом Джон будет класть одну монету, вынуждая Билла положить три. Но сотую монету Билл положить не сможет, так как для этого ему потребовалось бы 75 монет. Значит, сотую монету положит Джон.
3) Если вторым ходом Билл положит 3 монеты, то Джон также положит 3 монеты. Тогда на столе будет 8 монет, а Джон уже один раз положил менее трёх монет, поэтому он сможет применить стратегию, описанную выше, и выиграть.

## 8. КРЕСТИКИ – НОЛИКИ

В каждой клетке доски размером $5\times5$ стоит крестик или нолик, причём никакие три крестика не стоят подряд ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали. Какое наибольшее количество крестиков может быть на доске?

*М. Евдокимов*

**Ответ**: 16.

**Решение**. Пример расстановки шестнадцати крестиков в соответствии с условием – см. рис. 8а. Докажем, что больше, чем 16 крестиков поставить невозможно.

Разобьем доску на центральную клетку и 8 прямоугольников размером $3\times1$ (см. рис. 8б). В каждом прямоугольнике должен стоять хотя бы один нолик. Следовательно, ноликов на доске не менее восьми. Если и в центральной клетке стоит нолик, то крестиков – не больше, чем 16, и задача решена. Осталось рассмотреть случай, когда в центральной клетке стоит крестик. Можно рассуждать по-разному.

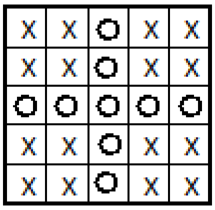


Рис. 8а

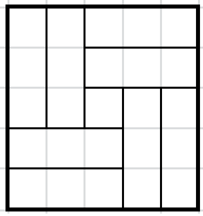


Рис. 8б

Первый способ. Рассмотрим все клетки больших диагоналей (см. рис. 8в). Каждая пара соседних закрашенных клеток вместе с центральной клеткой образует тройку, в которой должен стоять хотя бы один нолик. Значит, в восьми закрашенных клетках стоят хотя бы 4 нолика. Тогда в каждом из прямоугольников размером $3\times1$, расположенных на краю доски, должно стоять хотя бы по одному нолику. Итого, уже не меньше, чем 8 ноликов. Но, если в остальных клетках стоят крестики, то три крестика «в ряд» образуют крестики, соседние с центральным по горизонтали и по вертикали, что противоречит условию. Значит, ноликов не меньше, чем 9.

Рис. 8в

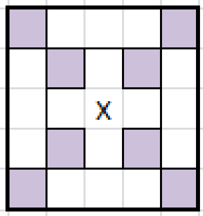
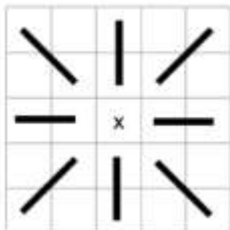


Рис. 8г



Второй способ. Рассмотрим 8 пар клеток, выделенных на рис. 8г. В одной из клеток каждой пары должен стоять хотя бы один нолик, поэтому ноликов – не меньше, чем 8.

Предположим, что в каждой выделенной паре клеток ровно один нолик и вне этих пар ноликов нет. Тогда в остальных клетках стоят крестики (см. рис. 8д). Рассмотрим четыре тройки клеток, выделенные на этом рисунке. В каждой из них уже стоит по 2 крестика, значит, между ними стоят нолики. Снова рассмотрим четыре из восьми ранее выделенных пар клеток (см. рис. 8е). Мы уже выяснили, что в каждой паре ровно одна клетка с ноликом, значит, в другой клетке – крестик. Если поставить эти крестики, то в центре доски окажутся тройки крестиков, идущих подряд. Следовательно, и эта расстановка не удовлетворяет условию.

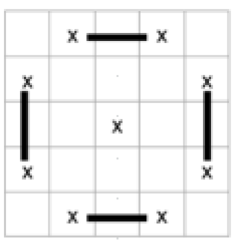


Рис. 8д

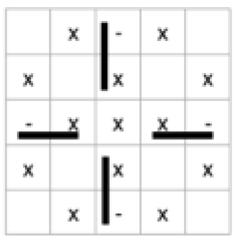


Рис. 8е

**9. СКЛАДЫВАЕМ КВАДРАТЫ**

У Вики есть четыре фигурки, у Алины есть квадрат, а у Полины есть квадрат другого размера. Объединившись, Алина и Вика могут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок. Может ли оказаться так, что Полина и Вика также смогут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок? (*Квадраты складываются без просветов и наложений*.)

*Е. Бакаев*

**Ответ**: может.

**Решение**. Приведем два из возможных примеров (см. рис. 9а и рис. 9б). Рис. 9а соответствует тому, что у Вики 4 одинаковых треугольника, а рис. 9б – тому, что у Вики 4 прямоугольника, один из которых отличается размером от трех других.

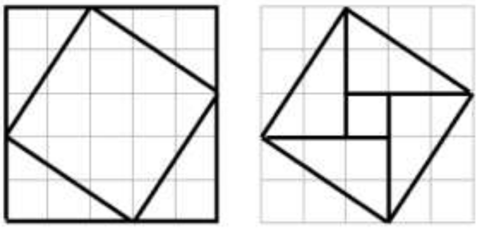
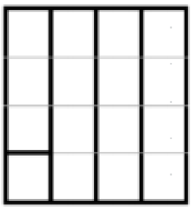


Рис. 9а



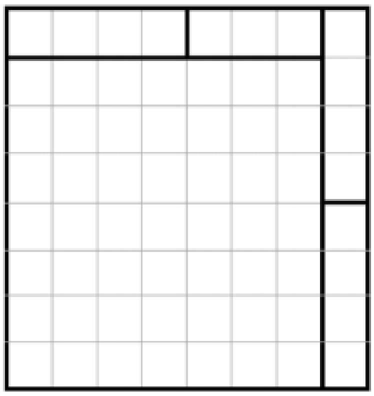


Рис. 9б