XV Устная математическая олимпиада для 6 – 7 классов
19.03.2017
7 класс

1. МОРОЖЕНОЕ

В Стране дураков ходят монеты в 1, 2, 3, … 19, 20 сольдо (других нет). У Буратино была одна монета. Он купил мороженое и получил одну монету сдачи. Снова купил такое же мороженое и получил сдачу тремя монетами разного достоинства. Буратино хотел купить третье такое же мороженое, но денег не хватило. Сколько стоит мороженое?

М. Евдокимов

Ответ: 7 сольдо.

Решение. Сдача тремя разными монетами составляет не меньше чем 1 + 2 + 3 = 6 сольдо. Так как этих денег не хватило на мороженое, то оно стоит не меньше чем 7 сольдо. Больше чем 7 сольдо мороженое стоить не может, иначе на два мороженых Буратино потратил бы не меньше чем 8 + 8 = 16 сольдо, но у него была всего одна монета, то есть не больше чем 20 сольдо, и тогда он не смог бы получить 6 сольдо сдачи. Значит, мороженое может стоить только 7 сольдо.

Действительно, тогда процесс платы за мороженое выглядел так: 20 – 7 = 13; 13 – 7 = 6 = 1 + 2 + 3.

2. ТЕЗКИ

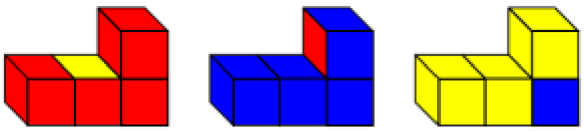
На кружок пришли 4 мальчика из 7А и четыре – из 7Б: три Лёши, три Вани и два Артёма. Могло ли оказаться так, что у каждого из них есть хотя бы один тёзка-одноклассник, пришедший на кружок? (*Тёзки – люди с одинаковыми именами.*)

Заочная олимпиада ЮМШ 2012 г., вариация

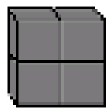
Ответ: не могло.

Решение. Все Лёши должны учиться в одном классе (иначе для одного из них не найдётся тёзки из того же класса). Аналогично и все Вани должны учиться в одном классе. Так как из каждого класса на кружок пришло четверо, а не шестеро, то если Лёши учатся в 7А, то Вани – в 7Б (или наоборот). Тогда один из Артёмов должен учиться в 7А, а другой – в 7Б. Но в этом случае ни у одного из них не будет тёзки-одноклассника.

3. ЦВЕТНЫЕ КУБИКИ



У Саши было четыре раскрашенных кубика. Расставляя их по-разному, он по очереди сфотографировал три фигуры (см. рисунок сверху). Затем Саша сложил из них параллелепипед размером $2\times2\times1$ и сделал его черно-белое фото (см. рисунок снизу). Все видимые на фото грани кубиков одного и того же цвета. Какого?



А. Шаповалов

Ответ: синего.

Решение. На первом цветном фото – 8 красных граней, на втором – 8 синих, на третьем – 8 жёлтых. Так как у четырёх кубиков в совокупности $6\cdot4 = 24$ грани и $8\cdot3 = 24$, то первом фото есть ***все*** красные грани, на втором – ***все*** синие, на третьем – ***все*** жёлтые.

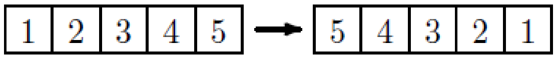
На фотографии параллелепипеда видны все четыре кубика, причём только у одного их них одна грань – видимая, а у каждого из трёх остальных видны хотя бы две. На первом цветном фото есть два кубика, у которых только по одной красной грани, значит искомый цвет не может быть красным. На третьем цветном фото есть кубик, в котором нет жёлтых граней, следовательно, искомый цвет не жёлтый.

Таким образом, все видимые грани кубиков могут быть только синими. Это возможно, так как на втором цветном фото: 1) есть кубик с тремя синими гранями, имеющими общую вершину; 2) есть два кубика, у каждого из которых есть две соседние синие грани; 3) есть еще один кубик с синей гранью.

Отметим, что условие задачи позволяет определить как раскрашены все кубики. Есть кубик с тремя смежными красными и тремя смежными синими гранями, кубик с тремя смежными красными, двумя жёлтыми и одной синей гранью, и два одинаковых кубика с тремя смежными жёлтыми, двумя синими и одной красной гранью.

4. КВАРТИРА

Петров забронировал квартиру в доме-новостройке, в котором пять одинаковых подъездов. Изначально подъезды нумеровались слева направо, и квартира Петрова имела номер 636. Потом застройщик поменял их нумерацию на противоположную (справа налево, см. рисунок). Тогда квартира Петрова стала иметь номер 242. Сколько квартир в доме? (*Порядок нумерации квартир внутри подъезда не изменялся*.)



Т. Казицына

Ответ: 985.

Решение. Первый способ. Номер квартиры уменьшился, поэтому при изначальной нумерации она была в четвёртом или в пятом подъезде, а потом стала во втором или в первом. Если бы она после смены нумерации оказалась в первом подъезде, то в каждом подъезде должно быть не менее 242 квартир, но тогда квартира 636 имеет слишком маленький номер для пятого подъезда. Значит, квартира Петрова была в четвёртом подъезде, а стала во втором. Следовательно, её номер уменьшился на количество квартир в двух подъездах. То есть в двух подъездах 636 – 242 = 394 квартиры, а в одном подъезде 394 : 2 = 197 квартир. Значит, в этом доме 197·5 = 985 квартир.

Можно также не выяснять в каком именно подъезде находилась квартира Петрова, а провести более общее рассуждение.

Из условия задачи следует, что количества подъездов, находящихся слева и справа от подъезда Петрова различаются на 0, 2 или 4, то есть на чётное число. При этом разница между номерами квартир Петрова при двух вариантах нумерации показывает, на сколько больше квартир в подъездах, находящихся слева от подъезда Петрова, чем в подъездах, находящихся от него справа. Следовательно, 636 – 242 = 394 – это количество квартир в чётном количестве подъездов. Так как 394 = 197·2, а 197 – простое число, то в подъезде должно быть197 квартир. Значит, в этом доме 197·5 = 985 квартир.

Второй способ. Пусть x – количество квартир в каждом подъезде, а квартира Петрова – n-ая по счёту среди квартир своего подъезда. Если при изначальной нумерации она располагалась в подъезде с номером k, то после смены нумерации этот подъезд получил номер $6 – k$.

Из условия задачи следует, что $636 = (k – 1)x + n$ и $242 = (6 – k – 1)x + n$. Вычитая почленно из первого равенства второе, получим: $394 = (2k – 6)x$. Разделим обе части этого равенства на 2, тогда $197 = (k – 3)x$. Заметим, что 197 – простое число, а $x > 1$. Значит, $x = 197$. Следовательно, в доме 197·5 = 985 квартир.

Из приведенного рассуждения следует, что $k = 4$; $n = 45$, то есть квартира Петрова – сорок пятая по счёту квартира в четвёртом подъезде (в изначальной нумерации подъездов).

Кроме того, полученный ответ показывает, что количество квартир на разных этажах дома не одинаковое.

5. ВОЛЕЙБОЛ

В турнире по волейболу каждая команда встречалась с каждой по одному разу. Каждая встреча состояла из нескольких партий – до трех побед одной из команд. Если встреча заканчивалась со счётом 3 : 0 или 3 : 1, то выигравшая команда получала 3 очка, а проигравшая – 0. Если же счёт партий был 3 : 2, то победитель получал 2 очка, а побеждённый – 1 очко. По итогам турнира оказалось, что команда «Хитрецы» набрала больше всех очков, а команда «Простаки» – меньше всех. Но «Хитрецы» выиграли меньше встреч, чем проиграли, а у «Простаков» наоборот, победных встреч оказалось больше, чем проигранных. При каком наименьшем количестве команд такое возможно?

А. Заславский

Ответ: при шести.

Решение. Пусть в турнире участвовало n команд, тогда из условия задачи следует, что $n > 3$. Действительно, в этих случаях «Простаки» выигрывают все встречи и автоматически становятся победителями турнира.

Если $n = 4$ или $n = 5$, то каждая команда проведёт или три, или четыре встречи. Значит, «Хитрецы» смогут выиграть не более одной встречи и набрать максимум 5 = 3 + 1 + 1 или 6 = 3 + 1 + 1 + 1 очков соответственно. Аналогично, «Простаки» должны выиграть не менее двух встреч при четырёх участниках и не менее трёх встреч при пяти участниках, то есть набрать минимум 4 = 2 + 2 + 0 или 6 = 2 + 2 + 2 + 0 очков соответственно.

Учитывая, что «Хитрецы» должны набрать хотя бы на 2 очка больше, чем «Простаки», получим противоречие. Следовательно, $n \geq 6$.

Приведем один из возможных примеров турнира для шести команд, удовлетворяющего условию задачи (см. таблицу).

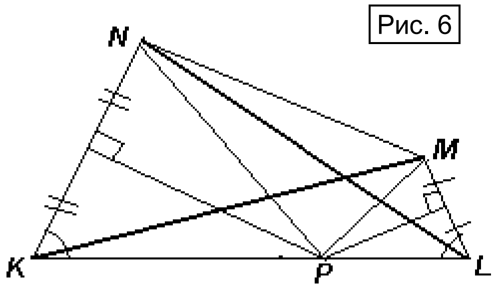
Команды	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Очки**
«Хитрецы»	●	1	1	1	3	3	**9**
А	2	●	2	2	1	1	**8**
Б	2	1	●	2	2	1	**8**
В	2	1	1	●	2	1	**7**
Г	0	2	1	1	●	3	**7**
«Простаки»	0	2	2	2	0	●	**6**

6. ДИАГОНАЛИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

KLMN – выпуклый четырехугольник, в котором равны углы *K* и *L*. Серединные перпендикуляры к сторонам *KN* и *LM* пересекаются на стороне *KL*. Докажите, что в данном четырехугольнике равны диагонали.

С. Берлов, олимпиада Санкт-Петербурга, 1997 г.

Рис. 6



Решение. Так как точка P пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам KN и LM равноудалена от концов каждого из этих отрезков, то треугольники KPN и LPM – равнобедренные (см. рис. 6). В этих треугольниках равны углы при основаниях, поэтому равны и углы при вершине P.

Таким образом, в треугольниках KPM и NPL: $KP = NP$, $MP = LP$ и $\angle KPM = \angle NPL$ (углы, смежные с равными). Следовательно, эти треугольники равны, значит, $KM = NL$, что и требовалось.

7. УГАДАЙ ЧИСЛО

Вася задумал двузначное число и сообщил Пете произведение цифр в записи этого числа, а Саше – сумму этих цифр. Между мальчиками состоялся такой диалог:

Петя: «Я угадаю задуманное число с трёх попыток, но двух мне может не хватить».

Саша: «Если так, то мне для этого хватит четырёх попыток, но трёх может не хватить».

Какое число было сообщено Саше?

М. Евдокимов

Ответ: 10.

Решение. Пусть $\overline{ab}$ – задуманное двузначное число, тогда $P = ab$ – произведение его цифр. Так как Петя берётся угадать задуманное число с трёх попыток, то число P должно раскладываться на два множителя, которые являются цифрами, ровно тремя способами, учитывая порядок множителей. Следовательно: 1) $b \neq 0$ (иначе $P = 0 = a \cdot 0$ при любом a от 1 до 9, то есть указанных способов – девять); 2) для чисел $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ значение P одно и то же, поэтому P должно быть квадратом какой-то из цифр (иначе P раскладывается указанным образом четным количеством способов).

Таким образом, достаточно рассмотреть квадраты всех цифр и выписать все способы их указанного разложения на множители: **1** = 1·1; **4** = 2·2 = 1·4 = 4·1; **9** = 3·3 = 1·9 = 9·1; **16** = 4·4 = 2·8 = 8·2; **25** = 5·5;·**36** = 6·6 = 4·9 = 9·4; **49** = 7·7; **64** = 7·7; **81** = 9·9.

Следовательно, из фразы Пети Саша может сделать вывод, что задуманным могло оказаться только одно из следующих чисел: 22, 14, 41, 33, 19, 91, 44, 28, 82, 66, 49, 94. Среди них: одно число с суммой цифр 4 (22), два числа с суммой цифр 5 (14 и 41), одно число с суммой цифр 6 (33), одно число с суммой цифр 8 (44), четыре числа с суммой цифр 10 (19, 91, 28, 82), одно число с суммой цифр 12 (66) и два числа с суммой цифр 13 (49 и 94). Так как Саше требуется 4 попытки на угадывание суммы, то искомая сумма равна 10.

8. КРЕСТИКИ – НОЛИКИ

В каждой клетке доски размером 5×5 стоит крестик или нолик, причём никакие три крестика не стоят подряд ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали. Какое наибольшее количество крестиков может быть на доске?

М. Евдокимов

Ответ: 16.

Решение. Пример расстановки шестнадцати крестиков в соответствии с условием – см. рис. 8а. Докажем, что больше, чем 16 крестиков поставить невозможно.

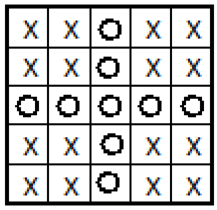


Рис. 8а

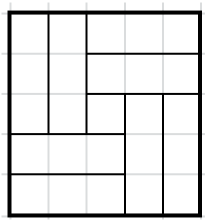


Рис. 8б

Разобьем доску на центральную клетку и 8 прямоугольников размером 3×1 (см. рис. 8б). В каждом прямоугольнике должен стоять хотя бы один нолик. Следовательно, ноликов на доске не менее восьми. Если и в центральной клетке стоит нолик, то крестиков – не больше, чем 16, и задача решена. Осталось рассмотреть случай, когда в центральной клетке стоит крестик. Можно рассуждать по-разному.

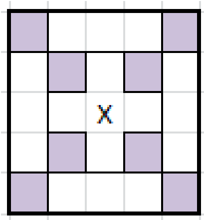


Рис. 8в

<u>Первый способ</u>. Рассмотрим все клетки больших диагоналей (см. рис. 8в). Каждая пара соседних закрашенных клеток вместе с центральной клеткой образует тройку, в которой должен стоять хотя бы один нолик. Значит, в восьми закрашенных клетках стоят хотя бы 4 нолика. Тогда в каждом из прямоугольников размером 3×1, расположенных на краю доски, должно стоять хотя бы по одному нолику. Итого, уже не меньше, чем 8 ноликов. Но, если в остальных клетках стоят крестики, то три крестика «в ряд» образуют крестики, соседние с центральным по горизонтали и по вертикали, что противоречит условию. Значит, ноликов не меньше, чем 9.

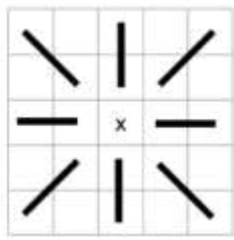


Рис. 8г

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим 8 пар клеток, выделенных на рис. 8г. В одной из клеток каждой пары должен стоять хотя бы один нолик, поэтому ноликов – не меньше, чем 8.

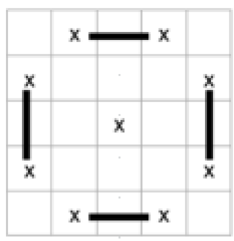


Рис. 8д

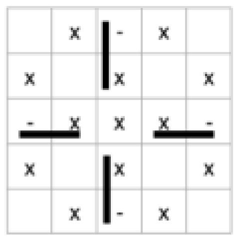


Рис. 8е

Предположим, что в каждой выделенной паре клеток ровно один нолик и вне этих пар ноликов нет. Тогда в остальных клетках стоят крестики (см. рис. 8д). Рассмотрим четыре тройки клеток, выделенные на этом рисунке. В каждой из них уже стоит по 2 крестика, значит, между ними стоят нолики. Снова рассмотрим четыре из восьми ранее выделенных пар клеток (см. рис. 8е). Мы уже выяснили, что в каждой паре ровно одна клетка с ноликом, значит, в другой клетке – крестик. Если поставить эти крестики, то в центре доски окажутся тройки крестиков, идущих подряд. Следовательно, и эта расстановка не удовлетворяет условию.

9. СКЛАДЫВАЕМ КВАДРАТЫ

У Вики есть четыре фигурки, у Алины есть квадрат, а у Полины есть квадрат другого размера. Объединившись, Алина и Вика могут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок. Может ли оказаться так, что Полина и Вика также смогут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок? (*Квадраты складываются без просветов и наложений*.)

Е. Бакаев

Ответ: может.

Решение. Приведем два из возможных примеров (см. рис. 9а и рис. 9б). Рис. 9а соответствует тому, что у Вики 4 одинаковых треугольника, а рис. 9б – тому, что у Вики 4 прямоугольника, один из которых отличается размером от трех других.

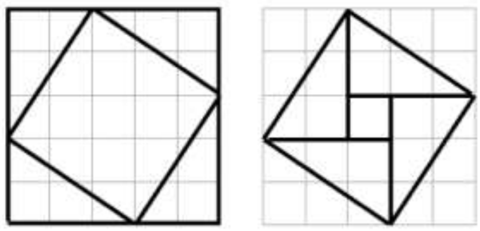


Рис. 9а

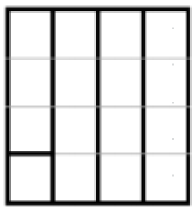


Рис. 9б