XVI Устная математическая олимпиада для 6 – 7 классов
25.03.2018
6 класс

1. День рождения барана

Каждый день баран учит одинаковое количество языков. К вечеру своего дня рождения он знал 1000 языков. В первый день того же месяца он знал к вечеру 820 языков, а в последний день этого месяца – 1100 языков. Когда у барана день рождения?

И.В. Раскина

Ответ: 19 февраля.

Решение. За месяц, в котором у барана день рождения, не считая первый день, баран выучил 1100 – 820 = 280 языков. В месяце может быть 28, 29, 30 или 31 день. Значит, в месяце без одного дня: 27, 28, 29 или 30 дней. Так как каждый день баран учит одинаковое количество языков, то 280 должно делиться на это количество дней без остатка. Этому условию удовлетворяет только число 28, значит, за один день баран учит 280 : 28 = 10 языков. Со второго дня месяца до дня рождения баран выучил 1000 – 820 = 180 языков. Следовательно, прошло 18 дней, то есть день рождения у барана – 19 февраля.

2. Конструктор

Конструктор состоит из плиток размерами 1×3 и 1×4. Из всех имеющихся плиток Федя сложил два прямоугольника размерами 2×6 и 7×8. Его брат Антон утащил по одной плитке из каждого сложенного прямоугольника. Сможет ли Федя из оставшихся плиток собрать прямоугольник размером 12×5?

XIII Костромской турнир математических боев

Ответ: не сможет.

Решение. Предположим, что Федя смог собрать требуемый прямоугольник, тогда после действий Антона должно было остаться $12\times5 = 60$ клеток. Суммарная площадь всех плиток равна $2\times6 + 7\times8 = 68$ клеток. Заметим, что из прямоугольника 2×6 можно утащить только плитку размером 1×3. В зависимости от того, какую плитку утащил Антон из прямоугольника 7×8, могли остаться плитки, у которых в сумме либо 62 клетки, либо 61. Это больше, чем 60, но если убрать ещё хотя бы одну плитку, то останется меньше, чем 60. Значит, собрать указанный прямоугольник Федя не сможет.

3. Мудрецы

Трём мудрецам показали 9 карт: шестерку, семерку, восьмерку, девятку, десятку, валета, даму, короля и туза (карты перечислены по возрастанию их достоинства). После этого карты перемешали и каждому раздали по три карты. Каждый мудрец видит только свои карты. Первый сказал: «Моя старшая карта – валет». Тогда второй ответил: «Я знаю, какие карты у каждого из вас». У кого из мудрецов был туз?

М.А. Евдокимов

Ответ: у третьего мудреца.

Решение. У первого мудреца старшая карта – валет, значит, у него ровно две карты младше валета, то есть две карты из набора 6, 7, 8, 9, 10. Для того, чтобы второй мудрец мог наверняка знать карты каждого, у него должны быть три остальные карты из этого набора (иначе он не смог бы однозначно определить карты первого мудреца). Тогда дама, король и туз должны оказаться у третьего мудреца.

4. Магический квадрат

Квадрат 4×4 называется *магическим*, если в его клетках встречаются все числа от 1 до 16, а суммы чисел в столбцах, строках и двух диагоналях равны между собой. Шестиклассник Сеня начал составлять магический квадрат и поставил в какую-то клетку число 1. Его младший брат Лёня решил ему помочь и поставил числа 2 и 3 в клетки, соседние по стороне с числом 1. Сможет ли Сеня после такой помощи составить магический квадрат?

Кубок Урала

Ответ: не сможет.

Решение. Сумма чисел в каждом ряду квадрата должна быть равна (1 + 2 + …+ 15 + 16) : 4 = 34. Рассмотрим два случая:

1) Пусть Лёня поставил числа 2 и 3 в одну горизонталь или в одну вертикаль с числом 1. Тогда в этом ряду осталась одна свободная клетка, куда необходимо поставить 34 – (1 + 2 + 3) = 28. Но такого числа в этом магическом квадрате быть не может.

2) Пусть Лёня поставил одно из этих чисел в одну горизонталь с числом 1, а другое – в одну вертикаль. Тогда в том ряду, где стоит 2, сумма чисел в оставшихся клетках равна 34 – (1 + 2) = 31. Значит, в этом ряду обязаны стоять числа 15 и 16. Но в том ряду, где стоит 3, сумма чисел в оставшихся клетках равна 34 – (1 + 3) = 30. Значит, там обязаны стоять числа 16 и 14. Но число 16 невозможно поставить в оба ряда, так как на их пересечении уже стоит 1. Следовательно, Сеня не сможет составить магический квадрат.

5. Круглый лист

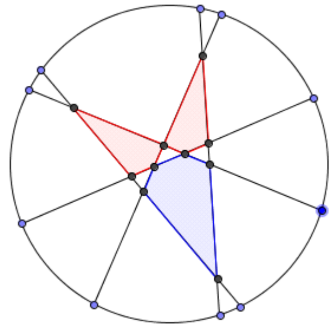
Лист бумаги имеет форму круга. Можно ли провести на нем пять отрезков, каждый из которых соединяет две точки на границе листа так, чтобы среди частей, на которые эти отрезки делят лист, нашлись пятиугольник и два четырехугольника?

С.Г. Волчёнков (XXXVII Уральский турнир юных математиков)

Ответ: можно.

Решение. Например, см. рис. 5. Два четырехугольника и пятиугольник выделены цветом.

Рис. 5



6. Цветные стулья

В комнате стоят 20 стульев двух цветов: синего и красного. На каждый из стульев сел либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый из сидящих заявил, что он сидит на синем стуле. Затем они как-то пересели, после чего половина из сидящих сказали, что сидят на синих стульях, а остальные сказали, что сидят на красных. Сколько рыцарей теперь сидит на красных стульях?

Д.А. Калинин

Ответ: 5.

Решение. Изначально все рыцари сидят на синих стульях, а все лжецы на красных. Значит, количество рыцарей, пересевших на красные стулья, равно количеству лжецов, пересевших на синие стулья. И те, и другие сказали, что сидят на красных стульях. Всего сказавших, что сидят на красных стульях, – 10. Значит, на красных стульях сидит 10 : 2 = 5 рыцарей.

7. Стоимость обедов

Цена стандартного обеда в таверне «Буратино» зависит только от дня недели. Аня обедала 10 дней подряд, начиная с 10 июля, и заплатила 70 сольдо. Ваня также заплатил 70 сольдо за 12 обедов, начиная с 12 июля. Таня заплатила 100 сольдо за 20 обедов, начиная с 20 июля. Сколько заплатит Саня за 24 обеда, начиная с 24 июля?

А.В. Шаповалов

Ответ: 150 сольдо.

Решение. Составим календарь с 10 июля до 16 августа, условно считая 10 августа первым днем недели. Каждая строка календаря соответствует одному и тому же дню недели (см. рис. 7а). Пусть в первый день недели обед стоит a_1 сольдо, во второй – a_2 сольдо, ..., в седьмой день – a_7 сольдо. Стоимость всех обедов за неделю обозначим $P = a_1 + a_2 + ... + a_7$. Отметим на нашем календаре дни, в которые обедали Аня (см. рис. 7б), Ваня (см. рис. 7в) и Таня (см. рис. 7г).

10	17	24	31	7	14
11	18	25	1	8	15
12	19	26	2	9	16
13	20	27	3	10	
14	21	28	4	11	
15	22	29	5	12	
16	23	30	6	13	

Рис. 7а

10	17	24	31	7	14
11	18	25	1	8	15
12	19	26	2	9	16
13	20	27	3	10	
14	21	28	4	11	
15	22	29	5	12	
16	23	30	6	13	

Рис. 7б

10	17	24	31	7	14
11	18	25	1	8	15
12	19	26	2	9	16
13	20	27	3	10	
14	21	28	4	11	
15	22	29	5	12	
16	23	30	6	13	

Рис. 7в

10	17	24	31	7	14
11	18	25	1	8	15
12	19	26	2	9	16
13	20	27	3	10	
14	21	28	4	11	
15	22	29	5	12	
16	23	30	6	13	

Рис. 7г

В совокупности они обедали шесть раз в каждый из дней недели и заплатили 70 + 70 + 100 = 240 сольдо. Это означает, что стоимость семи обедов подряд (по одному разу в каждый день недели) равна 240 : 6 = 40 сольдо.

Отметим теперь дни, в которые обедал Саня (см. рис. 7д). Заметим, что он обедал в те же дни, что и Аня, плюс ещё две недели. Следовательно, Саня должен заплатить 70 + 2·40 = 150 сольдо.

10	17	24	31	7	14
11	18	25	1	8	15
12	19	26	2	9	16
13	20	27	3	10	
14	21	28	4	11	
15	22	29	5	12	
16	23	30	6	13	

Рис. 7д

Это решение можно оформить алгебраически. Аня обедала 10 дней подряд, начиная с первого дня недели, то есть $P + a_1 + a_2 + a_3 = 70$ *(1). Ваня обедал 12 дней подряд с третьего дня недели, то есть* $P + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 2P - a_1 - a_2 = 70$ *(2). Таня обедала 20 дней подряд, начиная с четвертого дня недели, то есть* $3P - a_3 = 100$ *(3). Сложив равенства (1), (2) и (3), получим:* $3P + a_3 + 3P - a_3 = 240$*. Значит,* $P = 40$ *(стоимость обедов за неделю). Подставив значение P в равенство (1), получим:* $a_1 + a_2 + a_3 = 70 - 40 = 30$*. Тогда стоимость 24 обедов, начиная с первого дня недели, равна* $3P + a_1 + a_2 + a_3 = 150$*.*

8. Перекатываем кубик

Есть доска размером 7×12 клеток и кубик, грань которого равна клетке. Одна грань кубика окрашена невысыхающей краской. Кубик можно поставить в некоторую клетку доски и перекатывать через ребро на соседнюю грань. Ставить кубик дважды на одну и ту же клетку нельзя. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить кубик, не испачкав доску краской?

Кубок Урала (вариация)

Ответ: все 84 клетки.

Решение. Пример того, как кубик может побывать на всех клетках, показан на рис. 8а. Точками отмечены клетки, на которых кубик стоит на грани, противоположной окрашенной. Маршрут замкнутый, поэтому его можно начинать с любой точки.

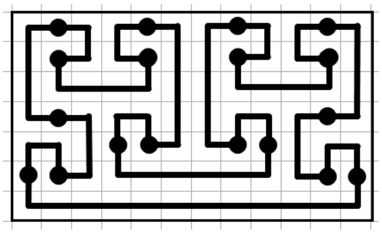


Рис. 8а

Отметим, что возможен полный обход клетчатой доски, у которой 12 столбцов и 7 + 2k строк, где k – любое натуральное число. Пример обхода доски размером 9×12 клеток – см. рис. 8б.

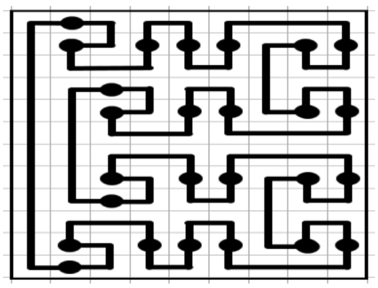


Рис. 8б

9. Дроби

В ряд записаны всевозможные правильные несократимые дроби, знаменатели которых не больше ста. Маша и Света ставят знаки «+» или «–» перед любой дробью, перед которой знак еще не стоит. Они делают это по очереди, но известно, что Маше придётся сделать последний ход и вычислить результат действий. Если он получится целым, то Света даст ей шоколадку. Сможет ли Маша получить шоколадку независимо от действий Светы?

Д.А. Калинин

Ответ: сможет.

Решение. Заметим, что в указанном ряду нечетное количество дробей. Действительно, если правильная дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то и дробь 1 – $\frac{a}{b}$ = $\frac{b-a}{b}$ является правильной и также несократима. Эти дроби различны, кроме одного случая: *a* = 1, *b* = 2. Таким образом, первый ход должна сделать Маша.

Тогда она может действовать следующим образом: первым ходом поставить любой знак перед дробью $\frac{1}{2}$, например, знак «+». Остальные дроби можно разбить на пары так, чтобы сумма дробей в каждой паре была равна 1. Поэтому далее со всеми дробями, кроме $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, можно придерживаться следующей стратегии: если Света ставит какой-то знак перед дробью $\frac{a}{b}$, то Маша ставит тот же знак перед дробью 1 – $\frac{a}{b}$. Тем самым, сумма всех дробей в таких парах будет целой.

Для дробей $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ стратегия изменяется: в ответ на знак, поставленный Светой перед одной из них, Маша должна поставить противоположный знак перед другой. Тогда $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$ = 0 или $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$ = 1, значит, результат, полученный Машей, будет целым.