Материалы для проведения заключительного этапа

XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2009–2010 учебный год

Первый день

Майкоп, 25–30 апреля 2010 г.

Москва, 2010

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.Я. Белов-Канель, В.В. Астахов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.А. Гаврилюк, А.И. Гарбер, А.А. Глазырин, А.С. Голованов, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, Р.Г. Женодаров, Р.Н. Карасёв, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, Ю.С. Мешин, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, А.М. Райгородский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, А.И. Храбров, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.З. Шарич, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Замечание 2. В последнем абзаце решения по сути используется теорема о трёх гомотетиях (для гомотетий, переводящих отрезки $B'C'$, M_1M_3, I_1I_3 друг в друга).

11.4. **Ответ.** $k=[n/2]$.

Лемма. *Для любых точек $A_i=(x_i,y_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, найдётся такой многочлен $P(x,y)$ степени не больше $[n/2]$, что $P(x_n,y_n)=1$ и $P(x_i,y_i)=0$ при $i=1,\ldots,n-1$.*

Доказательство. Заметим, что существуют такие $d = [n/2]$ прямых, что точка A_n не лежит ни на одной из них, а каждая из точек $A_1,\ldots,A_{n-1}$ лежит хотя бы на одной (при нечётном n это прямые A_1A_2, A_3A_4, …, $A_{n-2}A_{n-1}$, а при чётном n — прямые A_1A_2, A_3A_4, …, $A_{n-3}A_{n-2}$, $A_{n-2}A_{n-1}$). Пусть $k_ix+\ell_iy+m_i=0$ — уравнение i-й прямой $(i=1,\ldots,d)$. Тогда многочлен

$$Q(x,y)=\frac{(k_1x+\ell_1y+m_1)\ldots(k_dx+\ell_dy+m_d)}{(k_1x_n+\ell_1y_n+m_1)\ldots(k_dx_n+\ell_dy_n+m_d)}$$

является искомым. □

Покажем, что число $k=[n/2]$ подходит. При каждом $i = 1,\ldots,n$ найдём согласно лемме многочлен $P_i(x,y)$, обращающийся в ноль во всех точках $A_1,\ldots,A_n$, кроме A_i, причём $P_i(x_i,y_i)=1$. Тогда многочлен $P(x)=c_1P_1(x,y)+\ldots+c_nP_n(x,y)$ принимает требуемые значения во всех точках $A_1,\ldots,A_n$.

Осталось показать, что при $k<[n/2]$ утверждение неверно. Рассмотрим точки $A_i(i,i^2)$ $(i=1,\ldots,n)$, лежащие на параболе $y=x^2$, и положим $c_1=\ldots=c_{n-1}=0$, $c_n=1$. Поскольку парабола пересекается с прямой не более, чем по двум точкам, точки A_i удовлетворяют условию. Предположим, что существует многочлен $P(x,y)$ степени, не превосходящей k, для которого $P(x_i,y_i)=c_i$. Положим $Q(x)=P(x,x^2)$; тогда степень $Q(x)$ не превосходит $2k$. По нашему предположению, $Q(1)=Q(2)=\ldots=Q(n-1)=0$ и $Q(n)=1$. Таким образом, ненулевой многочлен $Q(x)$ имеет $n-1$ корень, то есть его степень не меньше $n-1$; тогда и $2k\geqslant n-1$. Это и значит, что $k\geqslant[n/2]$.

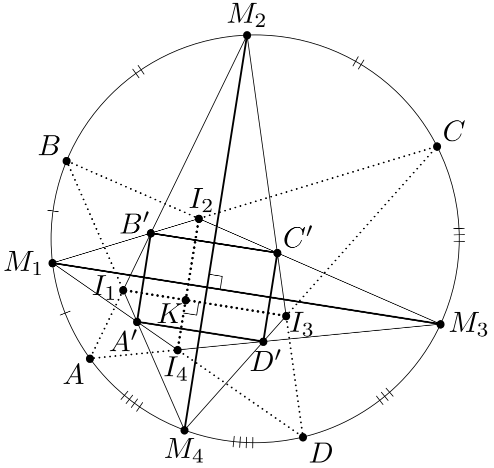


Рис. 6

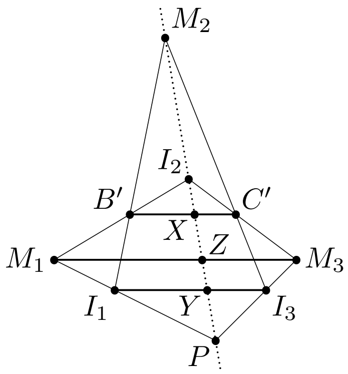


Рис. 7

дают, утверждение задачи очевидно. Пусть, скажем, точка I_1 не лежит на прямой M_1M_3. Обозначим $A' = DM_1 \cap BM_4$, $B' = AM_2 \cap CM_1$, $C' = BM_3 \cap DM_2$, $D' = AM_3 \cap CM_4$. Имеем $\angle BM_1M_2 = \angle CM_1M_2$ и $\angle BM_2M_1 = \angle AM_2M_1$, поэтому треугольники M_1M_2B и M_1M_2B' симметричны относительно прямой M_1M_2. Отсюда $M_2B' = M_2B$. Аналогично $M_2C' = M_2C$, и из $M_2B = M_2C$ получаем $M_2B' = M_2C'$. Поскольку $\angle AM_2M_4 = \angle DM_2M_4$, прямая M_2M_4 является биссектрисой (и, значит, высотой) равнобедренного треугольника $M_2B'C'$. Таким образом, $B'C' \perp M_2M_4$, поэтому $B'C' \parallel M_1M_3 \parallel I_1I_3$.

Пусть прямая M_2I_2 пересекает отрезки $B'C'$, I_1I_3 и M_1M_3 соответственно в точках X, Y, Z (см. рис. 7). Рассматривая гомотетии с центрами I_2 и M_2, получаем: $\frac{M_1Z}{M_3Z} = \frac{B'X}{C'X} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Пусть $P = M_1I_1 \cap M_3I_3$. Если прямая PY пересекает M_1M_3 в точке Z', то из гомотетии с центром P получаем: $\frac{M_1Z'}{M_3Z'} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Значит, Z' совпадает с Z. Получаем, что точка P лежит на прямой M_2I_2. Аналогично, P лежит на прямой M_4I_4, то есть все четыре прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в точке P.

Замечание 1. Точки A', B', C', D' являются центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD, BAC, CBD, DAC соответственно.

Условия задач

9 класс

9.1. Имеется 24 карандаша четырех цветов — по 6 карандашей каждого цвета. Их раздали 6 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов, вне зависимости от распределения карандашей?

(И. Богданов, О. Подлипский)

9.2. По окружности расставлено 100 попарно различных чисел. Докажите, что можно выбрать 4 подряд стоящих числа таким образом, чтобы сумма двух крайних чисел этой четверки была строго больше суммы средних. *(С. Берлов)*

9.3. Прямые, касающиеся окружности ω в точках A и B, пересекаются в точке O. Точка I — центр ω. На меньшей дуге AB окружности ω выбрана точка C, отличная от середины дуги. Прямые AC и OB пересекаются в точке D, а прямые BC и OA — в точке E. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ACE, BCD и OCI лежат на одной прямой.

(А. Полянский)

9.4. В буфете лежат 100 яблок суммарного веса 10 кг, каждое весит не меньше 25 г. Буфетчице нужно разрезать их на части и раздать 100 детям, каждому по 100 г. Докажите, что она может это сделать так, чтобы любой кусок яблока весил не меньше 25 г.

(К. Кноп, И. Богданов)

10 класс

10.1. Имеется 40 карандашей четырех цветов — по 10 карандашей каждого цвета. Их раздали 10 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов, вне зависимости от распределения карандашей?

(И. Богданов, О. Подлипский)

10.2. По окружности расставлено 100 попарно различных чисел. Докажите, что можно выбрать 4 подряд стоящих числа таким образом, чтобы сумма двух крайних чисел этой четверки была строго больше суммы средних. (*С. Берлов*)

10.3. Через центр O окружности, описанной около неравнобедренного остроугольного треугольника ABC, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AB и AC. Эти прямые пересекают высоту AD треугольника ABC, в точках P и Q. Точка M — середина стороны BC, а S — центр окружности, описанной около треугольника OPQ, Докажите, что $\angle BAS = \angle CAM$.

(*Д. Прокопенко*)

10.4. В каждой клетке квадрата 100×100 записано некоторое натуральное число. Прямоугольник, стороны которого идут по линиям сетки, назовем *хорошим*, если сумма чисел во всех его клетках делится на 17. Разрешается одновременно закрашивать все клетки в некотором хорошем прямоугольнике. Одну клетку запрещается закрашивать дважды. При каком наибольшем d можно закрасить хотя бы d клеток при любом расположении чисел?

(*П. Зусманович, Ф. Петров*)

11 класс

11.1. Существуют ли такие ненулевые действительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{10}, что
$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_{10}+\frac{1}{a_{10}}\right)=\left(a_1-\frac{1}{a_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_{10}-\frac{1}{a_{10}}\right)?$$
(*Н. Агаханов, И. Богданов*)

11.2. В клетчатой таблице $n \times n$ ($n \geqslant 4$) поставлены n знаков «+» в клетках одной диагонали и знаки «$-$» во всех остальных клетках. Разрешается в некоторой строке или в некотором столбце поменять все знаки на противоположные. Докажите, что после любого количества таких операций в таблице останется не менее n плюсов. (*Р. Карасёв*)

11.3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, а его диагонали пересекаются в точке K. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 — середины

$\{(n,n),(n,1),(2,n),(2,1)\}$. Легко видеть, что они удовлетворяют всем требованиям. На рис. 5 отмечены такие четвёрки при $n=5$.

Второе решение. Заметим, что знак, стоящий в клетке, изменяется ровно тогда, когда с этой клеткой было проделано нечётное число операций. Пусть есть ровно r строк и ровно c столбцов, к каждому из которых операция применялась нечётное число раз (назовём их *нечётными*). Тогда знак изменился ровно в $r(n-c)$ клетках, стоящих на пересечении нечётных строк с чётными столбцами, и в $c(n-r)$ клетках, стоящих на пересечении чётных строк с нечётными столбцами. Теперь нетрудно понять, что, если бы мы вместо исходных операций применили бы по одой операции ровно ко всем чётным строкам и столбцам, результат получился бы тем же самым, но при этом числа r и c заменилось бы на $n-r$ и $n-c$ соответственно. Значит, можно считать, что $r+c \leqslant n$.

Далее, среди изменённых $r(n-c)+c(n-r)$ знаков не более, чем $r+c$ были плюсами (максимум по одному в r строках, и максимум по одному в c столбцах); значит, хотя бы $r(n-c)+c(n-r)-(r+c)$ минусов стали плюсами, и хотя бы $n-(r+c)$ плюсов остались плюсами. Таким образом, общее количество плюсов P стало не меньше, чем $r(n-c)+c(n-r)-(r+c)+n-(r+c) = -2rc+(r+c)(n-2)+n$. Теперь, поскольку $2rc \leqslant \dfrac{(r+c)^2}{2}$, получаем
$$P \geqslant (r+c)(n-2)-\frac{(r+c)^2}{2}+n=(r+c)\left(n-2-\frac{r+c}{2}\right)+n\geqslant n$$
(ибо $n-2-\frac{r+c}{2} \geqslant n-2-\frac{n}{2} \geqslant 0$), что и требовалось доказать.

11.3. Заметим, что точка I_1 лежит на биссектрисах AM_2 и BM_4 углов BAC и ABD, поэтому $I_1 = AM_2 \cap BM_4$ (см. рис. 6). Аналогично $I_2 = BM_3 \cap CM_1$, $I_3 = CM_4 \cap DM_2$, $I_4 = DM_1 \cap AM_3$. Поскольку $\overset{\smile}{AM_1}+\overset{\smile}{CM_3}=\overset{\smile}{BM_1}+\overset{\smile}{DM_3}$, прямая M_1M_3 составляет равные углы с хордами AC и BD; следовательно, прямая M_1M_3 параллельна биссектрисе угла AKB, то есть прямой I_1I_3. Аналогично, $M_2M_4 \parallel I_2I_4 \perp I_1I_3$ (поскольку внешняя и внутренняя биссектрисы угла перпендикулярны).

Если прямые I_1I_3 и M_1M_3, а также I_2I_4 и M_2M_4 совпавсех чисел в P будет равна ab, что не может быть кратным 17. Таким образом, ни одна клетка с единицей закрашена не будет, а значит, останется хотя бы 256 незакрашенных клеток.

11 класс

11.1. **Ответ.** Не существуют.

Рассмотрим произвольные ненулевые числа $a_1, \ldots, a_{10}$. Заметим, что числа a_k и $\dfrac{1}{a_k}$ имеют одинаковый знак. Значит,

$$\left|a_k + \frac{1}{a_k}\right| = |a_k| + \frac{1}{|a_k|} > \max\left(|a_k|, \frac{1}{|a_k|}\right) \geqslant \left|a_k - \frac{1}{a_k}\right| \geqslant 0.$$

Перемножая эти неравенства, получаем, что

$$\left|a_1 + \frac{1}{a_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|a_{10} + \frac{1}{a_{10}}\right| > \left|a_1 - \frac{1}{a_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|a_{10} - \frac{1}{a_{10}}\right|,$$

то есть требуемое равенство невозможно.

11.2. **Первое решение.** Пронумеруем строки числами $1, \ldots, n$ сверху вниз, а столбцы — теми же числами слева направо. Клетку будем обозначать парой номеров её строки и столбца; при этом будем считать, что клетки диагонали из плюсов имеют координаты (i, i) $(i = 1, \ldots, n)$.

Заметим, что если четыре клетки лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, то любая операция либо не меняет знаков в этих клетках, либо меняет знаки ровно в двух клетках из четырёх. В частности, чётность количества плюсов в этих четырёх клетках не меняется; значит, если среди них вначале был ровно один плюс, то и потом их будет не менее одного.

Теперь выберем в нашей таблице n непересекающихся таких четвёрок; по сказанному выше, после любых операций в каждой из них найдётся как минимум один плюс, следовательно, всего плюсов будет не менее n. При $i = 1, 2, \ldots, n-2$ выберем четвёрку клеток $\{(i,i), (i,i+1), (i+2,i), (i+2,i+1)\}$, а также выберем четвёрки $\{(n-1,n-1), (n-1,n), (1,n-1), (1,n)\}$ и

1	1		4	4
5	2	2		5
1	1	3	3	
	2	2	4	4
5		3	3	5

Рис. 5

дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Точки I_1, I_2, I_3, I_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABK, BCK, CDK, DAK соответственно. Докажите, что прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в одной точке. *(П. Кожевников)*

11.4. Дано натуральное число $n \geqslant 3$. При каком наименьшем k верно следующее утверждение? Для любых n точек $A_i = (x_i, y_i)$ на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и любых вещественных чисел c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ существует такой многочлен $P(x, y)$, степень которого не больше k, что $P(x_i, y_i) = c_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

(Многочленом от двух переменных называется функция вида

$$P(x, y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \\ + \ldots + a_{k,0}x^k + a_{k-1,1}x^{k-1}y + \ldots + a_{0,k}y^k.$$

Степенью ненулевого одночлена $a_{i,j}x^iy^j$ называется число $i + j$; степенью многочлена $P(x, y)$ называется наибольшая степень входящего в него одночлена.) *(Ф. Петров)*

Решения задач

9 класс

9.1. **Ответ.** 3 ребят.

Покажем, что всегда можно выбрать 3 ребят так, чтобы у них нашлись карандаши всех цветов. Так как карандашей каждого цвета 6, а каждому досталось по 4 карандаша, то кому-то достались карандаши по крайней мере двух различных цветов. Осталось добавить к нему двух ребят, у которых есть карандаши оставшихся двух цветов.

Покажем теперь, как раздать карандаши ребятам, чтобы у любых двух из них вместе были карандаши не более трех цветов. Дадим одному ребенку 4 карандаша второго цвета, одному — 4 карандаша третьего цвета, одному — 4 карандаша четвертого цвета, одному — по 2 карандаша первого и второго цвета, одному — по 2 карандаша первого и третьего цвета, и еще одному — по 2 карандаша первого и четвертого цвета.

9.2. Предположим противное. Обозначим наши числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100}; будем считать, что $a_{100+n} = a_n$. Тогда выполнены неравенства $a_n + a_{n+3} \leqslant a_{n+1} + a_{n+2}$, или $a_{n+3} - a_{n+2} \leqslant a_{n+1} - a_n$ при $n = 1, 2, \ldots, 100$. Значит, $a_{100} - a_{99} \leqslant a_{98} - a_{97} \leqslant \ldots \leqslant a_2 - a_1 \leqslant a_{100} - a_{99}$, что означает, что все эти неравенства обращаются в равенства. Итак, $a_{2n} - a_{2n-1} = k$ при всех $n = 1, 2, \ldots, 50$, и аналогично $a_{2n+1} - a_{2n} = \ell$ при $n = 1, 2, \ldots, 50$. Просуммировав все 100 полученных равенств, получаем $0 = 50k + 50\ell$, откуда $k = -\ell$. Но тогда $a_3 - a_2 = \ell = -k = -(a_2 - a_1) = a_1 - a_2$, то есть $a_1 = a_3$. Это противоречит условию.

9.3. **Первое решение.** Пусть M — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ACE и BCD (она есть, так как в случае касания прямые AE и BD были бы параллельны). Нам достаточно показать, что описанная окружность треугольника OCI также проходит через точку M, так как в этом случае центры всех трех окружностей из условия будут лежат на серединном перпендикуляре к отрезку CM.

Окончательно, $\angle BAS = \angle BAO + \angle SAO = \angle CAD + \angle MAD = \angle CAM$.

10.4. **Ответ.** $9744 = 100^2 - 16^2$ клеток.

Лемма. *Пусть полоска $1 \times k$ заполнена натуральными числами. Тогда в ней можно закрасить несколько непересекающихся хороших прямоугольников, содержащих не меньше $k - 16$ клеток.*

Доказательство. Индукция по k. При $k \leqslant 16$ ничего красить не надо. Пусть $k \geqslant 17$. Пусть в 17 левых клетках стоят числа $a_1, \ldots, a_{17}$. Среди чисел $0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_{17}$ найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 17. Тогда их разность, имеющая вид $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$, будет делиться на 17. Удалим клетки с i-й по j-ю из полоски. Оставшиеся клетки будем считать одной полоской длины $k - (j - i + 1)$. Применив к ней предположение индукции, мы закрасим несколько хороших прямоугольников так, что останется не более 16 незакрашенных клеток. Тогда в исходной полоске можно закрасить те же клетки, а также клетки с i-й по j-ю (они либо образуют новый хороший прямоугольник, либо попадут внутрь старого). $\square$

Перейдём к задаче. Покажем, что можно оставить не более $16^2 = 256$ незакрашенных клеток. Рассмотрим полоску 1×100, в клетки которой записаны суммы чисел в столбцах исходного квадрата. Применив к ней утверждение леммы, мы найдём несколько хороших прямоугольников. Тогда в исходном квадрате можно закрасить соответствующие прямоугольники высоты 100. После этого незакрашенными останутся не более 16 столбцов. Применим теперь лемму к каждому из них по отдельности; в каждом столбце останется не более 16 незакрашенных клеток, т. е. всего не более 256 клеток.

Осталось привести пример расстановки, в котором нельзя оставить менее 256 клеток незакрашенными. Расставим в каком-нибудь квадрате 16×16 единицы, а во всех остальных клетках — нули. Рассмотрим произвольный прямоугольник P; если он содержит единицу, то он пересекается с квадратом по некоторому прямоугольнику $a \times b$ ($1 \leqslant a, b \leqslant 16$); но тогда сумма

10 класс

10.1. **Ответ.** 3 ребят.

Покажем, что всегда можно выбрать трёх ребят так, чтобы у них нашлись карандаши всех цветов. Так как карандашей каждого цвета 10, а каждому досталось по 4 карандаша, то кому-то достались карандаши по крайней мере двух различных цветов. Осталось добавить к нему двух ребят, у которых есть карандаши оставшихся двух цветов.

Покажем теперь, как раздать карандаши ребятам, чтобы у любых двух из них вместе были карандаши не более трех цветов. Раздадим двум ребятам по 4 карандаша второго цвета, двум — по 4 карандаша третьего цвета, двум — по 4 карандаша четвертого цвета, одному — 4 карандаша первого цвета, одному — по 2 карандаша первого и второго цвета, одному — по 2 карандаша первого и третьего цвета, и еще одному — по 2 карандаша первого и четвертого цвета.

10.2. См. решение задачи 9.2.

10.3. Пусть для определённости $AB > AC$ (см. рис. 4). Обозначим через L середину отрезка AB. Заметим, что $\angle AOL = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$. Отсюда $\angle BAO = 90^\circ - \angle AOL = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAD$.

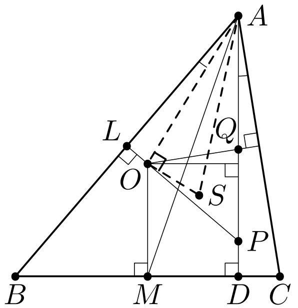


Рис. 4

Стороны треугольника OPQ перпендикулярны соответственно сторонам треугольника ABC, поэтому $\triangle OPQ$ подобен $\triangle ABC$: он получается из $\triangle ABC$ последовательным выполнением поворота на 90° и гомотетии с некоторым коэффициентом k. Так как OS и AO — соответственные отрезки в треугольниках OPQ и ABC, то $OS \perp AO$ и $OS = k \cdot AO$. Далее, отрезок MD равен высоте треугольника OPQ, проведенной к стороне PQ, поэтому $MD = k \cdot AD$. Значит, прямоугольные треугольники AOS и ADM подобны, поэтому $\angle SAO = \angle MAD$.

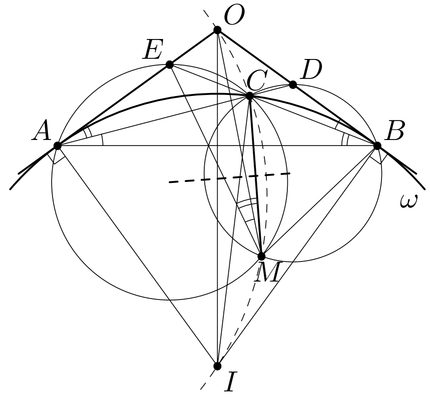


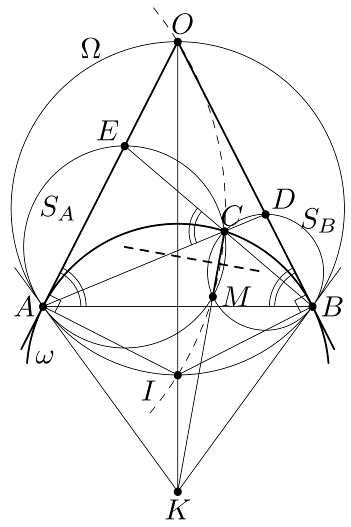
Рис. 1

Обозначим $\angle CAB = \alpha$ и $\angle CBA = \beta$; без ограничения общности можно считать, что $\beta > \alpha$. По свойству угла между хордой и касательной, $\angle OBE = \alpha$, аналогично $\angle DAE = \beta$ (см. рис. 1). В четырёхугольнике $OBIA$ углы A и B прямые, поэтому он — вписанный; значит, $\angle OIA = \angle OBA = \alpha + \beta$. Следовательно, $\angle CIO = \angle CIA - \angle OIA = 2\angle CBA - (\alpha+\beta) = \beta - \alpha$. Для того, чтобы доказать, что точка M лежит на описанной окружности треугольника OCI, нам достаточно показать равенство $\angle CMO = \beta - \alpha$.

Поскольку четырёхугольники $AECM$ и $DBMC$ вписаны, получаем $\angle BME = \angle BMC + \angle CME = (180^\circ - \angle CDB) + \angle CAE = \angle ODA + \angle DAO = 180^\circ - \angle EOB$, то есть четырехугольник $EOBM$ также вписан, и $\angle OME = \angle OBE = \alpha$. Следовательно, $\angle CMO = \angle CME - \angle OME = \angle CAE - \alpha = \beta - \alpha$, что и требовалось доказать.

Замечание. Точка M является *точкой Микеля* четырехсторонника, образованного прямыми AC, BC, AO и BO, то есть точка M будет лежать на описанной окружности треугольника, образованного любыми тремя из этих четырех прямых. Таким образом точка M будет лежать не только на описанных окружностях треугольников AEC, BCD, EOB, как мы показали, но и на описанной окружности треугольника AOD.

Второе решение. Поскольку $\angle OAI = \angle OBI = 90^\circ$, четырёхугольник $OAIB$ вписан в некоторую окружность Ω. Обозна-



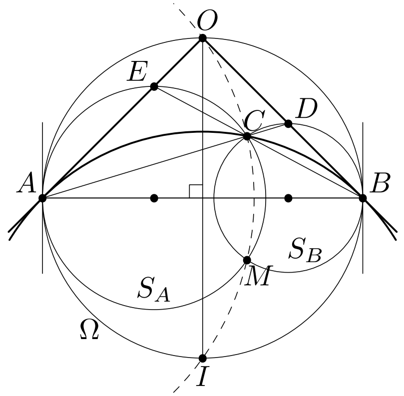


Рис. 2 Рис. 3

чим через S_A и S_B описанные окружности треугольников ACE и BCD, а через M — вторую точку их пересечения. Поскольку BO — касательная к ω, имеем $\angle ABO = 180^\circ - \angle ACB = \angle ACE$. Поскольку эти углы в окружностях Ω и S_A стягиваются хордами AO и AE, лежащими на одном луче AO, то по теореме об угле между касательной и хордой касательные к Ω и S_A в точке A совпадают. Аналогично, касательные к S_B и Ω в точке B также совпадают.

Пусть касательные к Ω в точках A и B пересекаются в точке K (см. рис. 2). Из симметрии, K лежит на прямой OI. Тогда точка K является радикальным центром окружностей S_A, S_B и Ω, поэтому она лежит на прямой CM. Но тогда $KM \cdot KC = KA^2 = KO \cdot KI$, а значит, точка M лежит на описанной окружности треугольника OIC. Это значит, что центр этой окружности, а также центры окружностей S_A и S_B лежат на серединном перпендикуляре к их общей хорде CM, что и требовалось.

Если же касательные к Ω в точках A и B параллельны (см. рис. 3), то прямая AB содержит диаметры окружностей S_A и

S_B, а также является серединным перпендикуляром к OI, то есть содержит центр описанной окружности треугольника OIC.

9.4. Все веса в решении будут измеряться в граммах. Назовём кусок яблока (или само яблоко) *большим*, если его вес не меньше 25.

Докажем индукцией по n, что n больших яблок суммарного веса $100n$ можно разрезать на большие куски и раздать n детям поровну.

База при $n = 1$ очевидна. Пусть $n > 1$. Рассмотрим два самых тяжёлых яблока; пусть их веса $a \geqslant b$. Заметим, что $a + b \geqslant 200$ (иначе средний вес одного яблока будет меньше, чем $200/2 = 100$). Выкинем эти два яблока из набора и добавим в него яблоко веса $c = a + b - 100 \geqslant 100$. По предположению индукции, полученный набор можно разрезать на большие куски и раздать $n-1$ детям поровну. Если при этом какой-то кусок нового яблока оказался больше 50, разрежем его на два больших куска. Через несколько таких разрезаний мы придём к ситуации, когда новое яблоко разделено на куски весов $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не превосходящих 50. Обозначим $s_d = c_1 + \ldots + c_d$ при $d = 1, 2, \ldots, k$ и положим $s_0 = 0$.

Покажем теперь, как разрезать исходный набор. Все яблоки, кроме a и b, разрежем так же, как и в новом наборе. Заметим, что $a \geqslant 200/2 = 100$. Обозначим через t минимальный индекс такой, что $a - s_t \leqslant 75$ и отрежем от a куски $c_1, \ldots, c_t$, а от b — куски $c_{t+1}, \ldots, c_k$. Заметим, что $a - s_{t-1} > 75$, поэтому от a остался кусок $a' = a - s_t = (a - s_{t-1}) - c_t$ такой, что $75 \geqslant a' > 75 - c_t \geqslant 25$. От b же остался кусок b' такой, что $a' + b' = a + b - c = 100$, поэтому $25 \leqslant b' \leqslant 75$. Итак, можно a' и b' отдать одному ребёнку, а остальные куски распределить между остальными детьми так же, как это делалось в новом наборе. Утверждение доказано.

Замечание. В доказанном *общем* утверждении число 25 нельзя заменить на большее, не зависящее от n.