Материалы для проведения заключительного этапа

XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2009–2010 учебный год

Второй день

Майкоп, 25–30 апреля 2010 г.

Москва, 2010

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.Я. Белов-Канель, В.В. Астахов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.А. Гаврилюк, А.И. Гарбер, А.А. Глазырин, А.С. Голованов, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, Р.Г. Женодаров, Р.Н. Карасёв, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, Ю.С. Мешин, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, А.М. Райгородский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, А.И. Храбров, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.З. Шарич, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия задач

9 класс

9.5. Различные действительные числа a и b таковы, что уравнение
$$(x^2+20ax+10b)(x^2+20bx+10a)=0$$
не имеет корней. Докажите, что число $20(b-a)$ не является целым. (*П. Козлов*)

9.6. У каждого из 1000 гномов есть колпак, синий снаружи и красный внутри (или наоборот). Если на гноме надет красный колпак, то он может только лгать, а если синий — только говорить правду. На протяжении одного дня каждый гном сказал каждому «На тебе красный колпак!» (при этом некоторые гномы в течение дня выворачивали свой колпак наизнанку). Найдите наименьшее возможное количество выворачиваний. (*И. Богданов*)

9.7. Назовём натуральное число n *неудачным*, если его нельзя представить в виде $n=\dfrac{x^2-1}{y^2-1}$ при натуральных $x,y>1$. Конечно или бесконечно количество неудачных чисел? (*В. Сендеров*)

9.8. В остроугольном треугольнике ABC медиана AM длиннее стороны AB. Докажите, что треугольник ABC можно разрезать на три части, из которых складывается ромб. (*С. Волченков*)

10 класс

10.5. Различные действительные числа a и b таковы, что уравнение
$$(x^2+20ax+10b)(x^2+20bx+10a)=0$$
не имеет корней. Докажите, что число $20(b-a)$ не является целым. (*П. Козлов*)

10.6. Внутри треугольника ABC взята точка K, лежащая на биссектрисе угла BAC. Прямая CK вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке M. Окружность Ω проходит через точку A, касается прямой CM в точке K и пересекает вторично отрезок AB в точке P, а окружность ω — в точке Q. Докажите, что точки P, Q и M лежат на одной прямой. *(Л. Емельянов)*

10.7. Даны $n \geqslant 3$ попарно взаимно простых чисел. Известно, что при делении произведения любых $n-1$ из них на оставшееся число получается один и тот же остаток r. Докажите, что $r \leqslant n-2$. *(В. Сендеров)*

10.8. В стране некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом из любого города можно долететь в любой другой (возможно, с пересадками). Известно, что если выбрать любой замкнутый маршрут из нечётного числа рейсов и закрыть все эти рейсы, то уже не из любого города можно будет добраться в любой другой. Докажите, что все города можно распределить по 4 республикам так, чтобы любой рейс соединял города из разных республик. (Некоторые республики могут не содержать городов.) *(В. Дольников)*

11 класс

11.5. Дано натуральное $n > 1$. Докажите, что найдутся такие n последовательных натуральных чисел, что их произведение делится на все простые числа, не превосходящие $2n+1$, и не делится ни на одно другое простое число. *(И. Богданов)*

11.6. Могут ли 4 центра вписанных в грани тетраэдра окружностей лежать в одной плоскости? *(И. Богданов, О. Подлипский)*

11.7. Многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 3$ имеет n вещественных корней $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, причем $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \ldots < x_n - x_{n-1}$. Докажите, что максимум функции $y = |P(x)|$ на отрезке $[x_1, x_n]$ достигается в точке, принадлежащей отрезку $[x_{n-1}, x_n]$. *(И. Богданов)*

11.8. В школе-интернате преподаётся 9 предметов и учатся 512 детей, расселённых в 256 двухместных номерах (детей, живущих в одном номере, назовём *соседями*). Известно, что у любых двух детей наборы предметов, которые им интересны, различны (в частности, ровно одному ребёнку не интересно ничего). Докажите, что всех детей можно построить по кругу так, чтобы лю-

(x'_2, x'_3), …, (x'_{2k-2}, x'_{2k-1}), (x'_{2k}, x'_1) «новыми» парами в группе B. Ясно, что новые пары, вместе со старыми, дают нам разбиение группы B на пары соседей.

Теперь, применив предположение индукции к группе B с этим разбиением, расставим её по кругу с выполнением условий. Вставим теперь между любыми детьми новой пары (x'_{2i}, x'_{2i+1}) отрезок круга K от x_{2i} до x_{2i+1}. Нетрудно видеть, что теперь все дети стоят в кругу, и расстановка удовлетворяет всем условиям.

$- x_i) > x_n - (x_n - x_{n-1}) = x_{n-1}$. Покажем, что $|P(b)| > |P(a)|$; из этого, очевидно, следует утверждение задачи.

Из условия следует, что $x_{k+m} - x_k < x_{\ell+m} - x_\ell$ при $1 \leqslant k < \ell \leqslant n-m$. Поскольку нам известны n корней многочлена $P(x)$, имеем $P(x) = p(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, где p — старший коэффициент многочлена $P(x)$. Заметим, что $|b-x_s| = x_n - x_s - t > x_{i+n-s} - x_i - t = |x_{i+n-s} - a|$ при $i+1 \leqslant s \leqslant n-1$. Кроме того, $|b - x_r| = b - x_r > x_{n-1} - x_r > a - x_r = |a - x_r|$ при $1 \leqslant r \leqslant i-1$. Перемножая все полученные неравенства с равенством $p|b-x_n||b-x_i| = pt(x_n - x_i - t) = p|a-x_i||a-x_n|$, получаем

$$P(b) = p|b-x_1||b-x_2|\ldots|b-x_n| > \\ > p|a-x_1||a-x_2|\ldots|a-x_n| = P(a),$$

что и требовалось доказать.

11.8. Мы докажем утверждение задачи в более общем виде, для $n \geqslant 2$ предметов и 2^n детей, произвольно разбитых на 2^{n-1} пар соседей. Заметим, что существует ровно 2^n наборов из n предметов; значит, каждый набор предметов интересен ровно одному ученику.

Индукция по n. При $n = 2$ легко проверить утверждение непосредственно. Пусть $n > 2$; рассмотрим любых двух соседей, выберем какой-нибудь предмет, интерес к которому у них различен (скажем, физику), и разобьём всех детей на две группы по 2^{n-1} детей: в группу A попадут те, кому физика интересна, а в группу B — все остальные.

Отселим группу A в другой интернат, с 2^{n-2} комнатами. При этом те пары, что были соседями раньше, оставим соседями. Остальных же (согласно выбору предмета, они есть; при этом их число, очевидно, чётно) разобьем на пары соседей произвольно. Назовем такие пары «новыми».

По предположению индукции, теперь группу A можно расставить по кругу K с выполнением условий. Пусть (x_1, x_2), …, (x_{2k-1}, x_{2k}) — все новые пары в порядке обхода этого круга по часовой стрелке (x_{2i-1} находится перед x_{2i}; мы будем считать, что $x_{2k+1} = x_1$). Обозначим через x_i' исходного соседа человека x_i (по построению, x_i' находится в группе B), и объявим пары

бые два соседа стояли рядом, а для любых двух несоседей, стоящих рядом, одному из них интересны все предметы, интересные другому, и ещё ровно один предмет. *(Д. Фон-Дер-Флаасс)*

Решения задач

9 класс

9.5. Предположим противное. Пусть для определённости $b > a$; тогда $20(b-a) \geqslant 1$, то есть $b - a \geqslant \frac{1}{20}$.

Дискриминант второго трёхчлена в исходном уравнении отрицателен, откуда $100b^2 - 10a < 0$. Значит, $10b^2 < a \leqslant b - \frac{1}{20}$, то есть $10b^2 - b + \frac{1}{20} < 0$. Но это невозможно, поскольку дискриминант трёхчлена $f(b) = 10b^2 - b + \frac{1}{20}$ также отрицателен, а старший член положителен.

9.6. **Ответ.** 998 выворачиваний.

Назовём гнома *красным* или *синим*, если на нём надет колпак соответствующего цвета. Заметим, что один гном может сказать требуемую фразу другому тогда и только тогда, когда эти гномы разноцветны: синий гном при этом скажет правду, а красный — солжёт. Теперь, если какие-то три гнома не выворачивали колпаков, то два из них — одного цвета, и они не смогут сказать друг другу требуемого, что неверно. Значит, таких гномов не больше двух, и выворачиваний было не меньше $1000 - 2 = 998$.

Будем говорить, что два гнома *пообщались*, если каждый из них сказал другому заветную фразу. Опишем, как могло случиться всего 998 выворачиваний, если, например, вначале гном Вася был синим, а остальные — красными. В начале дня каждый гном пообщался с Васей. Затем красные гномы по очереди выворачивали свои колпаки. При этом после каждого выворачивания все красные гномы пообщались с изменившим цвет. Когда останется только один красный гном, то любая пара гномов уже пообщается друг с другом (в тот момент, когда первый из них сменил цвет), при этом произошло 998 изменений цвета.

Замечание. Построить пример с 998 изменениями цвета можно, начиная с любой ситуации, в которой не все гномы одноцветны.

11.6. **Ответ.** Не могут.

Пусть I_A, I_B, I_C, I_D — центры вписанных окружностей треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Предположим, что они лежат в одной плоскости. Тогда либо они образуют выпуклый четырёхугольник, либо одна из этих точек лежит в треугольнике, образованном тремя другими.

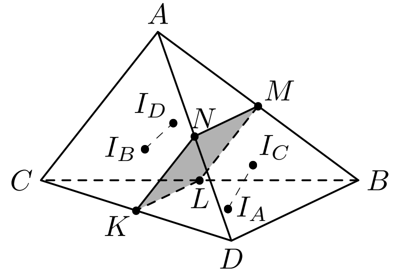

Рис. 5

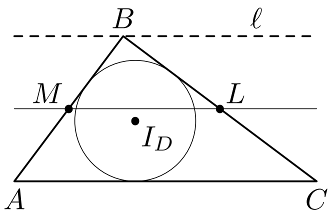

Рис. 6

Случай 1. Пусть без ограничения общности $I_AI_BI_CI_D$ — выпуклый четырёхугольник: тогда отрезки I_AI_C и I_BI_D пересекаются. Обозначим через M, N, K, L середины ребер AB, AD, CD, BC соответственно (см. рис. 5). Рассмотрим треугольник ABC. Проведём через точку B прямую ℓ, параллельную AC; тогда вписанная окружность этого треугольника лежит между прямыми ℓ и AC, касаясь AC, но не касаясь ℓ. Это значит, что точки I_D и B лежат по разные стороны от средней линии ML (см. рис. 6). Аналогично получаем, что точки I_B и I_D окажутся по одну сторону от плоскости $MNKL$, а точки I_A и I_C — по другую. Но тогда отрезки I_BI_D и I_AI_C не могут пересекаться — противоречие.

Случай 2. Осталось показать, что точка I_A не может лежать в треугольнике $I_BI_CI_D$. Это следует из того, что точки I_B, I_C, I_D лежат строго по одну сторону от плоскости BCD, а точка I_A — в этой плоскости.

11.7. Заметим, что максимум функции $|P(x)|$ не может достигаться в точке x_i, ибо $|P(x_i)| = 0$. Рассмотрим произвольную точку $a \in (x_i, x_{i+1})$ при $i < n-1$; положим $t = a - x_i$, $b = x_n - t$. Заметим, что $b \in (x_{n-1}, x_n)$, поскольку $x_n > b > x_n - (x_{i+1} -$

Обозначим через V множество всех удалённых рёбер, а через W — множество всех оставшихся. Заметим, что оставшийся граф по-прежнему связен. Это значит, что не существует нечётного цикла, все рёбра которого принадлежат V; в самом деле, если бы такой цикл существовал, то при удалении из G всех его рёбер остались бы все рёбра множества W, и граф остался бы связным.

Теперь рассмотрим два графа G_V и G_W, вершинами которых являются вершины графа G, а множества рёбер — это V и W, соответственно. Тогда в графе G_W циклов нет (значит, его вершины можно правильно раскрасить в цвета 0 и 1), а в G_V по доказанному нет нечётных циклов (значит, его вершины можно правильно раскрасить в цвета 0 и 2). Присвоим теперь каждой вершине сумму её цветов в этих раскрасках. Тогда, если две вершины соединены ребром в графе G, то они соединены ребром в одном из графов G_V или G_W; тогда, как нетрудно видеть, их цвета различны, то есть полученная раскраска (в цвета $0, 1, 2, 3$) является правильной.

11 класс

11.5. Предположим, что число $n+1$ составное; покажем, что тогда подходят числа $n+2, \ldots, 2n+1$. Очевидно, их произведение делится на все простые числа из отрезка $[n+2, 2n+1]$, но не делится на простые числа, большие $2n+1$ (ибо все сомножители не превосходят $2n+1$). Для любого же простого $p \leqslant n$, одно из p последовательных чисел делится на p; значит, и одно из наших n чисел также делится на p.

Пусть теперь число $n+1>2$ простое; тогда оно нечётно, а число $n+2>2$ чётно и потому составное. В этом случае подходят числа $n+3, \ldots, 2n+2$. Действительно, по аналогичным причинам их произведение P делится на все простые числа из отрезков $[1, n]$ и $[n+3, 2n+2]$, но не делится на простые числа, большие $2n+1$ (поскольку число $2n+2$ составное). Кроме того, P делится на $n+1=\frac{2n+2}{2}$.

9.7. **Ответ.** Бесконечно.

Докажем, что неудачным является любое число вида $n=p^2$, где p — нечётное простое число. Предположим противное, т. е.

$$(y^2-1)p^2 = x^2-1 \qquad (1)$$

при некоторых натуральных $x, y \neq 1$. Тогда либо $x+1$, либо $x-1$ делится на p.

Пусть $x+1 \vdots p$. Тогда $x-1=(x+1)-2$ не делится на p, а тогда из (1) получаем, что $x+1 \vdots p^2$, то есть $x=kp^2-1$ при некотором натуральном k. Подставляя в (1), получаем $y^2=\frac{x+1}{p^2}(x-1)+1=k(kp^2-2)+1=k^2p^2-2k+1$. Но $k^2p^2>k^2p^2-2k+1>k^2p^2-2kp+1$, то есть $(kp)^2>y^2>(kp-1)^2$, что невозможно.

Если же $x-1 \vdots p$, то аналогично получаем $x=kp^2+1$, $y^2 = k^2p^2+2k+1$, $(kp)^2<y^2<(kp+1)^2$, что опять же невозможно.

9.8. Пусть N — середина стороны AC, а K — точка на прямой MN такая, что $MK=MN$. Тогда треугольники MNC и MKB симметричны относительно M и потому равны. Проведём разрез по средней линии MN; переложив треугольник MNC так, чтобы он совпал с $\triangle MKB$, получаем параллелограмм $ANKB$ (см. рис. 1). Если $AN=AB$, то ромб уже получен.

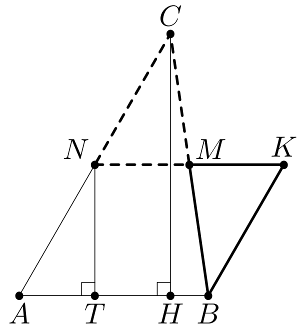

Рис. 1

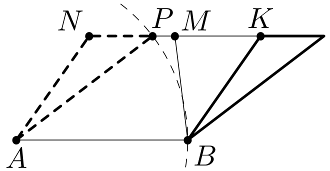

Рис. 2

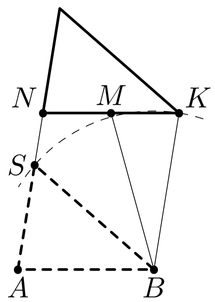

Рис. 3

Пусть $AN<AB$ (см. рис. 2). Проведём окружность с центром в точке A и радиусом AB. Тогда точка N лежит внутри окружности, а M — вне, поэтому окружность пересечёт отрезок NM в точке P. Отрезав от параллелограмма $ANKB$ тре-

угольник APN и сдвинув его так, чтобы сторона AN совпала с BK, мы получим ромб.

Пусть, наконец, $AN > AB$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, основание H высоты CH лежит на отрезке AB (см. рис. 1). Далее, основание T перпендикуляра, опущенного из N на AB, есть середина отрезка AH; значит, $BT > AT$, а тогда $BN > AN$. Значит, окружность с центром в точке B и радиусом AN пересечёт сторону AN в точке S, ибо точка N лежит вне, а точка A — внутри этой окружности (см. рис. 3). Отрезав от параллелограмма треугольник ABS и сдвинув его до совмещения стороны AB со стороной NK, мы получим ромб.

Замечание. Можно доказать, что любой тупоугольный треугольник также можно разрезать требуемым образом. Действительно, если угол B тупой и $AB \geqslant BC$, то медиана AM точно длиннее стороны AB, и при этом $AN < AB$.

10 класс

10.5. См. решение задачи 9.5.

10.6. Пусть R — вторая точка пересечения окружности Ω и отрезка AC (см. рис. 4). Из касания и равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, имеем $\angle MKP = \angle KAP = \angle KAR = \angle KPR$, откуда $PR \parallel CM$. Далее, $\angle CMQ = \angle CAQ = \angle RAQ = \angle RPQ$, поэтому прямые MQ и PQ совпадают, что и требовалось доказать.

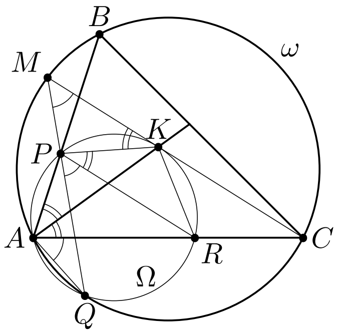

Рис. 4

Замечание. Нетрудно показать, что точка Q всегда лежит на дуге AC, не содержащей точки B.

10.7. Если $r = 0$, то утверждение задачи, очевидно, истинно. Пусть $r > 0$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — данные числа; положим $P = a_1 a_2 \ldots a_n$, $P_i = P/a_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что $a_i > r$, ибо число P_i даёт остаток r при делении на a_i.

Рассмотрим число $S = P_1 + P_2 + \ldots + P_n - r$. Заметим, что $S = (P_1 - r) + (P_2 + P_3 + \ldots + P_n) \vdots a_1$, поскольку оба слагаемых делятся на a_1. Аналогично, $S \vdots a_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$; поскольку a_i попарно взаимно просты, получаем $S \vdots a_1 \ldots a_n = P$. Поскольку $S > a_1 - r > 0$, получаем, что $S \geqslant P$, а тогда $P_1 + \ldots + P_n = S + r > P$. Значит, при некотором i верно неравенство $P_i > P/n$, откуда $a_i < n$, или $a_i \leqslant n - 1$. Но тогда $r < a_i \leqslant n - 1$, то есть $r \leqslant n - 2$.

10.8. Рассмотрим граф G, вершинами которого являются города, и две вершины соединены ребром, если между городами есть авиалиния. Тогда нам известно, что граф связен, но при удалении всех рёбер любого нечётного цикла это условие нарушается; доказать же нужно, что вершины графа можно правильно раскрасить в 4 цвета. Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Пусть в графе нет циклов нечётной длины. Тогда его вершины можно правильно раскрасить двумя красками.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лемму для связного графа. *Расстоянием* между двумя вершинами X и Y назовём наименьшую длину пути, соединяющего эти вершины.

Зафиксируем некоторую вершину A, и покрасим все вершины, находящиеся на нечетном расстоянии от A, в красный цвет, а остальные вершины — в синий цвет. Докажем, что указанная раскраска — искомая. Предположим противное — имеется ребро, соединяющее, скажем, красные вершины B и C. Рассмотрим кратчайшие пути $A = B_0, B_1, \ldots, B_{2n-1} = B$ и $A = C_0, C_1, \ldots, C_{2m-1} = C$, ведущие из A в B и в C. Взяв наибольший индекс i такой, что $B_i = C_i$, получим цикл нечетной длины $B_i, B_{i+1}, \ldots, B_{2n-1}, C_{2m-1}, \ldots, C_i = B_i$. Противоречие. $\square$

Пусть в графе есть цикл; удалим одно из рёбер этого цикла. При этом, очевидно, граф останется связным. Продолжим этот процесс до тех пор, пока циклов в графе не останется.