

## 9 класс

## Первый день

- 9.1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?
- 9.2. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ). На меньшей дуге  $AB$  описанной около него окружности взята точка  $D$ . На продолжении отрезка  $AD$  за точку  $D$  выбрана точка  $E$  так, что точки  $A$  и  $E$  лежат в одной полуплоскости относительно  $BC$ . Описанная окружность треугольника  $BDE$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $F$ . Докажите, что прямые  $EF$  и  $BC$  параллельны.
- 9.3. Через центры некоторых клеток шахматной доски  $8 \times 8$  проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.
- 9.4. Даны положительные числа  $x, y, z$ . Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

## 9 класс

## Первый день

- 9.1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?
- 9.2. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ). На меньшей дуге  $AB$  описанной около него окружности взята точка  $D$ . На продолжении отрезка  $AD$  за точку  $D$  выбрана точка  $E$  так, что точки  $A$  и  $E$  лежат в одной полуплоскости относительно  $BC$ . Описанная окружность треугольника  $BDE$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $F$ . Докажите, что прямые  $EF$  и  $BC$  параллельны.
- 9.3. Через центры некоторых клеток шахматной доски  $8 \times 8$  проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.
- 9.4. Даны положительные числа  $x, y, z$ . Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

**10 класс****Первый день**

- 10.1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша — три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.
- 10.2. На стороне  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $K$  так, что  $\angle ABM = \angle CBK$ . Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников  $ABM$ ,  $ABK$ ,  $CBM$  и  $CBK$ , лежат на одной окружности.
- 10.3. Даны различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ . На доску выписаны все 196 чисел вида  $a_k + a_\ell$ , где  $1 \leq k, \ell \leq 14$ . Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02,  $\dots$ , 99)?
- 10.4. Ненулевые числа  $a, b, c$  таковы, что любые два из трёх уравнений  $ax^{11} + bx^4 + c = 0$ ,  $bx^{11} + cx^4 + a = 0$ ,  $cx^{11} + ax^4 + b = 0$  имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.

**10 класс****Первый день**

- 10.1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша — три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.
- 10.2. На стороне  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $K$  так, что  $\angle ABM = \angle CBK$ . Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников  $ABM$ ,  $ABK$ ,  $CBM$  и  $CBK$ , лежат на одной окружности.
- 10.3. Даны различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ . На доску выписаны все 196 чисел вида  $a_k + a_\ell$ , где  $1 \leq k, \ell \leq 14$ . Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02,  $\dots$ , 99)?
- 10.4. Ненулевые числа  $a, b, c$  таковы, что любые два из трёх уравнений  $ax^{11} + bx^4 + c = 0$ ,  $bx^{11} + cx^4 + a = 0$ ,  $cx^{11} + ax^4 + b = 0$  имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.

## 11 класс

## Первый день

- 11.1. Существует ли такое вещественное  $\alpha$ , что число  $\cos \alpha$  иррационально, а все числа  $\cos 2\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$ ,  $\cos 5\alpha$  рациональны?
- 11.2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.
- 11.3. На окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , выбрана точка  $K$ . Оказалось, что прямая  $CK$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $M$  такой, что  $AM : MD = 2$ . Пусть  $O$  — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $OKD$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $COD$ .
- 11.4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по  $x_1, \dots, x_{2011}$  кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по  $y_1, \dots, y_{2011}$  кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \dots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел  $x_i$  и  $y_i$  и любой схеме дорог?

## 11 класс

## Первый день

- 11.1. Существует ли такое вещественное  $\alpha$ , что число  $\cos \alpha$  иррационально, а все числа  $\cos 2\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$ ,  $\cos 5\alpha$  рациональны?
- 11.2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.
- 11.3. На окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , выбрана точка  $K$ . Оказалось, что прямая  $CK$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $M$  такой, что  $AM : MD = 2$ . Пусть  $O$  — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $OKD$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $COD$ .
- 11.4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по  $x_1, \dots, x_{2011}$  кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по  $y_1, \dots, y_{2011}$  кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \dots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел  $x_i$  и  $y_i$  и любой схеме дорог?