9 класс

Второй день

9.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым.

9.6. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек — обозначим их A, B и C, после чего на плоскости отмечалась точка D, симметричная A относительно серединного перпендикуляра к BC.

Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой.

9.7. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

9.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

XXXVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым.

9.6. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек — обозначим их A, B и C, после чего на плоскости отмечалась точка D, симметричная A относительно серединного перпендикуляра к BC.

Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой.

9.7. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

9.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

10 класс

Второй день

10.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым.

10.6. На доску выписаны 2011 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

10.7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 — в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

10.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

XXXVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым.

10.6. На доску выписаны 2011 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

10.7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 — в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

10.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

11 класс

Второй день

11.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым.

11.6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

11.7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провёл всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведённые прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася?

11.8. Даны положительные числа b и c. Докажите неравенство

$$(b-c)^{2011}(b+c)^{2011}(c-b)^{2011} \geqslant \\ \geqslant (b^{2011}-c^{2011})(b^{2011}+c^{2011})(c^{2011}-b^{2011}).$$

XXXVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым.

11.6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

11.7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провёл всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведённые прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася?

11.8. Даны положительные числа b и c. Докажите неравенство

$$(b-c)^{2011}(b+c)^{2011}(c-b)^{2011} \geqslant \\ \geqslant (b^{2011}-c^{2011})(b^{2011}+c^{2011})(c^{2011}-b^{2011}).$$